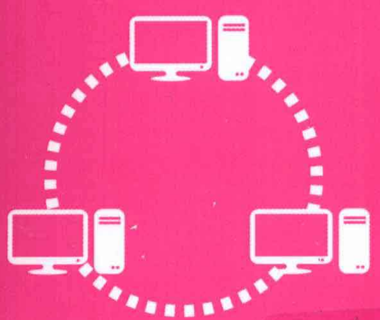
国内领先的通信专业技术社区“C114通信人家园”鼎力推荐

通信新读

——从原理到应用

陈小锋 编著



- 通信人家园连载热帖
- 该贴点击次数超过600000
- 精选通信全领域原理与应用
- 覆盖面广，散而不乱，融会贯通
- 解读新颖准确，深而不繁

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

在线互动交流平台

官方微博：http://weibo.com/cmpjsj
豆 瓣 网：http://site.douban.com/139085/
读者信箱：cmp_itbook@163.com

通信人家园（http://bbs.c114.net）网友精彩回帖选录

繁杂的通信理论用数学来解释，变得简洁而优美。楼主辛苦了，等待更新。

——sunnynsj

本人也从事通信原理教学工作，刚一路粗略看过楼主的帖子，写得很精炼，道出了通信技术的理论本质，可惜国内还没有见过类似风格中文技术讲解书籍，如果出书我先预定两本，并推荐我的同事们购买。

——dragonkiss

目前只关注了MIMO部分，一直想不通的问题基本都找到答案了。看到精彩处，禁不住眉飞色舞，手舞足蹈，犹如醍醐灌顶呀。

——hornedmelon

能在毫无头绪，一筹莫展之际看到此等让人豁然开朗的大师级讲解，真真是一件极好的事！

——六眼飞鱼

看了楼主的内容，豁然开朗啊！尤其是mimo部分，感觉有些东西真的理解起来不简单，大赞楼主！！赶紧出书啊！！我马上去买哈。

——kiddinghao

问下楼主，这本书有没有出书啊？内容上感觉非常好，项目过程中有一些记不清楚的概念，经常来翻这个帖子，还是很希望能出本书，买来放手边，当工具书用的。楼主出书的话，一定要记得通知下，这个必须收藏推荐给其他师弟师妹们啊！

——reterchen

鄙人作为一名学生，对你理解的深度感到吃惊，我认为通信的美丽之处在于模型下的数学推导并以此指导实践，欣赏楼主的讲解方式，特意注册一个账号向楼主表示敬意，希望楼主能有更多的佳作。

——gobelieve

学习了陈老师关于信息论那一段的讲解，顿时觉得功率受限和带宽受限变得很容易理解了，相关的公式推导对理解概念很有帮助，相较之下，一般教材上的公式真是晦涩冗长。

——sunnynsj

地址：北京市百万庄大街22号
邮政编码：100037
电话服务
社服务中心：010-88361066
销售一部：010-68326294
销售二部：010-88379649
读者购书热线：010-88379203
网络服务
教材网：http://www.cmpedu.com
机工官网：http://www.cmpbook.com
机工官博：http://weibo.com/cmp1952
封面无防伪标均为盗版

上架指导 通信技术
ISBN 978-7-111-42053-8
策划编辑◎李馨馨 / 封面设计◎子时文化 ZiShi Culture

ISBN 978-7-111-42053-8
9 787111 420538 >
定价：49.80元

通信新读——从原理到应用

陈小锋　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是一本尝试融会贯通介绍通信相关基本原理及应用的书。在内容安排上，首先介绍通信要处理的基本对象——信号，涉及信号的表示与分析（频谱分析、采样定理等）；接着介绍如何用信号来表示消息，如何无误地传输信号来达到消息的传递（模拟信号通信、数字信号通信、理想系统的通信能力等）；再介绍非理想系统的通信，如何对付非理想因素以及非理想系统的传输能力（香农容量公式、编码原理及应用等）；进一步介绍更具体、更复杂的非理想系统——无线通信；了解都有哪些更复杂的非理想因素（无线信道特征），以及衍生出来的新技术（OFDM、MIMO 等）；最后以选讲 LTE 系统关键技术来结束，了解一下一个标准化的无线通信系统都要解决哪些问题，以及以什么样的形式将诸多内容在一个标准化的系统里体现出来，发挥其应用价值。

本书安排的每一部分内容都足以编写一本书单独讲解，文献里也有每部分单独对应的教材，因此本书并不会面面俱到，而是会选择各部分相对重要、能相互衔接呼应，以及在实际系统设计和技术研究中真正发挥着基础作用的那些技术理论。最重要的是，还会以独特的风格和形式来尽最大努力讲清楚通信，这么多理论技术到底是什么、为什么，以及怎么用。

本书可作为高等院校相关专业（通信/电子/信息科学）师生的参考书，也适合打算进入通信领域的非相关专业读者，以及正在从事通信理论研究和实际系统设计的通信行业研发人员阅读。

图书在版编目（CIP）数据

通信新读：从原理到应用/陈小锋编著．—北京：机械工业出版社，2013．4
ISBN 978-7-111-42053-8

Ⅰ．①通…　Ⅱ．①陈…　Ⅲ．①通信理论　Ⅳ．①TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 068810 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：李馨馨
责任编辑：李馨馨
责任印制：杨　曦
北京中兴印刷有限公司印刷
2013 年 6 月第 1 版·第 1 次印刷
184mm×260mm·19 印张·470 千字
0 001—3 500 册
标准书号：ISBN 978-7-111-42053-8
定价：49.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务　网络服务
社服务中心：(010)88361066　教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：(010)68326294　机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：(010)88379649　机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010)88379203　封面无防伪标均为盗版

前　　言

通信技术的发展拉近了人与人之间的距离，方便了人们的沟通与生活。同时，通信技术的发展创造了大量的就业机会，学校里通信相关专业成了热门，各通信相关企业也大量地网罗这方面人才。通信行业的重要性以及持续发展想必不需多说。

通信涉及的技术面很广，要深入掌握还是有很大难度的。比如，为了满足人们不断增长/变化的需求，通信经历了从模拟通信到数字通信，从有线通信到无线通信，从以语音为主的通信到以数据为主的通信，从移动宽带化到宽带移动化等转变与融合。在这些转变与融合的过程中，除了该学科最核心的理论基础（比如，信号处理基础、信息论基础等）仍然发挥着指导作用以外，也产生了大量新技术和应用（比如，Turbo 码、OFDM、MIMO 等）。同时，参与到这个行业的企业以及从业人员数量也很庞大，竞争相当激烈。不管从哪个方面，为了能更好地参与到这个瞬息万变和激烈竞争的行业中，我们需要真正融会贯通所涉及的各领域最基本的理论基础与技术应用。本书正是为了这个目的而做的一次尝试，希望能给在通信领域学习工作的朋友提供一些参考。

本书共分为五大部分。第一部分主要讲解信号的表示与分析，包括傅里叶变换系列、采样定理等基础知识。这部分在作者看来是基础中的基础，也花了相对多的篇幅来呈现，不把这部分基础打牢，谈其他方面都是空中楼阁。第二部分主要介绍如何用信号来表示消息，如何无误地传输信号来达到消息的传递，包括模拟信号通信基础、理想数字信号系统的极限传输能力、调制解调基本考虑，以及最基本的信号检测判决方法等内容。第三部分介绍了信息论基础，包括信道容量、编码原理及应用等基础知识。第四部分偏重介绍无线通信系统，主要内容包括无线信道特征、OFDM 和 MIMO 等关键技术。作者认为，人们对无线通信的研究，很好地体现了追求理论突破和实用精神的完美结合，值得认真去体会其中处理问题的各种智慧，所以这部分也用了相对多的篇幅来分享。第五部分，主要选讲 LTE 系统关键技术，使读者朋友了解一下一个标准化的无线通信系统都要解决哪些问题，以及前面这么多的内容在一个标准化的系统里以什么样的形式体现出来，发挥它们的应用价值。这部分对于打算了解 LTE 系统设计、学习 LTE 标准协议的朋友，是一个不错的导读材料。除了这五大部分外，本书还包括通信系统概论和附录。特别是附录 A 和附录 B，分别选讲了线性空间和概率基础知识。虽然和通信不直接相关，但作者非常诚恳地强调其重要性。通信必须依赖数学作为支撑；要想真正独立地做些研究设计，这个必须放在重要位置。前面五部分的内容里，也用到数学知识，并且作者尽力把基本原理用附录 A 和 B 里的数学知识来讲解清楚，而不要牵扯太多数学进来。作者认为依赖太分散的数学体系会加大难度，不利于前后联系思考问题。希望读者朋友在理解前五部分内容遇到数学方面的困难时，附录能第一时间帮上忙。

全书的内容安排，总体来说是按照通信理论发展的由浅入深、由处理简单问题到处理复杂问题展开。整个介绍思路，也总是往返在“理想条件”与“现实条件”，“基本原理”与“基本应用”之间，请读者朋友阅读理解过程中，也多多从这些方面去“纠缠”，形成深入而灵活的理解。

最后一点需要指出的是，其实作者最开始的想法，仅仅是给大家分享自己对通信基础积累

的一些认识。最开始采取的形式是在论坛和个人博客上写一些东西，其中主要是在“通信人家园”论坛连载基础知识讲解，在那里也得到一些读者朋友的反馈与支持。后来慢慢地，有读者朋友建议出版一本相关方面的书，作者才开始更系统地梳理整个通信领域涉及的基本原理与技术，也开始慢慢形成这本书的轮廓，希望这本书不会让读者朋友太失望。在这里首先要感谢通信人家园支持我的朋友和管理员，正因为大家的支持与鼓励才有了我完成本书的动力。感谢陈永川教授、Christian Reidys 教授、杨汉生教授、陈晓军等所有多年来在我的学习工作中给予指导和帮助的老师、同事和亲戚朋友们。最后，我要感谢我的父母和家人，是父母的养育和辛勤劳动付出，才支撑了我的学习生涯，使我能学到一点东西可以分享给大家；是妻子的支持和承担几乎所有的家务，才使我能抽出时间专注于本书的写作；还要感谢我家宝宝桐桐，给我带来了欢乐，同时我也为很少陪她玩而感到内疚，写作占用了几乎所有的业余时间。

由于作者水平有限，书中难免对诸多方面考虑不周，敬请广大读者朋友和同行专家批评指正，多提宝贵意见和建议。

作　者

本书中的文字符号及其说明

$\mathbb{R}$	实数或实数域
$\mathbb{R}^+$	大于等于 0 的实数
$\mathbb{C}$	复数或复数域
x^*	x 的共轭
$\mathrm{Real}\{x\}$	x 的实部
$\mathrm{Imag}\{x\}$	x 的虚部
$\mathrm{Rect}(t)$	单位方波信号
$\int$	积分区间为被积函数自变量定义的区间
$\int_{-}^{+}$	$\int_{-\infty}^{+\infty}$ 的简写
$\otimes$	循环卷积
$m \bmod n$	m 除 n 的余数
$\mathcal{N}(u,\sigma^2)$	均值为 u,方差为 σ^2 的高斯变量
$\mathcal{CN}(0,\sigma^2)$	方差为 σ^2 的循环对称复高斯变量
$\mathrm{prob}\{x\}$	x 发生的概率
$\mathrm{E}\{x\}$、$\mathrm{E}[x]$	随机变量 x 的均值
$\mathrm{Var}\{x\}$	随机变量 x 的方差
$\mathrm{E}_x\{f(x)\}$	大括号内的数为随机变量 x 的函数,遍历 x 求 $f(x)$ 的均值
DFT	离散傅里叶变换
IDFT	离散傅里叶逆变换
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	向量或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	向量或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置
$\boldsymbol{A}^*$	向量或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中每个元素取共轭
$\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{A}\}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
$\mathrm{RANK}\{\boldsymbol{A}\}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
SNR	信噪比
BER	误比特率
$<x,y>$	x 与 y 的内积运算
$\lvert x\rvert$	向量 x 的模,$\lvert x\rvert = \sqrt{<x,y>}$
$\mathrm{P}\{x\}$、$\mathrm{P}(x)$	信号 x 的功率

目　　录

第一部分　信号表示与分析

第二部分 基本通信原理

第三部分 信息论基础

第五部分　LTE 关键技术选讲

第 0 章　通信系统概论

本章对通信系统的全貌做一个简单的整体介绍，侧重于无线通信系统，主要使大家对如下方面有个基本了解：

- 一个通信系统包括哪些模块或者流程。
- 这些模块或者流程涉及哪些通信相关的关键原理与技术，这些原理与技术在本书接下来的内容里是如何安排的。
- 如何评价一个通信系统。
- 无线通信系统的发展演进过程以及现状简介。

在介绍过程中，我们对提到的概念或术语暂时不做过多解释，读者朋友们可以先不用深究，仅先获得一个整体轮廓认识即可，接下来的内容会有分别对应的详细介绍，到时再逐一仔细琢磨。

0.1　先说点对点通信

0.1.1　通信最简单模型

什么是点对点通信？先看一个例子。小龙到餐馆，对服务员甲用汉语说："给我一个鸡蛋"，或者用英语说："give me an egg"。这就是一个简单的点对点通信系统。该系统主要涉及四个对象：发射端、接收端、信号和信道。其主要流程如图 0-1 所示。

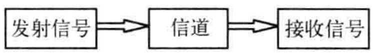


图 0-1　点对点通信最简单模型

点对点通信是最简单的通信系统，也可以称之为链路级通信，任何更复杂的通信总是可以分解成点对点通信的整合。其中，发射端和接收端是相对直观的概念，不需要多说；信号和信道是主要需要研究和介绍的。简单来说，"信号"是承载"消息"的载体，这里"信道"是信号从发射端到接收端的一切媒介（甚至过程）的总称。

具体到上面的例子，发射端可以认为是小龙，接收端是餐馆服务员甲，信号对应于汉语"给我一个鸡蛋"或者英语"give me an egg"的声音，信道是小龙与服务员甲周围的空间环境。不管声音对应的是汉语"给我一个鸡蛋"或者英语"give me an egg"，表达的意思按我们的理解是一样的。这里所谓"表达的意思"就是要传递的"消息"，从而大家应该也能体会到一些"消息"与"信号"的相对区别。

另一方面，既然说这是一个简单的通信系统，就应该有一个"系统"的概念。那么，归结来看，这个模型引导我们要好好研究"信号与系统"这个通信相关专业最先接触的一门基础课程。它主要研究信号的分析表示方法，信号的特征以及满足一些基本特性的系统。这也是本

书第一部分“信号表示与分析”对应的内容。

0.1.2 基于最简单模型的发展

接下来,我们基于最简单模型逐步细化延伸,并相应说明每一个细化或延伸涉及哪些关键原理与技术。

1. 模拟信号通信

首先细化如何得到发射信号,以及相应需要对接收信号做哪些处理。从这个角度考虑,第一个方式就是模拟通信系统,其主要流程如图0-2所示。从该模型开展研究,可以归结出如下待讨论问题:

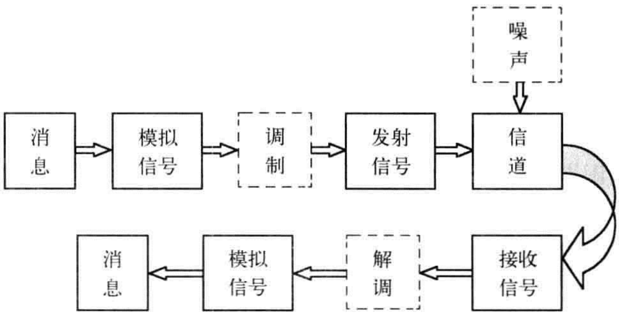


图0-2 模拟通信系统主要流程

- 如何从消息得到模拟信号。
- 什么是调制? 为什么要调制? 如何把模拟信号调制成发射信号? 各种调制方式的抗噪声性能如何。
- 接收端需要对接收信号做哪些处理来还原模拟信号,从而来获知消息。

这些内容将在本书第二部分“基本通信原理”里介绍。

2. 数字信号通信

相对于上一节模拟通信系统的第二个方式就是数字信号系统,简单流程如图0-3所示。主要涉及的关键原理与技术如下:

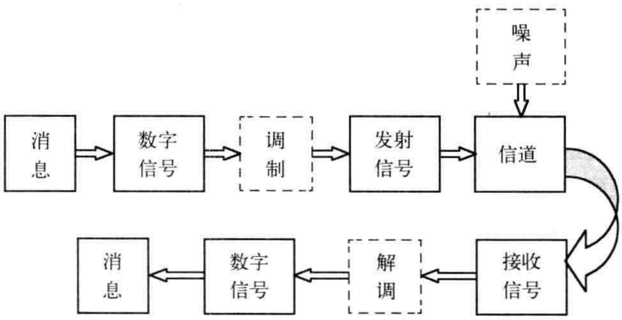


图0-3 数字通信系统主要流程

- 如何从消息得到数字信号。
- 数字信号的调制与模拟信号调制有什么不同。
- 数字信号系统里怎么保证信号的无误传输。

这部分内容也将在第二部分“基本通信原理”里介绍。

接下来是对图 0-3 所示数字系统的进一步细化，也是体现数字信号系统相对于模拟信号系统优势的地方，即主要流程图 0-4 中虚线框里数字信号处理部分。主要涉及的关键原理与技术如下：

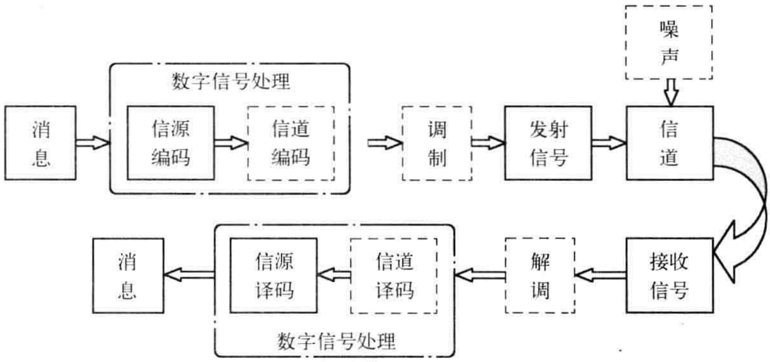


图 0-4　数字信号处理细化

- 在有噪声污染情况下如何区分信号？能区分多少个信号。
- 信源编码与信道编码的原理和作用。
- 有哪些具体信道编码方式。

这部分的内容将在本书第三部分“信息论基础”里介绍。

3. 无线信道与多天线技术

上面两节在最简单模型之上细化了信道两边的部分，现在轮到讨论信道本身以及相关方面。这里主要引入无线信道的讨论，整个系统如图 0-5 所示。

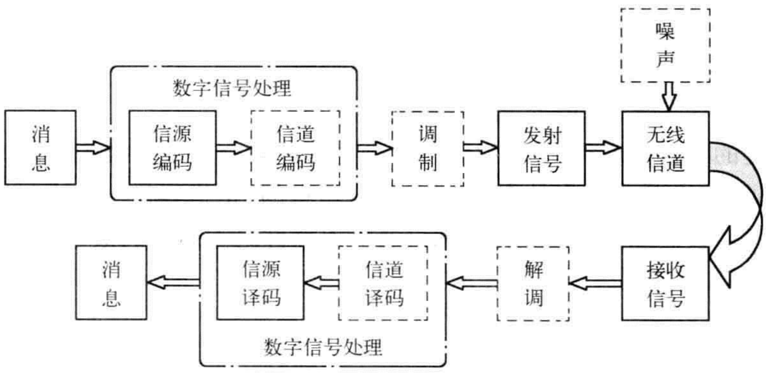


图 0-5　无线信道及系统流程

无线信道最基本的特征是会对信号产生多径衰落，而为对付衰落，近年来最重要的一个技

术就是多天线技术了,如图 0-6 所示,这个有必要专门好好讨论。

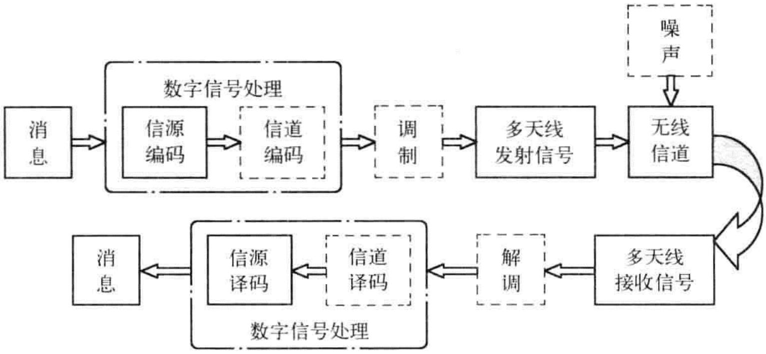


图 0-6 多天线处理及系统流程

这部分相关内容,包括无线信道特征、无线信道下的通信模型,多天线技术原理与应用等,都将在第四部分"无线通信原理"里详细介绍。

0.1.3 如何给通信系统打分

随着上一节基于最简单模型的一步步细化和延伸,衍生出那么多的技术,并不是想当然地无中生有,而是为了更好地完成通信。那么,什么叫更好地完成通信,或者说怎么评价一个通信系统的好坏,都有哪些指标呢? 概括来说,主要是通信的速率和通信的质量,归结为一个字就是"效率"。

还是先举一个例子,小龙猛龙过江刚到美国,坐了十几个小时飞机饿坏了,到餐馆一分钟内对服务员甲语速飞快地说:"给我一个鸡蛋,一杯牛奶,再切三斤牛肉,@ #$%……"。看起来,短时间内小龙向服务员甲传递了大量的信息,我们说通信的速率很高;但是因为内容太多、说得太快,服务员甲并没有听清楚多少内容,也即这次通信的质量很差,小龙可能换回来的是一句"Excuse me?"。反过来,小龙在三分钟内对服务员甲相对慢速地交代同样的事情,服务员甲可以清楚地明白所有的内容,即通信的质量很好,换回来的就是一句"My pleasure, Sir",但显然通信花了更多的时间,通信的速率降低了。

从上面的举例讨论,我们可以看到具体研究可以从如下两个方面入手:

- 在通信速率一定的情况下,尽力提高通信的质量。
- 在通信质量一定的情况下,尽力提高通信的速率。

同时,在给定的各种信道条件下,我们还将研究两者联合起来的极限情况,即达到无误通信(最高质量的通信)的最高速率是多少,这也就是所谓的"信道容量",香农(Shannon)理论最核心的部分。并且,我们把实际能支持的无误通信速率称之为通信的效率,请注意纯粹的"速率"和"效率"之间的差别。

0.2 再论网络级通信

网络级通信是一点与多点之间的通信或者多点与多点之间通信的总称。比如,某个电信运营商,如中国移动,要服务北京所有的移动用户,那么需要先把北京整个区域划分成若干个

小区域,每个小区域会有一个基站来服务于该小区域内的所有中国移动用户。也就是说,每个小区域内的移动用户要给其他人打电话,发短信等都需要和基站通信,然后再通过基站后端的有线网络(核心网)才有可能和其他人建立联系。

显然一个小区域内不可能只有你一个用户,中国移动也不会为你配置一个专用的基站,那么仅从每个小区域来看,已经是一个网络级通信了,更不用说从整个北京来看。网络级通信需要考虑的问题和角度与点对点通信不一样,我们也说过网络级通信单从信号传输来看,可以分解成多条点对点通信,比如可以单看基站和用户甲手机的通信,单看基站和用户乙手机的通信等,而所有关于信号传输的讨论分析基本都在点对点通信情形完成。

网络级通信更多地从系统地宏观地角度来考虑问题。比如,有很多用户都想打电话,那么这些用户将按照什么样的方式来和基站通信呢?是按多个用户循环轮流的方式来和基站通信呢,还是多个用户随机竞争的方式来和基站通信呢,或者其他通信方式呢?这就是通信领域讲的多用户复用多址方式。又比如,同一个小区内,有的用户离基站很近,有的用户离基站很远。要知道移动通信采用的是电磁信号,随着传播距离和建筑物阻挡是有衰减的。通常,离基站近的用户与基站之间的点对点通信效率比离基站远的用户与基站之间点对点通信效率更高;室外用户能支持的效率比室内用户能支持的效率更高。那就是说,如果站在基站的立场,收益最大的方式是把所有通信资源都分配用于和效率更高的用户通信,比如离基站近的用户或者室外用户;但如果站在用户侧的角度,两个用户的通信资费可能是一样的,凭什么离得远的就要吃亏一些,得到的服务质量要差些,人家用三分钟可以下载一部高清电影,而我需要三个小时?那么,这里就需要整体考虑网络的效率和用户公平性。

又比如,北京这么大,到底需要划分出多少个小区域呢?显然,划分的小区域越少,需要建设布放的基站就越少,成本相对越低。但是,这要求每个基站管辖的范围越大,服务的用户越多。那么,如何能保证每个基站的范围足够大,服务的用户足够多呢?

又比如,移动通信当然要支持移动。例如,边走路边打电话、在车上打电话等。假设你打电话的时间足够长,或者车速足够快,你通话的过程中,从一个小区域跨入另一个小区域,也就是到了另一个基站的服务区。你的手机需要和新小区的基站建立通信,当然你不希望因为你的手机需要换基站服务而导致正在进行的通话断掉,如何做到这种效果呢?

除了上面列举的这些需要考虑的问题,网络级通信考虑的因素还包括整个系统架构、业务延迟、小区间干扰等多方面的问题,这里不一一阐述。对于上面提到的这些内容,本书不会所有的都详细介绍,本书的主线还是集中在点对点通信的关键原理和技术上,大家可以自行找资料了解。

0.3　聚焦无线通信系统发展

本书最后偏向于落地到无线通信上面,本节简单介绍一下无线通信的发展及现状。首先什么叫无线通信?从广义来讲,任何不以看得见摸得着的物质为介质的通信行为都叫无线通信。比如,两个人遥相喊话,通过声音通信;又比如,点燃万里长城的一个个烽火台,用狼烟传递敌情消息。而现代无线通信主要指以电磁波来承载消息,收发两端无线缆连接的通信。

故事的开始要从法拉第发现电磁感应开始。那是1831年10月的一天,法拉第一如既往

地在实验室里研究用磁场产生电的实验。一个偶然的动作改写了历史，法拉第在一次准备休息时，顺手将长条磁铁往线圈里一扔，突然电流指针转动了一下；法拉第反复了几次验证，都能使电流指针转动。奇迹出现啦，能够确信磁场能够产生电流了。

接下来的两位重要人物就是麦克斯韦和赫兹，其中麦克斯韦揭示了电磁场运动规律的方程，即著名的麦克斯韦方程组，并预言了电磁波的存在；而赫兹的重要贡献，则是在麦克斯韦的理论基础上，在实验室实实在在地证明了电磁波的存在。

电磁波的存在，让敏感的科学家和发明家们意识到或许可以利用电磁波来进行通信，而实践这一革命性思想的先行者们包括莫尔斯、贝尔和马克尼。莫尔斯发明了著名的莫尔斯电报码，通过用电磁波来表示和传递一些点划的组合，来传递一定的消息。贝尔是被公认的电话之父，在 1876 年实现通过电话线传递语音的电话机，并且以贝尔名字命名的贝尔实验室为通信的发展作出了莫大的贡献。而在 1897 年，马克尼用电磁波实现了远距离通信，通信发生在一个固定站和一艘拖船之间，距离为 18 海里，进一步为电磁通信的应用做好了铺垫。

现代无线通信比较系统地规模化发展，可以从 20 世纪 60 年代开始说起。在 60 年代，美国就推出了改进型移动电话系统（1MTS），采用大区制，采用的电磁波频段为 450 兆赫（MHz）。所谓大区制就是指一个基站（移动控制台）覆盖的范围超大，比如整个北京就一个基站。而在 70 年代，贝尔实验室提出了蜂窝系统，即把一个大区域划分成小得多的多个小区域，相对于大区制能大大提高系统容量，并一直沿用至今。到 80 年代中期，一些国家和地区都建立了基于蜂窝的通信系统，也即被大家划分为第一代通信的通信系统，该通信系统采用的是模拟通信。大家在 80 年代的电影中都能看到那个年代象征地位与时尚的这种通信划时代产品，比如大哥大。那个时候，由于硬件的发展限制，通信终端的体积都很大，大哥大都不是大哥自己拿的，打完电话，身边有小弟在一旁侍候。听一些通信界的前辈讲，那个时候在运营商工作，需要搞网络测试等工作，干完活，一个小伙子挎好几个大哥大去小餐馆吃饭，餐馆的人都用异样的眼神打量着小伙子，这是什么样的画面啊！

从 80 年代后期开始，数字通信如日中天地发展起来，先后是第二代（2G）、第三代（3G）、第四代（4G）、甚至第五代（5G）移动通信系统。这些不同代系统的划分，主要是基于采用的空口接入技术和能支持的系统容量。2G 通信系统主要是指 GSM 系统，这是一个非常成功的商用通信系统，即使在 3G，甚至 4G 已经开始商用的今天，既使你的手机既能支持 2G 又能支持 3G，以 GSM 系统为基础的系统（包括 GPRS、EDGE 等）仍然是主流的通信系统。GSM 系统里，蜂窝网络各个小区采用频分复用以减轻小区间干扰，即相邻小区可以采用不同的频段（或者说信道）通信，而同一频段可以在距离稍远的另一个小区重复使用，到底这个距离能间隔多远，这个取决于你有多少频段了，也即所谓的复用因子。频段越多，显然采用同一频段的两个小区可以隔得更远，从而相互干扰较小；频段越少，反之。图 0-7 示意了一个 GSM 蜂窝网，每个六边形就是一个小区，其中共有 7 个不同的可用频段，可以看到任何一个小区使用的频段和周围小区都不同。说到这儿，问一个有趣的问题：最少需要有多少个频段才能使得任何两个相邻的小区可以分配不同频段呢？答案应该是最少需要四个，这就是著名的四色定理，为某个小区分配一个频段，就相当于给那个小区染个颜色。虽然四色定理至今没有完全从理论上证明，但所有相关研究工作来看，应该是正确的。

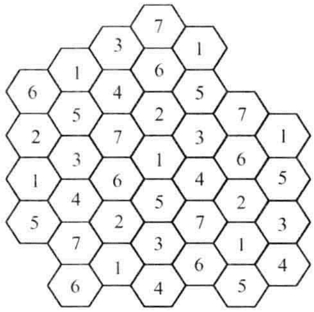


图 0-7 蜂窝网络频率复用

GSM 系统各小区里上行通信(用户传数据给基站)和下行通行(基站传数据给用户)采用不同的频段,即频分双工(Frequence Division Duplex, FDD)。各小区内部的所有上行通信和下行通信分别采用相同的频段,各个用户之间采用时分复用的方式来区分,即一段时间基站与用户甲通信,一段时间基站与用户乙通信,时间上相互错开,如图 0-8 所示。GSM 系统由于支持的传输速率相对较低,目前也就主要支持打语音电话和发短信了。

图 0-8 用户间时分复用

接下来在 20 世纪 90 年代中后期,3G 通信系统开始发展,3G 通信系统主要指以 CDMA 技术为基础的通信系统,包括 WCDMA、CDMA2000 和 TD-SCDMA。其中,TD-SCDMA 是我国具有自主知识产权的系统,其特点除了以 CDMA 为基础外,上行通信和下行通信还使用同一频段,但通过时分方式区分开,即一段时间用于上行通信,一段时间用于下行通信,时间上相互错开,这种上下行隔离方式被称为时分双工(Time Division Duplex,TDD)。时分双工相对于频分双工的好处是,不总是需要成对的频段,这在频谱日益稀缺的今天很有意义。如果说 1G、2G、4G 这些字眼大家还不怎么熟悉的话,“3G”这个概念在国内应该是家喻户晓。国内三大运营商这两年都分别建设了 3G 网络,宣传广告也是铺天盖地而来,其中移动的网络是 TD-SCDMA,联通的网络是 WCDMA,电信的网络是 CDMA2000。相对于 2G 系统,3G 能提供的系统容量更大,除了传统的打语音电话外,还能提供一些新业务,比如视频电话、用手机上网等。

当然,3G 系统里,多用户之间的复用多址就是 CDMA,即给每一用户分配一个唯一的码序列(扩频码),并用它对承载消息的信号进行编码。因为不同用户分配的码序列相关性很小(甚至正交),知道用户码序列的接收机就可以对收到的信号拿码序列进行解码,并恢复出用户原始数据。如图 0-9 所示的例子,用户 1 用的码是[1,1,1,1],用户 2 用的码是[1,-1,1,-1],用户 3 用的码是[-1,1,1,-1]。发射端把 3 个用户的信号 x_1,x_2,x_3 分别携带在对应的码上,然后一起发出去,则发出去的信号为

$$\boldsymbol{s}=x_1[1,1,1,1]+x_2[1,-1,1,-1]+x_3[-1,1,1,-1]$$

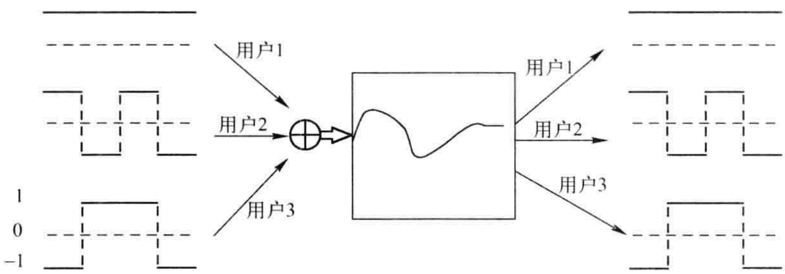


图 0-9 用户间码分复用

三个用户都会接收到信号 $\boldsymbol{s}$,但用户 1 用分配给他的码序列和信号做相关为

$$\boldsymbol{s} \times [1,1,1,1]^{\mathrm{T}} = 4x_1 + 0 + 0$$

从而用户 1 可得到给他的信号 x_1是多少,其他用户类似。

由于码序列的带宽远大于所承载消息的信号带宽,用码序列编码过程扩展了信号的频谱,所以 CDMA 也称为扩频调制,其所产生的信号也称为扩频信号。

不得不说这个世界变化快,3G 的实际布网商用还没多久,已经发现开始难以满足人们的新需求了,特别是对系统容量这个方面,比如高清视频业务等,新一代系统的发展又开始了。这就是所谓 4G 通信系统,目前来看主要包括 LTE,也有人把 LTE 称为 3.9G 系统,这个都无所谓。LTE 系统的标准制定大概从 2004 年开始,并且 LTE 一开始就同时支持 FDD 和 TDD 两种双工方式,2008 年第一个版本完成发布。LTE 在空口技术和网络架构上面都做了很多创新,能提供高达百兆的峰值速率,更好的用户体验。其中,在空口技术上,采用 OFDMA,引入多天线技术;在网络架构上,采用扁平化的网络思想。同样,具体什么是 OFDMA、多天线技术,以及 LTE 系统的主要关键技术将在本书第五部分介绍。

总之,无线(移动)通信是一个发展非常活跃的领域,极大地丰富甚至改变了人们的生活。

第一部分

信号表示与分析

本书第一部分首先重点介绍通信系统要处理的最基本对象——信号。什么是信号？我们可以从哪些维度去认识和研究信号？信号有哪些特征需要描述，同一个特征从不同维度去认识有什么联系？基于这些认识，我们能实现哪些应用？这些最基本的问题，我们会给出答案。

其次，我们将简单介绍系统的概念。信号在穿梭于不同系统时，会被怎样改变，如何描述这些改变，即如何描述系统的作用效果？要达到无误通信，我们需要什么样的系统？

可能本部分内容有些读者会觉得太"数学"了，不那么"通信"。但不得不强调，要真正深刻体会这些基础知识，借助数学是非常必要的。本部分用到的主要数学基础知识，在本书附录A、B里有介绍。作者建议，如果还没有体会到其中通信的味道来，就暂时结合附录把它当"数学"来学吧。

第1章　什么是信号

1.1　到时别忘了给个信号

我们日常说“当发生什么事时,给个信号”是什么意思？大家应该都知道是通过某种行为或者手段来传达双方预先约定的某个意思。简单来说,就是把很多消息或者可能出现的事件先对应到更简单的动作(或者符号),当其中某个消息或者事件发生时,发射方把该消息或事件对应的符号或者动作传递出去,接收方在收到符号或者动作后,再根据预先约定的意思从而知道哪些事情发生了,这就是通信。

举个例子:考试作弊时,两个学生事先约定摸耳朵表示答案是C,摸鼻子表示答案选B等;当然你若听过“烽火戏诸侯”的故事,也就知道古代靠点燃烽火产生狼烟来向周边传递是否有外敌入侵这个信号,这些就是通过约定的动作或事件来传递信息。

上面讲的是一般意义上的通信思想。接下来,我们主要集中讨论利用电磁手段的通信。例如,电视、电报、有线/无线电话、上网等。在电磁通信领域里,所有要传递的信息都将被表示成电磁信号。比如,打电话就是先把声音声压转换成电压电流传递,接收端再将电压电流还原成声音,我们先不研究怎么把声音转变成电压电流,只考虑电压电流信号本身的一些性质。也就是说,先不考虑电磁信号具体表示或承载的是什么消息内容,而只研究电磁信号本身的特性。

显然,如果把电磁信号持续的时间作为自变量,把每个时刻的电压(电流)作为因变量,则任何电磁信号在数学上都可以表示为一个函数。既然电磁信号已经有数学模型了,那么后面的研究分析当然要用到数学,关键是怎么用好数学知识,我们一起来探索吧!

1.2　信号的能耗度量

既然电磁信号要消耗电磁能,再通俗点就是耗电,所以应该定义信号的能量或者功率来反映不同信号消耗的能量(耗电情况)的差异。另一方面,在所有电磁通信系统设计和系统性能分析过程中,发射信号或接收信号的能量或者功率都是最重要的因素之一。一般来说,发射信号的功率越大,接收到的信号功率也就越大,从而抗干扰和噪声的能力越强,就越容易正确地传递消息。就好比人说话,嗓门越大(如咆哮派),既使周围还有其他人在说话,照样能被人听得清清楚楚。但为响应节能减排,奉行低碳生活理念,如果可行,尽量在保证质量的同时,还是采用能量或功率小的信号进行通信吧。下面我们就做一些基本介绍。

前面已经讲过,电磁信号在数学上,就是一个函数,后续讲解过程中,若无特别说明,信号和函数两个概念是等同的。记一个信号为

$$f(t),t_0<t<t_1$$

其中函数值取值默认在复数域$\mathbb{C}$上，如果有时只在函数值取值为实数$\mathbb{R}$的情况下讨论，会特别说明或称信号为实信号以指代这种情况。

定义1-1（信号能量） 若如下积分

$$E[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{1-1}$$

存在且有限，则称其为信号的能量。

能量的单位为焦耳(J)。对于能量有限的信号，一般称为能量信号。若上述积分不存在或无限，我们则定义信号平均功率来刻画其能耗。

定义1-2（信号功率） 若

$$P[f(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \mathrm{d}t}{T} \tag{1-2}$$

存在且有限，则称其为信号$f(t)$的功率。

对于功率有限的信号，一般称为功率信号。功率的单位有瓦(W)、毫瓦(mW)等，1W = 1000mW。在通信领域，大家也经常会看到功率的另一个单位dBm，这个是什么单位呢？它既不是瓦，也不是毫瓦，它实际上是一个对数比值。x(mW)的功率换算成dBm为

$$10\times\lg\frac{x}{1}(\mathrm{dBm})$$

例如，1W的功率对应$10\times\lg\frac{10^3}{1}=30\mathrm{dBm}$。

按照式(1-2)的信号功率定义，如果一个信号是能量有限的信号，因为功率表达式分母趋于无穷大，那么其信号功率必然为0。但是，如此定义的信号功率只是信号平均功率的一种特殊情况，即在$(-\infty,\infty)$上做平均。而实际上平均功率之所以称为平均，必然可以任意定义其平均的范围。也就是说，不一定总是看$(-\infty,+\infty)$这个区间上的平均功率，可以根据需要，看一个更小区间上的平均功率，比如信号持续的有效时间。这种情况下，能量和平均功率可以都是有限的（且不为0）。当然，如果一个信号的能量和功率都存在，都可以用来刻画其能耗，看具体情况用哪一个方便。

1.3 信号的简单表示——冲激分解

我们知道，生物学家解剖青蛙是为了做研究，物理学家从原子中分解出质子、中子、电子，也是为了做研究，化学家会将化学元素相互混合，还是为了做研究。原来分解与组合是做研究最基本的思想，研究信号也是一样。记一个信号为$f(t)$，那么能否把这个信号分解成更简单的信号组合呢？

最自然地，一个持续区间比较长的信号，总是可以看成是由很多区间比较短的信号一截一截地拼起来的。信号划分的区间越多，每个小区间持续的时间就越短，如图1-1所示。

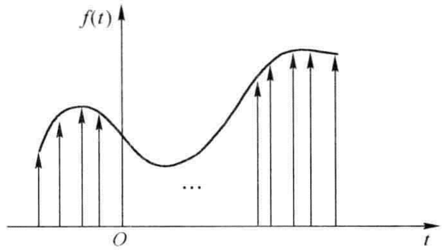


图 1-1　信号 $f(t)$ 被分解成持续时间趋于一点的信号构成

图 1-1 中，$f(t)$ 可以看成一系列持续区间非常短，几乎趋于一点的信号构成，而这样的不同小区间所示的信号都可以看成某个公共信号仅因为幅度不同伸缩而成的信号。那么，这个公共信号是什么呢？首先，定义这类通常被称为冲激信号(Dirac delta function)的特殊信号。

定义 1-3(冲激信号)　满足如下几个条件的信号 $\delta(t)$，被称为冲激信号

$$\begin{cases}\delta(0)=\infty, & t=0\\ \delta(t)=\delta(-t)=0, & t\neq 0\\ \int_{-}^{+}\delta(t)\,\mathrm{d}t=\int_{+}^{-}\delta(t)\,\mathrm{d}(-t)=\int_{-}^{+}\delta(-t)\,\mathrm{d}t=k\end{cases}$$

也许冲激信号看起来很奇怪，和一般的函数定义不一样，但我们先不严格地去探究该信号 $\delta(t)$ 的数学意义(可能用到测度论等)，有兴趣的读者自己去查阅相关资料。

冲激信号定义中的 k 称为冲激强度。对于 $k=1$ 时的冲激信号，称之为单位冲激信号。后续为了记号简便，本书规定 $\delta(t-t_0)$ 仅表示在 $t=t_0$ 时刻的单位冲激信号，非单位冲激信号(冲激强度为 k)均表示成 $k\delta(t-t_0)$ 的形式。

下面看看任何信号表示成单位冲激信号的严格形式是怎样的。

性质 1-1(信号的冲激表示)　任何信号 $f(t)$ 可以表示成不同时刻的冲激信号的无穷和(积分)

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(\tau-t)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1-3}$$

可以看到，任何信号 $f(t)$ 都可以写成 $f(t)$ 与冲激信号 $\delta(t)$ 的卷积形式(卷积及推导见附录 C)，而这只是任何信号一个比较自然直观的分解形式。当然，你还可以发挥想象把信号分解成其他简单信号的合成，只要这样分解有意义，能够带来某些好处即可。例如，后面我们将会看到的分解成 $\mathrm{sinc}(t)$ 信号、指数信号 $\mathrm{e}^{j\omega t}$ 等。如果你的分解形式不能带来任何好处，那就只是你自己的思考理解过程，最多就相当于一个习题；如果你的分解形式能带来很大的好处，并且别人从来没有发现过，那这就将成为知识，成为定理流传下去。

这就是研究，这大概就是人类知识的形成过程。先要有最基本的思想，比如这里的把复杂的东西分解成简单东西的思想；接下来就是基本思想的具体体现了，这里就是具体怎么分解了，可能某些人一下子在某种背景下，某种需求下，找到了一个特有用的基本思想的具体体现形式，那么这个具体形式就成了基本定理。后续可能有很多人沿着这条路深入下去，就形成了这条路的知识体系。你会发现，知识的形成是有选择性的，那么多条路，最后留下来的只是几个特别的分支，不排除当初选择其他分支，可能人类的知识体系会发展得更先进、更深刻。同

时，对于那些发现某条路并得到承认的人除了天分和努力，也多多少少需要一些运气的。

下面，我们把式(1-3)所定义的信号的冲激表示做一个简单的应用，看看能得到什么结果。

性质 1-2(冲激信号能量)　单位冲激信号的能量满足

$$\int \delta^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \delta(0) = \infty \tag{1-4}$$

证明：利用式(1-3)，特别地，我们看看取 $f(t)=\delta(t)$ 时有什么结果

$$\delta(0) = \int \delta(\tau)\delta(\tau-0)\,\mathrm{d}\tau = \int \delta^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \infty$$

由此得证。

从该结论中，我们可以看到冲激信号的能量为无穷大，并且等于 $\delta(0)$，很好奇这个无穷大到底有多大呢？人有三教九流，无穷大也该有个高低先后。话说康托的集合论有很大的篇幅就是研究如何把无穷大也像自然数 1,2,3,…那样，大小关系定义得清清楚楚。比如，所有自然数组成的集合{1,2,3,…}中的元素个数为无穷大，显然自然数集合的所有子集组成的集合中元素个数也为无穷大，它们一样大吗？回到我们的问题，冲激信号的能量对应的无穷大有多大？怎么刻画呢？那就再挖掘一下吧。

性质 1-3　冲激函数 $\delta(t)$ 在 $t=0$ 的取值 $\delta(0)$ 是与微分量的倒数等价的无穷大量，即

$$\delta(0) \sim \frac{1}{\mathrm{d}t} \tag{1-5}$$

提醒

说明一下，微分量可能在不同地方用不同的字母表示，但所有相互独立的变量对应的微分量是等价的；当然，如果两个变量不是独立的，而是满足某种关系，比如变量 ω 和变量 f 满足 $\omega=2\pi f$，那么显然 $\mathrm{d}\omega \neq \mathrm{d}f$，而是 $\mathrm{d}\omega = 2\pi\mathrm{d}f$。请把这点分清楚，不要迷糊。

上面几节内容所讲的信号能量、功率，以及相关运算等定义适用于确定信号。稍微扩展一点：一般我们讲函数都是指确定性的函数，即一个自变量对应的函数值一定是一个唯一确定的值。后续研究中可能涉及一些不确定性的东西，就是说有一个信号，但是这个信号具体是什么是不确定的，我们只知道它可能是很多个信号中的一个，并且每一个以一定的概率出现。那怎样来处理这类广义信号呢？更准确的数学描述，要从概率论和随机过程开始。这部分内容，我们放到本书附录 B 关于概率基础的内容里讲，有兴趣的读者，可直接转到那里继续。

第 2 章　信号表示论第一场

这部分会用到一些基础的线性空间相关知识，对于对线性空间有基本了解的读者，可以直接往下看；对于比较生疏的读者，建议先转到本书附录 A 里看看线性空间的基础知识讲解；当然也可以边往下看，边查阅附录 A。

线性空间里，讲了怎么把信号表示成一组基的线性组合。这其实就是表示论或者说变换的思想。看起来，都是同一问题的不同形式，但是其产生的影响并不能低估。例如，当初研究线性方程组时，把系数单独列出来形成矩阵，看起来矩阵并没有比线性方程组表示更多的东西，但是后来矩阵发展成为很大一个课题。所以，形式也是很重要的。一般来说，表示或者变换是一一对应关系的时候，可以把一个问题等价转化为另一个问题，即是同一问题的不同表示形式。而这等价表示形式当中，可能某种形式使得问题更方便、更容易求解，从而可以先在这种简单形式下，把解求出来，再通过唯一变换关系，还原到想要的形式。例如，$XY = Z$ 取对数可以等价变成 $\log X + \log Y = \log Z$，即把乘除法变式加减法求解，大多数时候更为简单。

这一思想在英语学习中也经常用到。举个例子，中国学生在解答英文试题的时候，通常会先在脑海中把英文题干转换为中文，然后再解决问题。这是因为，母语思维是最容易解决问题的形式。这和我们熟悉加减法，相对不熟悉乘除法，是一个道理。当然，虽然原理相通，但是还是建议大家学英语时，培养英语思维。

言归正传，下面我们继续研究信号的表示论，主要是几个非常重要的变换或者说表示形式，第一场先讨论傅里叶变换系列。

2.1　傅里叶级数——并非一鸣惊人的登场

2.1.1　发表论文不容易啊

傅里叶（Fourier）级数从最初的想法到最后被认识到重要性其实走过了一段曲折的历史。在 18 世纪中期，是否有用信号都能用复指数的线性组合来表示这个问题曾是激烈争论的主题。1753 年，伯努利曾声称一根弦的实际运动都可以用正弦振荡模的线性组合来表示，但他没有继续从数学上深入探求下去；在 1759 年拉格朗日表示不可能用三角级数来表示一个具有间断点的函数，因此三角级数的应用非常有限。正是在这种多少有些敌对和怀疑的处境下，傅里叶约于半个世纪后提出了他自己的想法。

傅里叶很早就开始并一生坚持不渝地从事热学研究，1807 年他在向法国科学院呈交一篇关于热传导问题的论文中宣布了任一函数都能够展开成三角函数的无穷级数。这篇论文经拉格朗日、拉普拉斯、勒让德等著名数学家审查，由于文中初始温度展开为三角级数的提法与拉格朗日关于三角级数的观点相矛盾，而遭拒绝。由于拉格朗日的强烈反对，傅里叶的论文从未公开露面过，可见即使是傅里叶，想发表论文也不是那么容易啊！为了使他的研究成果能让法

兰西研究院接受并发表，在经过了几次其他的尝试以后，傅里叶才把他的成果以另一种方式出现在“热的分析理论”这本书中。这本书出版于 1822 年，比他首次在法兰西研究院宣读他的研究成果时晚 15 年。这本书已成为数学史上一部经典性的文献，其中基本上包括了他的数学思想和数学成就。书中处理了各种边界条件下的热传导问题，以系统地运用三角级数和三角积分而著称，他的学生以后把它们称为傅里叶级数和傅里叶积分，这个名称一直沿用至今。傅里叶在书中断言：“任意”函数都可以展开成三角级数，他列举大量函数并运用图形来说明函数的这种级数表示的普遍性，但是没有给出明确的条件和完整的证明。当然，傅里叶的断言中“任意”二字太绝对了。实际上，1829 年狄里赫利给出了若干精确的条件，在符合这些条件的情况下，一个周期信号才可以用一个傅里叶级数表示。

傅里叶关于三角级数展开的重大发现虽然在他有生之年没有得到完全的承认，但是，却对数学这门学科的发展产生了深刻的影响，并在极为广泛的科学和工程领域内一直具有并仍然继续具有很大的价值。毕竟由此开创出“傅里叶分析”这一重要的数学分支，拓宽了传统函数概念的范围。1837 年狄利克雷正是研究了傅里叶级数理论之后才提出了现代数学中通用的函数定义，1854 年黎曼在讨论傅里叶级数的文章中第一次阐述了现代数学通用的积分定义。1861 年魏尔斯特拉斯运用三角级数构造出处处连续而处处不可微的特殊函数。也正是从傅里叶级数提出来的许多问题直接引导狄利克雷、黎曼，斯托克斯以及从海涅直至康托尔、勒贝格、里斯和费希等人在实变分析的各个方面获得了卓越的研究成果，并且导致一些重要数学分支，如泛函分析、集合论等的建立。傅里叶的工作对纯数学的发展也产生了如此深远的影响，这是傅里叶本人及其同时代人都难以预料到的，而且，这种影响至今还在发展之中。

2.1.2 周期信号的傅里叶级数

讲了傅里叶级数的故事，到底什么是傅里叶级数呢？相信大家都了解过，这里权当复习一下。绝大多数周期函数都可以表示成三角函数的无穷和形式。首先考虑较简单的函数值取值为实数的周期信号（实周期信号）$f(t)$，其一个正周期为 $T_1>0$，即 $f(t)=f(t+T_1)$。记对应线频率 $f_1=1/T_1$，角频率 $\omega_1=2\pi/T_1=2\pi f_1$。一般情况下，我们可以把它展开成不同频率的三角级数的和：

$$f(t)=a_0+\sum_{n\geqslant 1}\left[a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\right] \tag{2-1}$$

式(2-1)等号右边的和式被称为周期信号 $f(t)$ 的傅里叶三角级数展开。对于实周期信号 $f(t)$ 来说，系数 a_n、b_n 都是实数，且是唯一的。特别地，系数 a_0 被称为直流分量。

实际上，信号的傅里叶三角级数展开可以由线性空间知识来理解。但是，需要说明的是，本部分内容涉及的线性空间都是无限维空间，所以总是会出现一些特殊情况，在数学意义下不是严格完全正确的。对于这些特殊情况，并不影响我们对基本思想的理解，所以碰到时只给大家提醒一下，而不去把重点放在弄清楚这些特殊情况。因为实际中的大部分情况一般都会是满足正确条件的，或者说我们设计时就是让它满足正确条件的。

性质 2-1 函数组

$$\{1,\cos(\omega_1 t),\sin(\omega_1 t),\cdots,\cos(n\omega_1 t),\sin(n\omega_1 t),\cdots\},\qquad -\infty<t<\infty \tag{2-2}$$

在函数的常规内积下是一组正交向量组，且构成“所有”[㊀]周期为 T_1/k 或角频率为 $k\omega_1$ 的实周

㊀ “所有”表示有一些特殊情况并不能严格由式(2-2)表示的向量组唯一表示出来，如非连续信号。

期函数组成的线性空间的一组正交基,其中 $k>0$ 为整数。且有

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\cos(m\omega_1 t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}\tag{2-3}$$

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\cos(m\omega_1 t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}T_1/2, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}\tag{2-4}$$

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\sin(m\omega_1 t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}T_1/2, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}\tag{2-5}$$

所以,如果周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数展开存在,根据正交基下坐标计算方法,我们有

$$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t\tag{2-6}$$

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t\tag{2-7}$$

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)\,\mathrm{d}t\tag{2-8}$$

当一个周期信号能由式(2-2)的向量组表示出来,称该周期信号的傅里叶三角级数展开存在。那么,周期信号 $f(t)$ 的傅里叶三角级数展开存在是什么意思呢?应该是说对于任何一个点 t,$f(t)$ 的值都等于其对应的傅里叶三角级数在点 t 的值。有没有可能虽然不是任何点都相等,但有一部分相等呢?要方便讨论这个问题,我们先定义信号 $f(t)$ 确定的傅里叶级数(多数文献中直接称为 $f(t)$ 的傅里叶级数)这个概念。

定义 2-1(信号确定的傅里叶级数) 对于信号 $f(t)$,不论其傅里叶级数展开是否存在,称如下级数为 $f(t)$ 确定的傅里叶级数:

$$a_0+\sum_{n\geqslant 1}\left[a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\right]\tag{2-9}$$

其中,系数 a_n,b_n,a_1 分别由式(2-6)~式(2-8)确定。

提醒

信号确定的傅里叶级数仅是一个临时的过渡概念,在没有进一步的证据之前,它和信号本身没有相等关系。

接着上面的问题,在哪些点,$f(t)$ 与 $f(t)$ 确定的傅里叶级数相等呢?狄利克雷(Dirichlet)给出了一个证据(或称为判断准则)。

定理 2-1(狄利克雷充分条件) 设 $f(t)$ 是以 T 为周期的周期函数。如果它满足以下条件:

- 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点(第一类间断点指在那些点左右极限 $f(t+0)$ 和 $f(t-0)$ 都存在,但不相等的点)。
- 在一个周期内至多只有有限个极值点。

则 $f(t)$ 确定的傅里叶级数收敛,并且当 t 是 $f(t)$ 的连续点时,收敛于 $f(t)$;当 t 是 $f(t)$ 的非连续点(第一类间断点)时,收敛于

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$$

即满足狄利克雷条件的信号$f(t)$在其连续点等于$f(t)$确定的傅里叶级数,在非连续点不等。还请注意,狄利克雷条件只是其中一个证据,并不是唯一的准则,其他准则本书就不一一讲了。

很显然,注意到正弦函数是奇函数,那么当$f(t)$为偶函数且其傅里叶级数存在时,必然所有$b_n=0$,即没有正弦分量(奇分量),那么对于这种情况,$f(t)$实际上可以仅由余弦函数组合叠加得到;同理,当$f(t)$为奇函数且其傅里叶级数存在时,所有$a_n=0$,即$f(t)$实际上可以仅由正弦函数组合叠加得到。

再考虑,所谓级数收敛是什么意思呢?意思是说如下和式:

$$a_0+\sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\right]$$

当N越来越大时,该和式和$f(t)$的误差越来越小。

下面简单举个例子看一下。

【例 2-1】　考虑图 2-1 所示周期矩形波$u(t)$

$$\begin{cases}u(t)=-1, & -\pi+2n\pi\leqslant t<2n\pi\\ u(t)=1, & 2n\pi\leqslant t<\pi+2n\pi\end{cases}$$

显然$u(t)$是奇函数,其傅里叶级数展开里只有如下正弦分量:

$$\left\{\frac{\pi}{4}\sin(t),\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}\sin(3t),\cdots,\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)t),\cdots\right\}$$

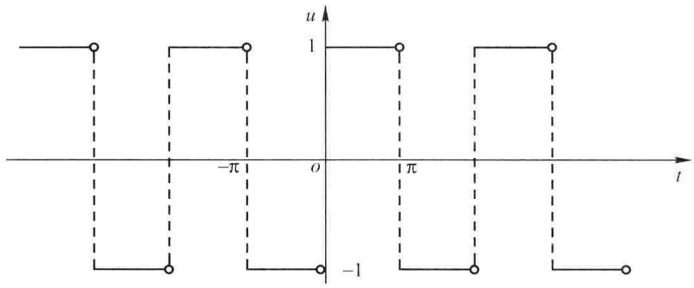


图 2-1　周期信号$u(t)$

下面看取不同个数分量的逼近情况,如图 2-2 所示。

可以看到,随着分量项数的增加,和式越来越逼近信号$u(t)$;还可以看到,由于$t=0$是$u(t)$的一个非连续点,级数在$t=0$点收敛于

$$\frac{u(0+)+u(0-)}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0$$

名人名言

数学大家高斯说,"如果一个人看到欧拉公式感觉不到她的优美,那么这个人基本上没什么数学才华了。"

其实数学大师陈省身先生也这么说过,那就请大家一起来看看欧拉公式有多惊艳吧!

定理 2-2(欧拉公式)

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta \tag{2-10}$$

特别地,当$\theta=\pi$时,得

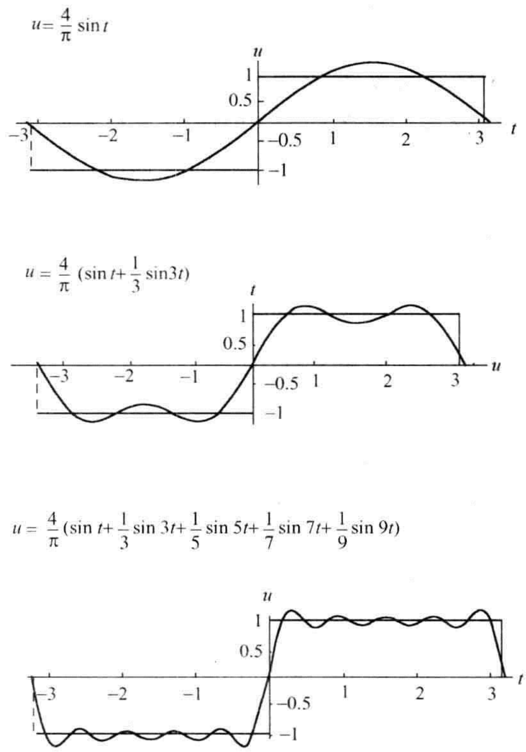


图 2-2 展开项个数增加的不同逼近程度

$$e^{j\pi} = -1 \tag{2-11}$$

其中几乎包含了所有特别的数 e、j、π、1，确实非比寻常。应用欧拉(Euler)公式，我们知道

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \tag{2-12}$$

代入信号 $f(t)$ 的三角函数形式傅里叶展开式(2-1)，我们得到实信号 $f(t)$ 的复指数形式傅里叶展开式

$$f(t) = \sum_{n} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \tag{3-13}$$

其中，

$$F_n = F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \tag{2-14}$$

$F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$一般被称为信号 $f(t)$ 的 n 次谐波分量，相应系数 F_n 被称为 n 次谐波系数，F_n 一般为复数。

事实上，可以证明，如下复指数函数集合也构成一组正交组。

性质 2-2 复指数函数集合

$$\{\cdots, e^{-j2\omega_1 t}, e^{-j\omega_1 t}, 1, e^{j\omega_1 t}, e^{j2\omega_1 t}, \cdots\}, \quad -\infty < t < \infty$$

是一组正交向量组，且构成“所有”周期为 T_1/k 或角频率为 $k\omega_1$ 的复周期函数组成的线性空间

的一组正交基,其中 $k>0$ 为整数。

注意,这个正交组不但能表示实信号,还能表示复信号(提醒:实信号是特殊的复信号),是对前面正余弦展开的扩展。有了这个基础,那么,仍然可以直接利用线性空间的知识,把任何一个讨论的复周期信号表示成该组基的线性组合,求相应坐标即可。由线性空间里的坐标计算方法,该线性空间中函数(作为向量看待)$f(t)$在基 $e^{jn\omega_1 t}$下的坐标为

$$F_n=\frac{<f(t),e^{jn\omega_1 t}>}{<e^{jn\omega_1 t},e^{jn\omega_1 t}>}=\frac{\int f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt}{\int e^{jn\omega_1 t}e^{-jn\omega_1 t}dt}\text{(应用信号常规内积形式)} \tag{2-15}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{N\int_{\tau}^{T_1+\tau}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt}{N\int_{\tau}^{T_1+\tau}e^{jn\omega_1 t}e^{-jn\omega_1 t}dt} \tag{2-16}$$

$$=\frac{1}{T_1}\int_{\tau}^{T_1+\tau}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \tag{2-17}$$

当然,这个坐标是唯一的。仍然有特殊周期信号不能由这组基表示,恕不深究。

另外可以看到,性质 2-2 对任何 ω_1 都成立,即使当 $\omega_1\to 0$ 时仍然成立。而当 $\omega_1\to 0$, $-\infty<n<+\infty$ 时,$n\omega_1$ 可以排满整个频率坐标轴 ω,即任何一点 ω 总存在某个 n 使得 $\omega=n\omega_1$。那么,可以知道在$(-\infty,+\infty)$上来看,任何两个不同信号 $e^{j\omega_1 t}$ 和 $e^{j\omega_2 t}$ 都是正交的。

性质 2-3(实信号谐波幅度对称性)　如果 $f(t)$ 是实信号,那么

$$F(n\omega_1)^*=F(-n\omega_1) \tag{2-18}$$

$$|F(n\omega_1)|=|F(-n\omega_1)| \tag{2-19}$$

即谐波分量幅度是关于正负频率对称的。

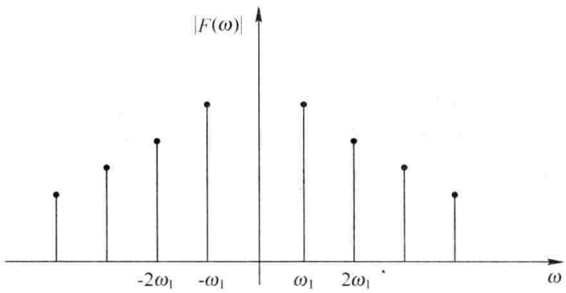


图 2-3　实信号谐波幅度对称性

对于一般复信号,并没有这一幅度对称性质。为了描述简便,在不产生歧义的情况下,我们把以自然数 e 为底的复指数函数 $e^{j\omega t}$和真正的三角函数 $\sin(\omega t)$、$\cos(\omega t)$都统称为三角函数,两者有差别的地方会单独特别说明。

思考一下,一个周期函数能表示成三角函数的和,即傅里叶级数展开存在,是说明每个点的函数值都是可以表示成该三角函数对应点的值之和。那这样的话,从周期函数中截取一段出来的时间有限函数,也相应地能表示成该三角函数同样截取后的函数和。也就是说,"任何"一个时间上长度为 T_1的函数,总是可以表示成角频率为 $\omega_1=2\pi/T_1$ 的三角函数的和。因为,总是可以先把该函数先拓展成一个以 T_1 为周期的函数,求出其对应的傅里叶级数展开,最

后再截取最开始的那个 T_1 段。

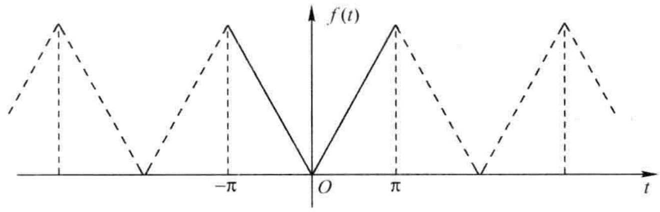


图 2-4　非周期信号拓展成周期信号，$T_1=2\pi$

上面的推理只能说明有限函数可以由有限三角函数表示，但是表示是不是唯一的呢？这个需要另外考虑。比如，假设周期函数 $f(t)$ 的最小正周期为 T_1，现在截取比 T_1 还短的一段，记其长度为 T_2。比 T_1 还短的这一段函数形式上仍然可以表示成把 $f(t)$ 展开后对应的三角函数同样截取 T_2 长那一段的和式展开。但是，可以证明，$f(t)$ 展开对应的三角函数截断后的 T_2 长的那一段不是无关的，更不是一组正交基。也就是说，$f(t)$ 截断后的 T_2 长函数虽然能表示成 $f(t)$ 展开对应的三角函数同样截取 T_2 长的函数和，但表示方法不是唯一的。那什么时候截断的三角函数是一组正交基呢？

性质 2-4（截断三角正交基）　当 T 是 $T_1=2\pi/\omega_1$ 的整数倍时，如下形式的一组截断三角函数是一组正交基：

$$\{\cdots,e^{-j2\omega_1 t},e^{-j2\omega_0 t},1,e^{j\omega_1 t},e^{j2\omega_1 t},\cdots\},t_0\leqslant t\leqslant t_0+T_0$$

"所有"定义在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T_0$ 上的信号 $f(t)$ 都可以由它唯一线性表示出来。

这一性质在后面我们还会经常用到，比如 OFDM 技术，从原理上讲（先不考虑如何对付无线信道等）只不过是该组基的简单应用而已。

三言两语

既然信号已经有其他形式的表示形式，例如泰勒（Taylor）展开式等，为什么特别要展开成三角函数呢？因为泰勒展开式中，基函数 x^n 是单调无界的，实现起来比较麻烦。而如果它操作的基本单元有简单的性质，比如周期的、有界的、只需要简单平移、简单相加操作等，就会简单一些，三角函数就满足这样的性质。

2.2　傅里叶变换——不就是计算坐标吗

如果信号不是周期的，能有和傅里叶级数类似的唯一变换关系吗？有！那就是接下来要讨论的傅里叶变换。

2.2.1　晋级——从傅里叶级数到傅里叶变换

注意性质 2-4 中，对于 ω_0 没有任何限制，即使当角频率 $\omega_0\to 0$ 时，如下集合中信号仍然是正交的：

$$\{\cdots,e^{-j2\omega_0 t},e^{-j\omega_0 t},1,e^{j\omega_0 t},e^{j2\omega_0 t},\cdots\},\tau\leqslant t\leqslant \tau+T_0$$

也就是说"所有"在 $\tau \leqslant t \leqslant \tau + T_0$ 的信号都可以用它来表示(回忆前面刚讲过的先拓展,再由傅里叶级数展开,最后截断 $\tau \leqslant t \leqslant \tau + T_0$ 那一截),其中 $T_0 = 2\pi/\omega_0 \to +\infty$。而当 $T_0 \to \infty$ 时,任何函数都可以看成是 $\tau \leqslant t \leqslant \tau + T_0$ 上的函数,从而任何信号都可以由该组信号来线性表示。那么,我们看看一个信号在这样一组基下的坐标是什么?仍然根据坐标计算公式,按部就班地计算在基信号 $e^{jn\omega_0 t}$ 下的坐标为

$$F(n\omega_0) = \frac{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt}{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{jn\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}dt} = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{2-20}$$

当 $\omega_0 \to 0$ 且 n 遍历 $(-\infty, \infty)$ 时,$n\omega_0$ 可以排满整个角频率坐标轴 ω,即任何一点 ω 总存在某个 n 使得 $\omega = n\omega_0$。那么,$f(t)$ 在任何一个点 $\omega = n\omega_0$ 所对应的基 $e^{jn\omega_0 t} = e^{j\omega t}$ 下的坐标为

$$\hat{F}(\omega) = \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{\left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]\omega_0}{2\pi} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]d\omega}{2\pi} \tag{2-21}$$

注意到一个信号在不同基 $e^{j\omega t}$ 下的坐标不同的是无穷小量 $d\omega$ 以及常系数 2π 之外的那部分,我们就单独把那部分取个名字叫 $f(t)$ 的傅里叶变换,记为

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{2-22}$$

并且一般把它称为信号的频域表示(或频谱),可以看到所谓频域只是对应于 $\{\cdots, e^{j\omega t}, \cdots\}$ 这组基下的表示的一个称谓。

提醒

在基 $e^{j\omega t}$ 下的实际坐标是 $F(\omega)\dfrac{d\omega}{2\pi}$,而不是傅里叶变换 $F(\omega)$,切记!

既然得到了坐标,显然信号 $f(t)$ 可以表示成坐标与对应基的线性组合

$$f(t) = \sum_{\omega} F(\omega)\frac{d\omega}{2\pi}e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{2-23}$$

这样的表示被称为 $F(\omega)$ 的傅里叶逆变换,记为

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{2-24}$$

到此为止,我们就得到了傅里叶变换及逆变换。可以看到,弄来弄去,也还是按部就班地求某组基的坐标而已。所以,再给大家建议,一定要好好理解线性空间相关的理论,它才刚刚开始发挥作用,后续一直会用到。哪怕先把进度放一放,也请把那块知识掌握熟练。

上面的推导过程是对角频率来说的,如果采用线频率 $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{T_0}$,思想类似。只不过,这里转化为求如下这组基的坐标:

$$\{\cdots, e^{-j2\pi f_0 t}, 1, e^{j2\pi f_0 t}, \cdots\}, \tau \leqslant t \leqslant \tau + T_0$$

其实这组基和角频率是同一组基,只是表示形式上有点差异,导致线频率形式下的傅里叶变换略有差异。同样根据坐标计算公式知,当 $f_0 \to 0$ 时,在基 $e^{j2\pi f t}$ 下的坐标为

$$\hat{F}_L(f) = \lim_{f_0 \to 0} \frac{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t}{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}f \tag{2-25}$$

同样,注意 df 对于不同基是公共的,我们把剩下的部分称为线频率形式下的傅里叶变换,记为

$$F_{\mathrm{L}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t \tag{2-26}$$

接着线频率傅里叶变换讲,既然得到了坐标,则信号 $f(t)$ 有线性组合表示

$$f(t) = \sum_f F_{\mathrm{L}}(f)\mathrm{d}f\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft} = \int F_{\mathrm{L}}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f \tag{2-27}$$

注意,这个就称为线频率形式下的傅里叶逆变换,和角频率形式上只有一个常量系数 $1/2\pi$ 的差别。

定理 2-3(傅里叶变换对) 把如上讨论的信号 $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 记为一对傅里叶变换对,有

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t, f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{2-28}$$

采用线频率 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ 表示的傅里叶变换对有

$$F_{\mathrm{L}}'(f) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t, f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_{\mathrm{L}}(f)\} = \int F_{\mathrm{L}}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f \tag{2-29}$$

其中,角频率表示和线频率表示之间关系为

$$F_{\mathrm{L}}(f) = F(2\pi f) \tag{2-30}$$

即把角频率表示自变量范围压缩 2π 倍就得到线频率表示。

本书后面的讲解可能只会基于其中一种形式说明,请读者朋友根据两者之间的这个关系自行思考同一个问题在另一种表示下是什么样子。当然,如果不会引起混淆,线频率表示 $F_{\mathrm{L}}(f)$ 的下标 L 可以去掉。

性质 2-5(能量守恒) 同一能量信号的时域表示和频域表示,信号能量守恒,即

$$\int |f(t)|^2\mathrm{d}t = \int |F(f)|^2\mathrm{d}f = \frac{1}{2\pi}\int |F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{2-31}$$

当然信号若是功率信号,那么就是时频域功率守恒。能量守恒可以看成模与坐标关系的简单应用,也即还是线性空间理论的简单应用,但它有个专门名称叫帕斯瓦定理(Parseval's Theorem),详细推导说明见附录 C。

和傅里叶级数一样,对于傅里叶变换,我们也有实信号频谱幅度对称性。

性质 2-6(实信号频谱对称性) 对于实信号,$F(\omega)^* = F(-\omega)$,从而 $|F(\omega)| = |F(-\omega)|$,即幅度为关于原点对称的偶函数。

提醒

实信号频谱幅度对称性还说明,实信号的频谱的非零范围是关于原点(零频)对称的,比如非零范围为 $[-W, W]$ 或者 $[-W_2, -W_1] \cup [W_1, W_2]$。所以,我们在后续讨论中,要画信号的频谱图时,总是画成对称的样子。

还可以证明傅里叶变换和傅里叶逆变换都是线性映射,即

$$\mathcal{F}\{kf(t)+lg(t)\}=k\mathcal{F}\{f(t)\}+l\mathcal{F}\{g(t)\} \tag{2-32}$$

除了上面几个性质，傅里叶变换还有很多特殊的性质，以及特殊的变换对，基本上都可以根据傅里叶变换定义公式变形得到，具体内容见附录 C。

2.2.2　方波信号和 sinc 信号——专访这对儿金童玉女

方波信号和 sinc 信号是两类简单但理论分析中经常用到的信号，一个是理想的窗函数或滤波器，一个是理想的插值函数或脉冲信号，我们这里专门拿出一节来讲讲它们，以便后续能灵活应用。

性质 2-7　定义标准单位方波信号为 $\mathrm{Rect}(t)$，

$$\mathrm{Rect}(t)=\begin{cases}1, & -\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ 0, & 其他\end{cases} \tag{2-33}$$

定义标准单位 sinc 信号 $\mathrm{sinc}(t)$，

$$\mathrm{sinc}(t)=\frac{\sin t}{t},\ -\infty\leqslant t\leqslant\infty \tag{2-34}$$

则有傅里叶变换对关系

$$\mathcal{F}\{\mathrm{Rect}(t)\}=\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{2-35}$$

本书后续内容中非标准单位方波都用标准单位方波的伸缩变换表示，例如，方波信号

$$f(t)=A,\quad -\tau\leqslant t\leqslant\tau$$

可以表示成

$$f(t)=A\cdot\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{2\tau}\right),\ -\tau\leqslant t\leqslant\tau$$

非标准单位 sinc 信号类似。另外，也可以看到 Rect 信号和 sinc 信号两者都是偶(实)信号。图 2-5 示意了一对方波信号和 sinc 信号。

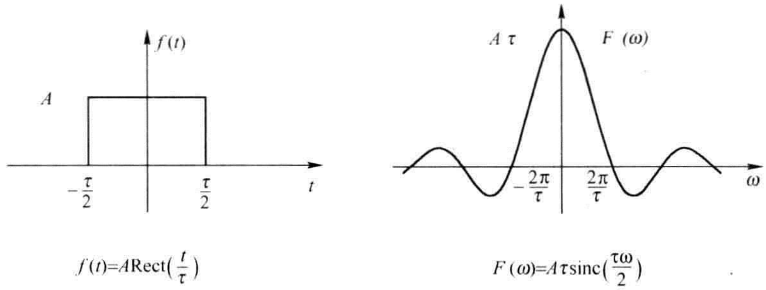


图 2-5　方波信号与其傅里叶变换 sinc 信号

请大家仔细看一下图 2-5，获取一些直观的特征，比如时域幅度和频域幅度的关系，时域方波持续时长与频域 sinc 信号零点位置关系等，熟练掌握这些对于以后灵活应用会有好处。我们先简单总结如下：

1）如果方波的持续宽度为 τ，那么其傅里叶变换 sinc 信号中离坐标原点(零频)最近的零点离坐标原点距离为 $2\pi/\tau$，注意这是角频率；如果是线频率，距离就是 $1/\tau$，即倒数关系。

2）对于信号 sinc(αt)，其离坐标原点最近的零点离坐标原点距离为 π/α。

3）对于信号 sinc(αt)，除了坐标原点附近的两个零点外，其他零点间隔为 π/α。后续如果用到，我们就直接说两个零点的距离了，但请大家注意有这个特殊情况。

性质 2-8（sinc 信号能量） 首先方波信号的能量很容易求得，再由傅里叶变换的能量守恒性质，我们又可以得到 sinc 信号的能量

$$\int \left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 \mathrm{d}\omega = 2\pi\int |\mathrm{Rect}(t)|^2 \mathrm{d}t = 2\pi \tag{2-36}$$

$$\int |\mathrm{sinc}(\alpha\omega)|^2 \mathrm{d}\omega = 2\pi\int \left|\frac{1}{2\alpha}\mathrm{Rect}\left(\frac{1}{2\alpha}t\right)\right|^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\alpha} \tag{2-37}$$

比较容易看到，截断的三角函数或复指数，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\left(-\frac{1}{2a}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2a}\right)$，可以表示成如下形式：

$$\mathrm{Rect}(at)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

这样写的好处是可以省略关于自变量的取值范围声明，因为 Rect(at)起到了这样的作用，相当于对信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$ 加窗截取窗内的部分，所加的截取窗长为 $1/a$。显然对于其他区间截断 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\left(\tau\leqslant t\leqslant\tau+\frac{1}{a}\right)$相应平移窗函数 Rect($at$)即可。

根据前面性质 2-4 的讨论，我们知道当截断的长度为 $2\pi/\omega_0$ 的整数倍时，其构成一组正交基。即，当窗长$\frac{1}{a}=k\frac{2\pi}{\omega_0}$时，$\mathrm{Rect}(at)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$ 为一组正交基。而根据傅里叶变换“时域旋转，频域平移”性质知，$\mathrm{Rect}(at)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$的傅里叶变换为

$$\frac{1}{|a|}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega-n\omega_0}{2a}\right)$$

则当 $a=\frac{\omega_0}{2\pi k}$时，根据傅里叶变换作为一一线性映射把一组基变成另一组基，知此时信号序列 $\left\{\cdots,\mathrm{sinc},\left(\frac{\omega-n\omega_0}{2a}\right),\cdots\right\}$也为一组正交基。特别地，取 $a=\frac{\omega_0}{2\pi}$代入，得 $\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(\omega-n\omega_0)}{\omega_0}\right)$为一组正交基。

定理 2-4（sinc 信号正交基） sinc 信号序列

$$\left\{\cdots,\mathrm{sinc}\left[\frac{k\pi(\omega-n\omega_0)}{\omega_0}\right],\cdots\right\}$$

是一组正交基，其中 k 为某整数。即有

$$\int \mathrm{sinc}\left[\frac{k\pi(\omega-m\omega_0)}{\omega_0}\right]\mathrm{sinc}\left[\frac{k\pi(\omega-n\omega_0)}{\omega_0}\right]\mathrm{d}\omega = \begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{\omega_0}{k}, & m=n\end{cases} \tag{2-38}$$

根据我们前面观察得到的 sinc 信号的性质知，信号 $\mathrm{sinc}[k\pi\omega/\omega_0]$的零点之间的距离为 ω_0/k。而信号序列 $\sin[k\pi(\omega-n\omega_0)/\omega_0]$，两两是相互平移 $n\omega_0$ 的关系，也即零点之间距离的整数倍关系。也就是说，相对于同一个 sinc 信号，平移零点之间距离整数倍的信号（函数值可以伸缩变换）两两正交。如图 2-6 所示，虽然信号的正交需要看两个信号乘积的积分（信号常规内积）是否为 0，这一般很难直观看出来，但图 2-6 中也或多或少有那么一点“正交”关系，比如

一个信号在另一个信号的最大值点(即对应原点平移的那个)的取值都是 0,大多数两个零点之间的函数曲线变化方向相反,等等。

这组 sinc 信号正交基也非常重要,稍后就会用到,先请大家熟悉留意一下。

同样根据前面的讨论,我们知道定义在区间 $-\frac{k\pi}{\omega_0}\leqslant t\leqslant\frac{k\pi}{\omega_0}$ 上的“所有”信号 $f(t)$ 可以由截断正交基表示为

$$f(t) = \sum_n a_n \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega_0}{2k\pi}t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

从而,这些信号 $f(t)$ 的频谱可以由一系列频域 sinc 信号叠加出来,如图 2-7 所示,即

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_n a_n \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega_0}{2k\pi}t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right\} = \sum_n a_n \mathrm{sinc}\left[\frac{k\pi(\omega - n\omega_0)}{\omega_0}\right] \quad (2\text{-}39)$$

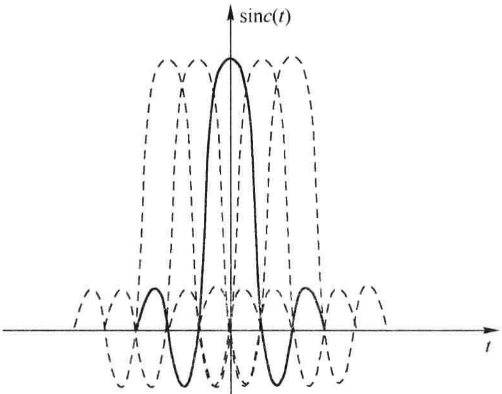


图 2-6　sinc 信号正交基

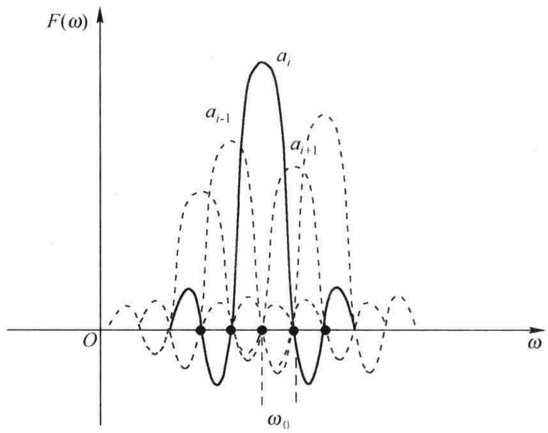


图 2-7　信号频谱由 sinc 信号叠加出来

现在考虑,所有定义在区间 $\left[-\frac{k\pi}{\omega_0},\frac{k\pi}{\omega_0}\right]$ 上,但只有有限个正交基下的坐标可能非 0 的那些信号。不妨设仅在基向量

$$\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega_0}{2k\pi}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}, 0\leqslant n\leqslant N_c - 1$$

下的坐标 $a_n(0\leqslant n\leqslant N_c - 1)$ 可能不为 0,其他基下坐标一定为 0。那么,所有这些信号的频谱仅由有限个 sinc 信号叠加构成。想想,如果序列 a_n 携带信息,把 a_n 表示的信号

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N_c-1} a_n \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega_0}{2k\pi}t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

发送出去,接收端是不是很容易把 a_n 取出来?应该是的,因为接收端再重新计算各基下的坐标即可,这就是 OFDM 的最核心原理之一了,后面再详细讲解。

2.2.3　信号频谱——看你是否有男高音潜质

很多情况下,我们通过听声音就可以知道是谁在说话,比如周星驰电影的配音,这是为什么呢?是因为他说话声音大?绝对不是。而是因为其声音在各频率分量上的强弱与其他人不同。图 2-8 里给出了一段声音信号在时域和频域的对比,从中可以看到我们人类的声音,在

频率上看,仅落在 0~4000 赫兹(Hz)区间里。一个人的声音从频率上看,如果长得和大多数人很不一样,那么这个人的声音辨识度就很高。

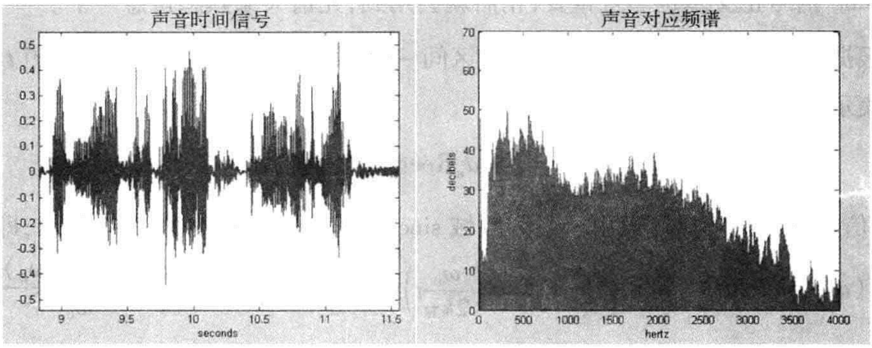


图 2-8 人的声音频谱

类似地,这就是为什么在实际问题分析中,我们希望看到一个信号在各个频点上的能量分布情况,即坐标的模的大小分布情况,为此定义了下面能量谱密度和功率谱密度的概念。

定义 2-2(能量谱密度) 对于能量存在且有限的信号 $f(t)$,称

$$S(\omega)=|F(\omega)|^2 \tag{2-40}$$

为它的能量谱密度。显然,如字面意思,既然是密度,总能量就是整个区域的累积,如果采用线频率就没有前面系数$\frac{1}{2\pi}$:

$$E[f(t)]=\frac{1}{2\pi}\int |F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{2-41}$$

定义 2-3(功率谱密度) 对于功率存在且有限的信号,上面的能量谱密度的积分为无穷大,所以不方便以总能量来刻画,而是用单位时间内的平均能量,即功率来刻画。单位时间内的功率为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_{\mathrm{T}}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

其中,$F_{\mathrm{T}}(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$,即信号 $f(t)$ 的截断的傅里叶变换。对比能量谱密度与总能量的关系,我们把

$$P(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{|F_{\mathrm{T}}(\omega)|^2}{T} \tag{2-42}$$

称为功率谱密度。

同样如果认为系数 $1/(2\pi)$ 碍事,可以采用线频率傅里叶变换表示。

类似于随机信号的能量与功率描述,对于随机过程 $\xi(t)$ 来说,能量谱密度和功率谱密度也需要从统计上来看。

- **能量谱密度** 对所有 $\xi(t)$ 的可能实现 $f(t)$ 的功率谱密度 $S(\omega)$ 取统计平均

$$S(\omega)=E\{|F_{\mathrm{T}}(\omega)|^2\} \tag{2-43}$$

- **功率谱密度** 对所有 $\xi(t)$ 的可能实现 $f(t)$ 的功率谱密度 $P(\omega)$ 取统计平均

$$P(\omega)=E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}\right\} \tag{2-44}$$

对于一般随机过程的谱密度，计算比较复杂。但当随机过程是广义平稳随机过程时，其谱密度与其自相关函数有关系，即维纳－辛钦(Wiener-Khinchin)定理。

定理 2-5(维纳－辛钦定理)　广义平稳随机过程 $\xi(t)$ 的自相关函数 $R(t)$ 与功率谱 $P(\omega)$ 是一对傅里叶变换：

$$P(\omega)=\int R(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t, R(t)=\frac{1}{2\pi}\int P(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{2-45}$$

同时，由特殊情况

$$R(0)=E\,|\,\xi(t)\xi(t)\,|=\frac{1}{2\pi}\int P(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{2-46}$$

我们可以得到如下结论。

性质 2-9　广义平稳随机过程 $\xi(t)$ 中，每个时刻随机变量的方差等于该平稳随机过程的功率与均值平方的差。即记每个时刻所对应的随机变量均值为 μ，角频率功率谱密度为 $P(\omega)$，则

$$\mathrm{Var}[\xi(t)]=\frac{1}{2\pi}\int P(\omega)\mathrm{d}\omega-\mu^2 \tag{2-47}$$

注意，上面功率谱采用的是角频率表示，总是有个系数 $1/(2\pi)$，比较烦人，要想没有这个系数，可以采用线频率表示，此处从略。

一般把信号频谱取值非 0 范围在零频附近的那些信号称为基带信号，比如谱取值非 0 范围为 $[-W,W]$；一般把信号频谱取值非 0 范围远离零频的那些信号称为频带信号(或带通信号)，比如谱取值非 0 范围为 $[-W_2,-W_1]\cup[W_1,W_2]$，其中 W_1 远大于 0。

同时需要指出的是，一个信号的时域和频域的非零范围不可能同时有限，即至少其中之一是无限的，这个其实从傅里叶变换的"伸缩变换性质"也可略知一二了。在伸缩变换里，

$$f(\alpha t)\sim\frac{1}{|\alpha|}F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

可以看到时域展宽，则频域变窄；时域变窄，则频域展宽。而现实中，一般信号都是时域有限的，那么知其频域必然无限。

2.2.4　周期信号的傅里叶变换

周期信号有傅里叶级数，那周期信号有傅里叶变换吗？大家回顾一下，我们在推导傅里叶变换时，并没有限定区间 $\tau\leqslant t\leqslant\tau+T_0, T_0\to\infty$ 上的信号一定不是周期函数，那就是说，傅里叶变换也可以推广到周期函数。下面我们就简单看看周期信号的傅里叶变换是什么样的。

性质 2-10(周期函数的傅里叶变换)　设 $f(t)$ 是以 T_1 为周期的函数，则 $f(t)$ 的傅里叶变换

$$\mathcal{F}\{f(t)\}=\sum_n 2\pi F(n\omega_1)\delta(\omega-n\omega_1) \tag{2-48}$$

其中，$\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$，且

$$F(n\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t \tag{2-49}$$

证明　假设$f(t)=\sum_n f_T(t+nT_1)$,其中$f_T(t)$为一个周期内的函数。可以利用周期函数的傅里叶级数表示和傅里叶变换的线性性质简单推导如下:

$$\mathcal{F}\{f(t)\}=\mathcal{F}\left\{\sum^{n}F(n\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\right\}=\sum_n F(n\omega_1)\mathcal{F}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\}$$

再结合傅里叶变换"复指数函数的傅里叶变换"性质,我们得到周期信号的傅里叶变换

$$\mathcal{F}\{f(t)\}=\sum_n 2\pi F(n\omega_1)\delta(\omega-n\omega_1)$$

其实由傅里叶变换的实质来理解这个也很直接,我们再说一遍,傅里叶变换的实质是求坐标。而根据周期信号$f(t)$的傅里叶级数表示

$$f(t)=\sum_n F(n\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t} \tag{2-50}$$

我们知道,周期信号在各个基下的坐标已经在那儿了,我们只需要按傅里叶变换的定义把傅里叶变换提出来就行了。注意,信号在某个基下的坐标是其傅里叶变换乘以公共量$\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$。那么,因为在基$\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1}$下的坐标为$F(n\omega_1)$,从而从傅里叶变换来说,该频点对应的傅里叶变换为

$$\frac{F(n\omega_1)}{\mathrm{d}\omega/2\pi}=2\pi F(n\omega_1)\frac{1}{\mathrm{d}\omega}=2\pi F(n\omega_1)\delta(0) \tag{2-51}$$

注意到,只有在频点$\omega=n\omega_1$才有这个冲激值,在其他频点为0,仍然和冲激信号定义对比,可知周期信号的傅里叶变换为一系列冲激。

另外,注意到各冲激的幅度

$$F(n\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_1}\mathcal{F}\{f_T(t)\}\Big|_{\omega=n\omega_1} \tag{2-52}$$

这说明周期函数的(傅里叶变换意义下)频谱是其一个周期所示函数的频谱的等间隔冲激抽样。

例 2-2(周期方波的傅里叶变换)　周期方波以及其对应的傅里叶变换如图2-9所示,大家感性认识一下,注意和非周期方波信号及其傅里叶变换 sinc 信号对比看是否是某种采样的关系。

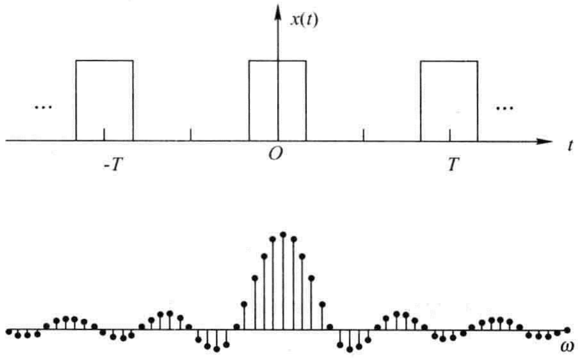


图 2-9　周期方波信号与其傅里叶变换

2.3　其他变换形式——不只是傅里叶

给定一个信号空间,可以确定一组基,使得该信号空间的所有信号都可以由该基表示。若将信号空间进一步扩大,那么该信号空间为扩大后空间的一个子空间。而扩大后空间自身又可以确定一组基使得扩大后空间里的每个信号都可以由该组基表示。注意原信号空间里的每个信号显然也属于这个扩大后空间,从而原信号空间里的信号又可以由扩大后空间的一组基表示了。这个我们已经见过了,例如,要表示所有信号需要的基为 $\delta(t-\tau)$,而表示所有周期信号只需要 $e^{j\omega t}$,但是所有周期信号也可以用更大空间的所有信号的基 $\delta(t-\tau)$ 来表示;又例如,所有周期为 T 的信号空间为所有周期为 $2T$ 的信号空间的一个子空间。

这里,如果将空间进一步由 $e^{j\omega t}$ 生成的空间扩大到 $e^{st}, s\in\mathbb{C}$ 生成的空间,信号 $f(t)$ 在这个基下的坐标被称为拉普拉斯(Laplace)变换。Laplace 变换本书后面较少用到,就不展开讲了。若有特别需要了解的,请读者自行查阅资料。

第3章　线性系统简介

系统可以认为是工程设计上的一个概念或思维方式。大概就是说,我做一个东西或设备,给它输入一些信号,它就会反映输出一些信号。这大概有两个方向可以考虑:

- 给定满足某种特性的系统和输入信号,确定输出信号。
- 想要设计满足某种特征的系统,怎样从输入和输出信号关系着手。

现实中,后者是主要目的,前者大概更多地只是逆向辅助进行理论说明而已,当然也不绝对。线性系统是通信主要涉及的一类系统,我们暂时也仅介绍它。

3.1　线性系统基础

3.1.1　什么是线性系统

定义3-1(线性系统)　是指几个信号线性叠加作为输入信号的输出信号为各自单独作为输入信号的输出信号的相应线性叠加。记输入信号 $x(t)$ 对应的输出信号为$\mathcal{R}\{x(t)\}$,则线性系统输入/输出信号关系为

$$\sum C_i x_i(t) \Rightarrow \sum C_i \mathcal{R}\{x_i(t)\} \tag{3-1}$$

这样一个性质的好处就是可以把很复杂的信号先分解成简单信号,考虑简单信号的输出,再做简单线性合并即可。另一方面,从线性空间的角度考虑,如果存在一组基,使得任意感兴趣的信号都能由该基线性表示,那么我们只需要研究清楚系统对该组基信号的反应输出即可。

例如,前面我们已经提到任何信号可以表示成

$$f(t) = \int f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

这里,积分可以看成无穷线性叠加,那么只要知道系统对 $\delta(t-\tau)$ 的反应 $h(t,\tau)$,即可得到对$f(t)$的反应信号

$$\mathcal{R}\{f(t)\} = \int f(\tau)\mathcal{R}\{\delta(t-\tau)\}\mathrm{d}\tau = \int f(\tau)h(t,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3-2}$$

3.1.2　什么是线性时不变系统

更进一步研究,线性时不变(Linear Time Invariant, LTI)系统,为什么呢?因为人造的系统基本上是时不变的,不然我们都不知道输入一个信号将要发生什么,那么这系统也就没有意义了。

定义3-2(时不变系统)　如果$\mathcal{R}\{x(t)\}=X(t)$,有$\mathcal{R}\{x(t-\tau)\}=X(t-\tau)$,该系统称为时不变系统。

从时不变系统的定义知道,若输入信号仅是延迟关系,那么输出信号之间也是相同的延迟关

系。如果既是线性系统，又是时不变系统，那么若

$$\mathcal{R}\{\delta(t)\} = h(t) \tag{3-3}$$

则

$$\mathcal{R}\{\delta(t-\tau)\} = h(t,\tau) = h(t-\tau) \tag{3-4}$$

从而，该系统对任意输入信号 $f(t)$ 的输出响应信号满足

$$\mathcal{R}\{f(t)\} = \int f(\tau)h(t,\tau)\mathrm{d}\tau = \int f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3-5}$$

更进一步地，由“时域卷积，频域乘积”性质，从频域看，有

$$\mathcal{F}\{\mathcal{R}\{f(t)\}\} = F(\omega)H(\omega) \tag{3-6}$$

所以，看一个线性时不变系统只要看它对冲激信号 $\delta(t)$ 的输出响应即可。根据上面的讨论，我们总结如下：

定理 3-1（线性时不变系统响应）　把线性系统对单位冲激信号的时域输出响应信号称为系统的时域响应，把线性系统对单位冲激信号的频域输出响应信号称为系统的频域响应，也称系统的传递函数。线性时不变系统对输入信号的响应输出信号，在时域看，为输入信号与系统的时域响应的卷积；在频域看，为输入信号的频域表示（傅里叶变换）和系统传递函数的乘积。

3.2　无失真系统

3.2.1　不仅仅这样才叫无失真

通信当然希望通信过程中无失真，从而实现最准确的信息交互。那什么叫无失真呢？是说接收端接收到的信号和发送端完全一样吗？不完全是，这是最简单、最理想的情况。广义的无失真，是指只要接收端根据接收到的信号以任何一种方式唯一“再生”发射端的源信号，都称为是无失真的。一定要理解“再生”二字，接收端不只是被动地收到什么就是什么，而是可以主动地想办法还原源信号。

这里我们先只涉及最狭义的无失真，即传输的无失真，也就是说发射端的电磁信号（不是其携带的最终消息）的准确还原。那什么样的线性系统是无失真系统呢？准确地说无失真的线性系统的响应函数是怎样的？

3.2.2　线性系统如何做到无失真

这首先需要定义范围，也就是我们想对哪些信号无失真呢？如果说是对所有信号都无失真，从频域看就是对所有频点乘以一个非 0 的常数。由于系统被设计出来后，其对应的频域响应提前知道，那么从系统出来的信号，从频率看，在每个频点除以相应的非 0 常数就可以还原原信号（如果传递函数在某个频点对应的响应值为 0，显然就没办法知道输入信号在该频点的频谱值了）。这样最简单的频域响应应该是一条跨所有频率的直线，如图 3-1 所示，其相应时域响应为单位冲激。回忆时域响应是系统对单位冲激信号作为输入信号的响应。可以看出，单位冲激信号经过系统后的输出响应仍然是单位冲激，显然无失真。

又如果只是让带宽在某个范围内的信号无失真，比如 $[-W, W]$，那只需要在这个带宽范围内的频域响应非 0 就 OK 了。同样，此时最简单的频域响应是在该带宽范围内的一条直线，

即一个矩形谱(或称方波谱),如图 3-2 所示;其相应时域为 sinc(αt)函数。显然,此时单位冲激经过系统后的输出响应变成了 sinc(αt)函数,故单位冲激信号经过该系统失真了。

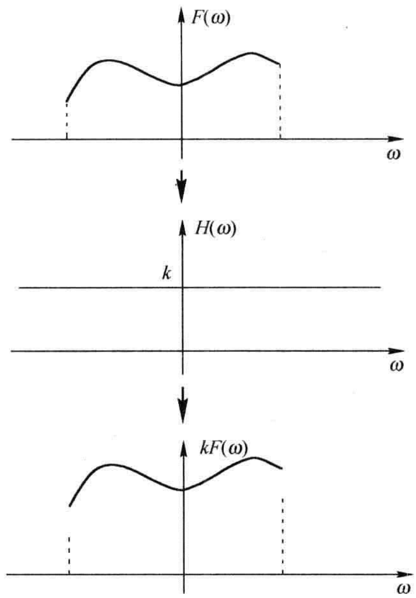


图 3-1　所有信号都无失真的线性时不变系统

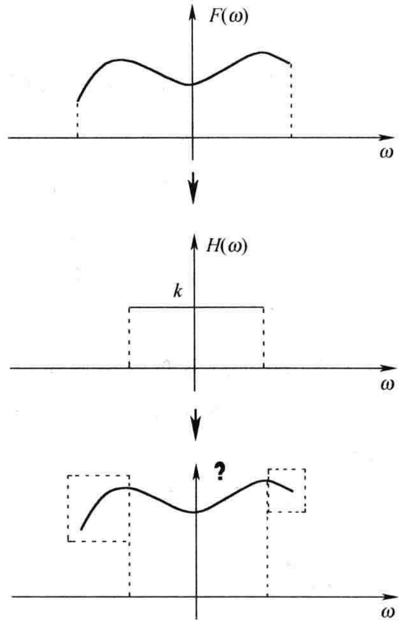


图 3-2　对部分信号失真的线性时不变系统

第 4 章　信号表示论第二场

本章继续讲信号表示论，主要内容为采样定理和离散傅里叶变换及逆变换，讨论过程中马上需要灵活应用刚讲过的上两章知识。

4.1　采样定理——联系模拟与数字的纽带

采样定理（Sampling Theorem）想表达的意思是：连续函数一般是有冗余的，我们并不需要知道每个瞬时时刻的函数值，只需要知道部分时刻函数值就可以决定它，比如通过一序列基本函数单元，例如 sinc 函数，来重建原连续函数。

具体是说，如果一个信号（线频率）频谱值非 0 范围为 $-f_c \leqslant f \leqslant f_c$（单位：Hz），以每秒（s）大于 $2f_c$ 个采样点的速率采样即可保留所有信息。直观想一下，信号的最高频率为 f_c，即变化最快的“分量”才以 $1/f_c$（秒）为周期，那么在小于最高频率对应的半个周期 $1/2f_c$ 秒内，即两个采样点的间隔，不可能有非常明显的变化，从而可以只取一部分具有代表性的值来表征原信号。下面进入具体的理论推导。

4.1.1　从信号频谱跟踪采样带来的变化

假设信号 $f(t)$ 的（线频率）频谱非零范围为 $-f_c \leqslant f \leqslant f_c$，角频率非零范围为 $-W_c \leqslant \omega \leqslant W_c$，其中 $W_c = 2\pi f_c$。给定任意周期为 $T_p > 0$ 的函数

$$p(t) = \sum_n p_T(t - nT_p) \tag{4-1}$$

其中，$p_T(t)$ 是一个周期内的函数。记其对应角频率和线频率分别为 $\omega_p = \dfrac{2\pi}{T_p}, f_p = \dfrac{1}{T_p}$。首先，由周期函数的傅里叶变换推导知，周期信号 $p(t)$ 的频谱为

$$P(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\} = \sum_n 2\pi p(n\omega_p)\delta(\omega - n\omega_p) \tag{4-2}$$

其中，$p(n\omega_p)$ 是周期函数 $p(t)$ 的第 n 次谐波的系数，即

$$p(n\omega_p) = \frac{1}{T_p}\int p_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_p t}\mathrm{d}t \tag{4-3}$$

再由傅里叶变换“时域乘积，频域卷积”性质，得到

$$\mathcal{F}\{f(t)p(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int F(\hat{\omega})P(\omega - \hat{\omega})\mathrm{d}\hat{\omega} = \sum p(n\omega_p)F(\omega - n\omega_p) \tag{4-4}$$

式（4-4）说明信号 $f(t)$ 和一个周期信号 $p(t)$ 的乘积得到的信号的频谱（从角频率描述）为信号 $f(t)$ 的频谱以周期信号 $p(t)$ 的角频率 ω_p 为间隔的重复，仅仅每个重复片段的幅度与周期信号 $p(t)$ 的谐波系数 $p(n\omega_p)$ 有关。

4.1.2　发现信号的 DNA——特殊的采样点序列

在上面的讨论中，只要周期信号 $p(t)$ 选得合适或者说 T_p 取得合适，例如 $\omega_p=\dfrac{2\pi}{T_p}>2W_c$，相邻两个重复片段可以没有交叉混叠，从而非常直观地，可以通过滤波器滤出一个片段，再频谱搬移到原信号 $f(t)$ 的频谱应该在的位置就能重新得到 $f(t)$ 了。

特别地，当 $p_T(t)=\delta(t)$ 时，有 $p(n\omega_p)=\dfrac{1}{T_p}$。此时，$p(t)$ 与 $f(t)$ 的乘积得到的信号为

$$f(t)\sum_n\delta(t-nT_p)=\sum_n f(nT_p)\delta(t-nT_p) \tag{4-5}$$

从而从频域上来看有

$$\mathcal{F}\{f(t)\sum_n\delta(t-nT_p)\}=\mathcal{F}\{\sum_n f(nT_p)\delta(t-nT_p)\} \tag{4-6}$$

$$=\frac{1}{T_p}\sum_n F(\omega-n\omega_p) \tag{4-7}$$

在这种情况下，乘积信号的频谱除了重复外，重复的所有片段是完全一样的，如图 4-1 所示。

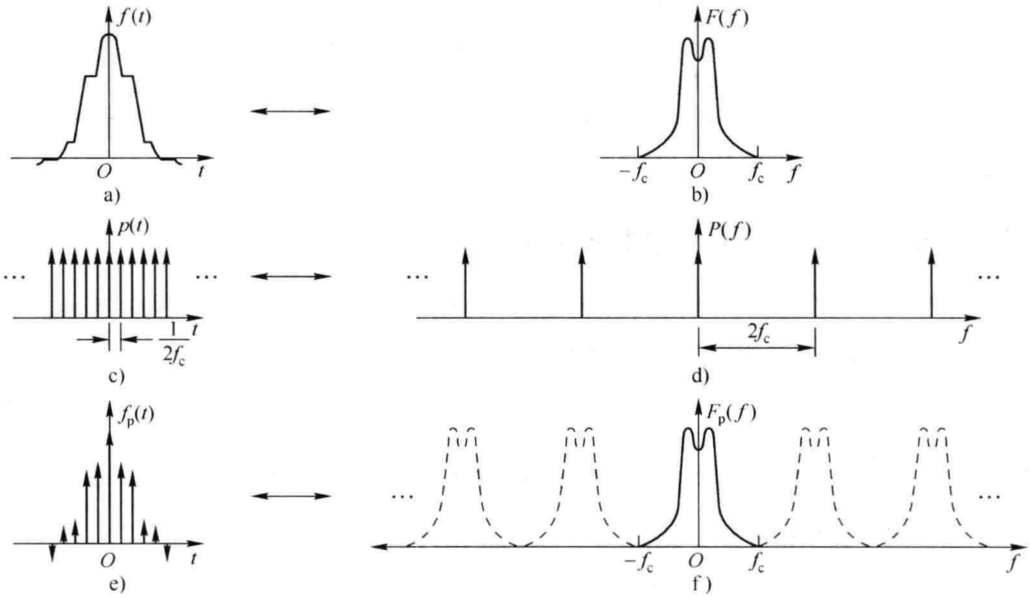


图 4-1　信号被采样时域过程（左）和频域过程（右）

又因为信号 $\sum f(nT_p)\delta(t-nT_p)$ 只与原信号 $f(t)$ 的部分点有关，这些点可以被看成从原信号 $f(t)$ 中取出来的样点，得到这些点的过程也很自然地被称为采样。而上面的推导又说明通过合适的采样得到的样点可以唯一准确还原原信号 $f(t)$，从而得到著名的采样定理。

定理 4-1（采样定理）　对于频谱非 0 范围为 $-f_c\leqslant f\leqslant f_c$ 赫兹的信号，当等间隔采样率 $f_p>2f_c$（每秒），或者等价地，采样间隔 $T_p=\dfrac{1}{f_p}<\dfrac{1}{2f_c}$（秒）时，采样点可以完整保存所有的信息。同时，$2f_c$（每秒）也被称为奈奎斯特（Nyquist）率。

三言两语

从上面基于频谱跟踪的推导也可以看出，其实也可以不等间隔采样，只要从采样后信号的频谱中能找到完整干净的一段频谱即可。各位去试试吧，看有没有什么发现？不过即使找到这样一个不等间隔采样，相对于等间隔采样有什么优势呢？

如果采样不满足采样定理，即采样率小于奈奎斯特率，将被称为欠采样。当欠采样发生时，频谱重复片段会有重叠，如图 4-2 所示。当发生重叠时，就不太好还原原信号了。

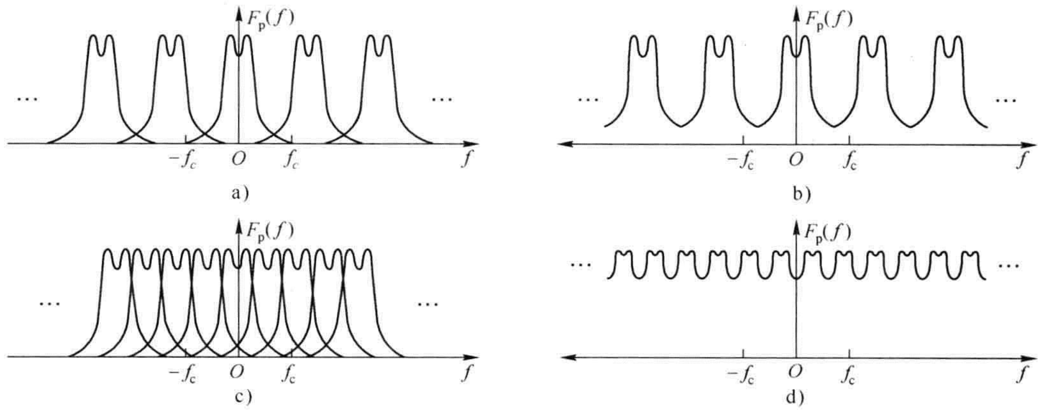


图 4-2　信号欠采样造成频谱重叠

当满足采样定理时，我们说把采样后信号的频谱再滤出来一个重复片段即可恢复原信号，到底怎么滤？准确的数学描述或含义又是什么呢？下面我们就讨论如何通过滤出一个片段来恢复原信号。

4.1.3　拿信号的 DNA 克隆原信号

假设现在已经使得相邻两个重复片段没有交叠，即 $\omega_p > 2W_c$。要重新得到 $f(t)$，只需要让采样后的信号通过一个滤波器滤出一片频谱即可，我们就滤出频谱原点（零频）附近那一片吧，如图 4-3 所示。该所谓滤波器其实为一个线性系统，其传递函数为

$$H(\omega)=\begin{cases}T_p, & -W_c-\hat{\omega}\leqslant\omega\leqslant W_c+\hat{\omega},\hat{\omega}\geqslant 0\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

则，容易看到

$$F(\omega)=\left[\frac{1}{T_p}\sum F(\omega-n\omega_p)\right]H(\omega)\tag{4-8}$$

只要 $\hat{\omega}$ 在两个重复频谱片段的间隔之内，即 $0\leqslant\hat{\omega}<\omega_p-W_c$，式(4-8)就是恒成立的。

当 $\hat{\omega}=0$ 时，即滤波窗宽度刚好等于信号的非零频谱宽度，下面讨论中称为截止频率滤波，如图 4-4a 所示；当 $\hat{\omega}>0$ 时，也即我们在滤波时，不是刚好只把一份频谱滤出来，而是多滤了一些（空白部分）出来，下面讨论中称为非截止频率滤波，如图 4-4b 所示。

注意到，上面式(4-8)中我们已经在频域还原了信号 $f(t)$，即得到了 $F(\omega)$。但从得到的结果似乎不能比较直观地看到采样的痕迹，那就没意义了，不过也许在时域信号表示上可以看

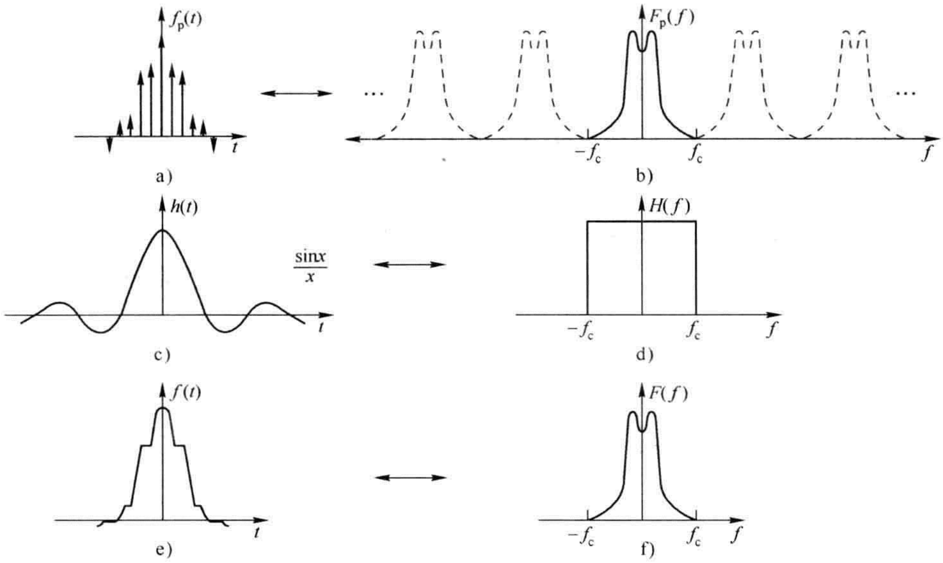


图 4-3　信号还原时域过程(左)和频域过程(右)

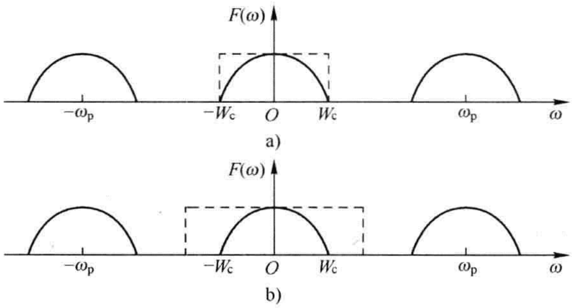


图 4-4　截止频率滤波和非截止频率滤波

到。那下面我们就把 $F(\omega)$ 通过傅里叶逆变换变到时域看看。

$$f(t)=\int F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{4-9}$$

$$=\int\left[\frac{1}{T_p}\sum_n F(\omega-n\omega_p)\right]H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{4-10}$$

$$=\left[\sum_n f(nT_p)\delta(t-nT_p)\right]\otimes\left[\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}\right] \tag{4-11}$$

上面最后一步用到傅里叶变换“频域乘积,时域卷积”性质。注意到,

$$H(\omega)=T_p\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{2W_c+2\hat{\omega}}\right) \tag{4-12}$$

那么,由讲过的方波信号傅里叶变换,可得

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}=\frac{T_p(W_c+\hat{\omega})}{\pi}\mathrm{sinc}((W_c+\hat{\omega})t) \tag{4-13}$$

代入式(4-11)继续展开,得

$$f(t)=\left[\sum_n f(nT_p)\delta(t-nT_p)\right]\otimes\left[\frac{T_p(W_c+\hat{\omega})}{\pi}\mathrm{sinc}((W_c+\hat{\omega})t)\right] \tag{4-14}$$

$$=\frac{(W_c+\hat{\omega})T_p}{\pi}\sum_n f(nT_p)\operatorname{sinc}[(W_c+\hat{\omega})(t-nT_p)] \tag{4-15}$$

可以看到在满足采样定理的前提下，信号 $f(t)$ 可以由采样点按照式(4-15)重建，或称为用采样点进行插值，用到的插值信号为 sinc 信号，如图 4-5 所示。

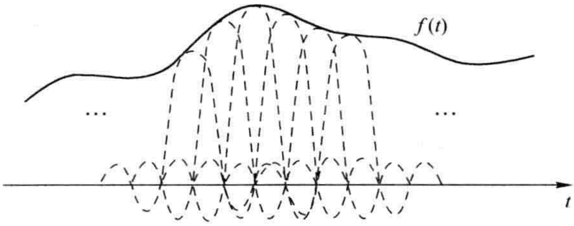


图 4-5　信号由 sinc 信号重建

从上面的讨论中，我们知道在满足采样定理的前提下，信号总是可以写成采样点与某个 sinc 信号相应平移的线性叠加，并且还比较灵活，形式多样：

1）首先，采样点的距离在大于奈奎斯特率前提下可随意调整；

2）即使把采样点距离固定，每个采样点处对应的 sinc 信号（宽度）也是可变的，由 $\hat{\omega}$ 决定。

下面我们再举一些例子来体会一下。

例 4-1　仍然假设信号 $f(t)$ 的非 0 频谱范围为 $[-W,W]$。假设采样速率 $\frac{1}{T_p}\to\infty$，即采样间隔 $T_p\to 0$。此时，两段重复片段相隔无穷远。但我们加窗滤波还原时，仍按截止频率加窗（$\hat{\omega}=0$）。由式子(4-15)可以看到，最后还原的信号被表示为

$$f(t)=\lim_{T_p\to 0}\frac{WT_p}{\pi}\sum_n f(nT_p)\operatorname{sinc}[W(t-nT_p)] \tag{4-16}$$

$$=\frac{W}{\pi}\int f(\tau)\operatorname{sinc}[W(t-\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{4-17}$$

这说明，信号 $f(t)$ 可以表示成 $f(t)$ 与 sinc 信号的卷积。

其实，这很显然，因为任何信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 总是可以写成

$$F(\omega)=F(\omega)\operatorname{Rect}(\alpha\omega) \tag{4-18}$$

其中，α 与信号 $f(t)$ 频谱宽度相关。根据“频域乘积，时域卷积”性质可知，必然信号 $f(t)$ 可以表示成 $f(t)$ 与 sinc 信号的卷积。

例 4-2　仍然假设信号 $f(t)$ 的非 0 频谱范围为 $[-W,W]$。假设采样速率 $\frac{1}{T_p}\to\infty$，即采样间隔 $T_p\to 0$。此时，两段重复片段相隔无穷远。但我们加窗滤波还原时，加一个无穷大的窗，即

$$\hat{\omega}\to\infty,\ \hat{W}=W+\hat{\omega}\to\infty$$

由式(4-15)可以看到，最后还原的信号被表示为

$$f(t)=\lim_{T_p\to 0}\lim_{\hat{W}\to\infty}\frac{\hat{W}T_p}{\pi}\sum_n f(nT_p)\operatorname{sinc}[\hat{W}(t-nT_p)] \tag{4-19}$$

由如何从 sinc 信号产生冲激信号的讨论（见附录 C）知，

$$\lim_{\hat{W}\to\infty}\frac{\hat{W}}{\pi}\operatorname{sinc}[\hat{W}(t-nT_p)]=\delta(t-nT_p) \tag{4-20}$$

则

$$f(t)=\lim_{T_p\to 0}\sum_n f(nT_p)\delta(t-nT_p)T_p=\int f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4-21}$$

怎么样，是否很熟悉？这不就是任何信号的冲激分解嘛！

4.1.4 最经济的采样——以奈奎斯特率采样

在采用定理的描述中，请注意我们一般都说的是$f_p > 2f_c$，这是有原因的。因为如果$F(f_c) \neq 0$，或者$F(-f_c) \neq 0$，若刚好$T_p = \frac{1}{f_p} = \frac{1}{2f_c}$，则采样后得到的信号频谱中两个重复片段刚好连在一起，相连的那个边界点，比如$f = f_c$处的频谱值会相互叠加，从而随后用截止频率滤波时（此时，只能用截止频率滤波），滤出来的频谱相对于原信号的频谱$F(f)$来说，在边界点$f = f_c$或者$f = -f_c$处频谱值失真，如图4-6所示。因此，从严格数学意义上来说，重建的信号不是原信号$f(t)$。但如果$F(-f_c)$和$F(f_c)$都等于0，叠不叠加都无所谓了。所以，只有特殊情况，比如当$F(f_c) = F(-f_c) = 0$时，采样间隔才能刚好取$T_p = \frac{1}{f_p} = \frac{1}{2f_c}$且取$\hat{\omega} = 0$，即刚好以奈奎斯特率采样才能严格数学意义上还原原信号。

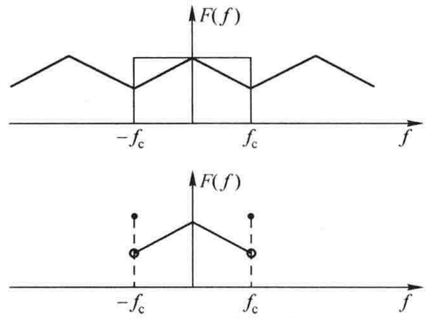


图4-6 边界点频谱失真

不过纠结于这个意义严格来说不是很大，虽然我们一般说一个信号的频谱主要是指频谱值不为0的那个区间，但是我们也总是可以把这个区间说得稍大一点，也即包含一点频谱值为0的区域，也没啥问题。比如信号$f(t)$频谱值不为0的那个区间是$-W \leqslant \omega \leqslant W$，我们一般会说信号$f(t)$是频谱在$[-W, W]$上的信号，但是我们也可以说信号$f(t)$是频谱在$[-W-\omega_0, W+\omega_0]$，$\omega_0 > 0$上的信号，也没什么错误。并且对于这种情况，为了方便描述，我们称之为"虚拟"频谱区间。显然，如果我们这样看，则任何信号$f(t)$的频谱我们基本上都可以看成是两个端点（边界点）的频谱值等于0的频谱，从而都可以说能以奈奎斯特率采样。

注意，当刚好以奈奎斯特率采样时，在表达式(4-15)中

$$f(t) = \frac{(W+\hat{\omega})T_p}{\pi}\sum f(nT_p)\mathrm{sinc}[(W+\hat{\omega})(t-nT_p)]$$

有$\omega_p = 2W$，$\hat{\omega} = 0$。那么，

$$f(t) = \sum f(nT_p)\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_p}{2}(t-nT_p)\right) \tag{4-22}$$

另一方面，注意到

$$\left\{\cdots, \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_p}{2}(t-nT_p)\right) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(t-nT_p)}{T_p}\right), \cdots\right\}$$

是一组正交基，那么刚好以奈奎斯特率采样的情况说明这样的$f(t)$能用这组正交基来表示，并且$f(t)$在这组基下的坐标就是且只能是$f(nT_p)$。然而，我们又说了，其实任何信号都可以在某种意义下说成是刚好以奈奎斯特率采样，那么也就是任何信号都可以由某组sinc信号正交基表示，仅仅sinc信号正交基的宽度不一样而已（因为采样间隔T_p不一样）。不过需要提醒的是，对于按"虚拟"频谱区间进行奈奎斯特率采样的那些信号，在滤波还原时，需要采用"虚拟"截止频率滤波才行，也即相对于"虚拟"频谱区间的截止频率滤波，而不是实际非零频谱区间的截止频率滤波。图4-7示意了按"虚拟"频谱区间$-W-W_0 \leqslant \omega \leqslant W+W_0$进行"虚拟"截止滤波的情形。

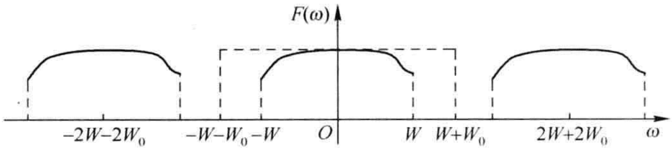


图 4-7　“虚拟”截止频率滤波

然而，当刚好以奈奎斯特率采样（可以包含以“虚拟”频谱区间来处理的情形）和按“虚拟”截止频率滤波两个条件至少一个不满足时（前者决定 T_p，后者决定 $\hat{\omega}$），由前面定理 2-4 中关于 sinc 信号正交基的讨论，我们知道一般情况下，

$$\{\cdots,\mathrm{sinc}[(W+\hat{\omega})(t-nT_p)],\cdots\}$$

并不是一组正交基，虽然这些情况下，$f(t)$ 仍可以由采样点表示出来，但是 sinc 信号前面的系数并不唯一，即是说采样点序列换成其他序列仍然成立。

提醒

不过强调一下，这里说的是换成其他序列，不是说换成其他采样点序列。显然，相同位置采样，采样点序列都变了，信号当然是不同的信号了。

1. 采样偏差影响

上面讲的采样序列是过坐标原点的，即在原点处有采样，整个采样序列相对于原点偏移会怎样？根据上面的推导，重新按偏移情况写一遍，留做练习。

另一方面，现实中的时间是绝对的，但在描述信号时，一般是用的相对时间坐标，即按照需要自己设定原点在哪儿。当设定好一个原点，按照过原点的采样序列采样，就是上面的推导；如果对同一个信号，用相对于原点偏移的采样点序列来采样，觉得不好理解，则你可以把原点重新设定在某个偏移后的采样点上，那又满足上面的推导了，即偏移后的采样序列也能唯一还原重新设定原点的信号。注意，不管我们把原点设定在哪儿，被采样的信号实质是没变化的，那就是说不管采哪些点，只要采样间隔大于奈奎斯特率就行了。

思考一下

对信号 $\mathrm{sinc}(t)$ 自身应用采样定理，观察一下有什么有趣的发现？

前面，我们弄出了傅里叶级数或傅里叶变换，我们就想去看看信号的其他特征，如功率，能量等，在新的形式下是个什么样子。现在弄出了采样定理，它和信号功率，能量等又有什么关系呢？

性质 4-1（采样点与信号能量关系）　假设按间隔 T 采样对于信号 $f(t)$ 来说是满足采样定理的，即 $f(nT)$ 是对 $f(t)$ 按大于（或等于）奈奎斯特率采样得到的采样点，那么信号的能量

$$\int |f(t)|^2\mathrm{d}t = T\sum_n |f(nT)|^2 \tag{4-23}$$

或者，信号的功率

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2NT}\int_{-NT}^{NT}|f(t)|^2\mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty}\frac{n=\sum\limits_{-N}^{N}|f(nT)|^2}{2N} \tag{4-24}$$

证明 只要是满足采样定理,那我们就一定可以用("虚拟")截止频率滤波还原,即信号 $f(t)$ 总是可以写成

$$f(t) = \sum f(nT)\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)$$

注意到此时 $\left\{\cdots,\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right),\cdots\right\}$ 是一组正交基,同样由模与坐标的关系可得

$$\int |f(t)|^2\mathrm{d}t = \sum_n |f(nT)|^2\int\left|\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)\right|^2\mathrm{d}t = T\sum_n |f(nT)|^2$$

能量部分得证,功率部分显然。

这个结论很有意思,一些直观的事实,在满足采样定理的条件下,采样点增加,显然采样点的平方和就增大,但注意到此时,采样间隔 T 在变小,最后的总效果是保持不变,都等于信号的能量。更有意思的是,当采样间隔 $T\to 0$ 时,有

$$\lim_{T\to 0}T\sum_n |f(nT)|^2 = \int |f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{4-25}$$

这不就是信号能量的定义嘛。

最后,线性空间知识(基,坐标)在前面的傅里叶级数和傅里叶变换等推导中,似乎是万能灵药一样,所向披靡啊。不知对于采样定理还灵不灵? 嘿,你别说,只要仔细、灵活地分析,一样能制服采样定理。具体分析推导见附录 C,请有兴趣的同学立即跳转。

4.1.5 落实现实信号的采样与重建

1. 现实之信号时域有限

现实中,信号都是时域有限的,就是说频带是无限的,就不可能完全无误地恢复信号了,怎么办?

回到采样后的序列频谱推导,可以看到不管被采样信号频谱是否有限,采样后的频谱为被采信号的频谱的周期重复。只不过,当频谱无限时,无论怎么采样,重复的频谱片段都是有交叠的。然而,当我们以能量集中的那部分频谱(比如包含 99% 能量)带宽为准,进行采样后,可以使得至少能量集中的那部分不会相互重叠。从而加个滤波器可以把能量集中的那部分滤出来,得到信号的近似频谱,当然也得到原信号的近似信号。现在,我们会发现滤出来的那部分相对于被采信号真实的频谱来说有两部分误差:其一是被截断了(如图 4-8 中斜线阴影部分);其二是,即使是保留的那部分也不是和简单截断能量集中之外剩下的部分,原因是其他重复片段也有一小部分延伸进入被滤出的那一部分了(如图 4-8 中格子阴影部分)。这两部分引起的误差,可以认为在时域叠加了干扰。若引起误差部分能量很小(比如 1%),根据能量守恒,也就是在时域所叠加干扰的能量很小。在允许的失真范围内,采样定理还是有现实指导意义的。

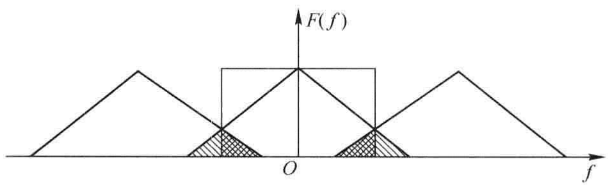


图 4-8 不同阴影部分所示两部分误差

2. 现实之非理想冲激采样

上面讲了现实中不可能有真正满足奈奎斯特率采样的信号。采样信号也一样，前面理论讨论中，采样信号为理想的周期冲激信号序列，现实中也不可能真正实现的。现实中，采样电路不可能采样一个点后，瞬时就断掉了，总是需要持续一定的时间。比如零阶保持采样，每采样一个点，产生一个以采样点为幅度的方波信号，如图 4-9 所示。

不过大家一定不要把零阶保持采样和信号乘以周期方波信号混淆了，后者的效果如图 4-10所示，注意区别。

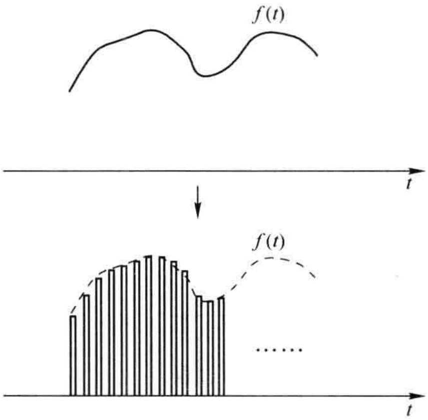


图 4-9　零阶保持采样信号

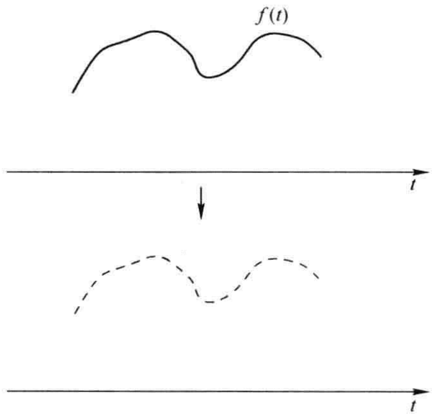


图 4-10　信号乘以周期方波信号

零阶保持采样后的信号形如

$$\sum_n f(nT)\mathrm{Rect}(\alpha t - n\beta) = \left[\sum_n f(nT)\delta\left(t - n\frac{\beta}{\alpha}\right)\right] \otimes \mathrm{Rect}(\alpha t) \tag{4-26}$$

$$= \left\{f(t)\left[\sum_n \delta\left(t - n\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]\right\} \otimes \mathrm{Rect}(\alpha t) \tag{4-27}$$

而信号乘以周期方波信号得到的信号形如

$$f(t)\left[\sum_n \mathrm{Rect}(\alpha t - n\beta)\right] = f(t)\left\{\left[\sum_n \delta\left(t - n\frac{\beta}{\alpha}\right)\right] \otimes \mathrm{Rect}(\alpha t)\right\} \tag{4-28}$$

前者为先乘积再卷积，后者为先卷积再乘积，其中 α, β 的值可根据具体情况来定。整个零阶保持采样的时域变换等价过程为：先对信号 $f(t)$ 用冲激信号采样得到采样冲激信号序列，该冲激信号序列再和一个方波信号卷积。该等价过程的时域变换和频域变换如图 4-11 所示。

假设信号 $f(t)$ 的非零频谱区间为 $[-W, W]$，对于零阶采样后的信号，若要理想还原，只需要加一个频谱如下的滤波器就可以了：

$$\frac{1}{\frac{1}{|\alpha|}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)}, -W \leqslant \omega \leqslant W$$

这个过程也可以分解成两个步骤来看，先加了一个如下所示的频谱无限的滤波器：

$$\frac{1}{\frac{1}{|\alpha|}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)}, -\infty \leqslant \omega \leqslant \infty$$

接着又套了一个理想矩形滤波器

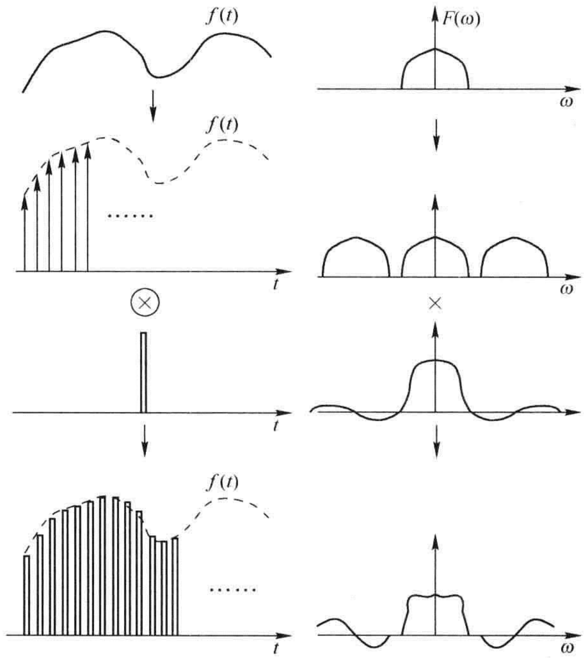


图 4-11　零阶保持采样等价时域(左)和频域(右)过程

$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{2W}\right)$$

其他形状的非理想冲激采样信号的分析与此类似,不一一讨论了。

3. 现实之非理想滤波器

前面采样后讨论的频域滤波器都是理想的,即可以刚好滤出想要的那一段,其他部分为0。这样一个滤波器现实中本来就是没有的,因为该滤波器作为一个系统的传递函数为频域有限的,其时域冲激响应必然是无限的,这样的滤波器不可能现实存在。现实中的滤波器必然时域冲激响应是有限的,从而频域必是无限的,从而采样后滤波时也不是刚好只把一段给滤出来了,其他段也会有。好在,虽然我们不能把滤波器频域做成有限的,但是可以把想要的频带之外的部分其取值尽量做小,比如频域信号 sinc($\alpha\omega$)虽无穷,但尾巴是衰减的。这样其他段虽有,但是可以保持能量很小,从而和上面类似,等价于时域叠加了个小干扰,也许还可用。当然,sinc($\alpha\omega$)的尾巴衰减还不够快,可以做到衰减得更快,尾巴更小,比如下面定义的采用升余弦滚降滤波。

定义 4-1(升余弦滤波器)　升余弦滤波器(Raised-cosine-filter)的频域(线频率)定义为

$$H(f)=\begin{cases}T, & |f|\leqslant\dfrac{1-\beta}{2T}\\ \dfrac{T}{2}\left[1+\cos\left(\dfrac{\pi t}{\beta}\left[\ |f|-\dfrac{1-\beta}{2T}\right]\right)\right], & \dfrac{1-\beta}{2T}<|f|\leqslant\dfrac{1+\beta}{2T}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{4-29}$$

其对应的时域信号为

$$h(t)=\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi\beta t}{T}\right)}{1-\frac{4\beta^2t^2}{T^2}} \tag{4-30}$$

其中，β 称为滚降系数。

图 4-12 和图 4-13 示意了不同滚降系数的升余弦时/频域信号。从中可以看到，理想滤波器（或 sinc 信号）其实是对应于滚降系数为 0 的升余弦信号；而尾巴最小的是滚降系数为 $\beta=1$ 的信号。

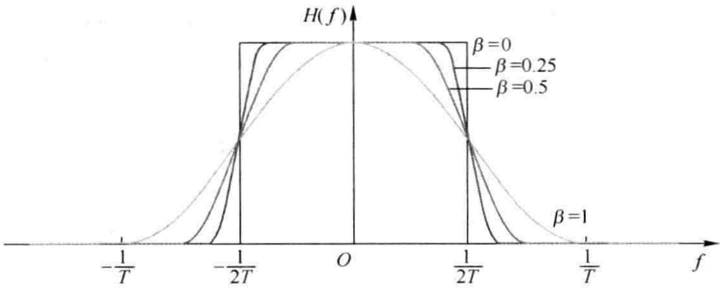


图 4-12　不同滚降系数的升余弦频域信号

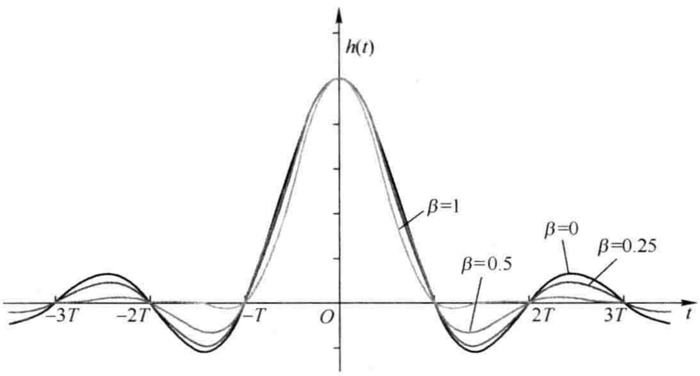


图 4-13　不同滚降系数的升余弦时域信号

4. 略做小结

通过上面的讨论，我们知道现实采样面临如下这些问题：

- 不可能满足奈奎斯特率。
- 不可能冲激采样。
- 不可能理想滤波。

后续我们不会具体讲解现实中如何采样，有哪些现实滤波器等，这些内容请大家以前面讲的理论为基础去学习更专业的课程或专业资料。下面，我们只提前给大家一些定性的概念。

现实中采样没有一样和理论采样条件相符合，并不代表采样理论完全没用，因为我们需要分析评估所设计的现实采样系统的性能，还需要借助采样理论分析，至少作为分析中间过程不可或缺的一步。比如，上面讨论的零阶保持采样，我们分析时，采用的等价过程中就借助理想情况作为中间过程来分析。所以，理论仍然是最基本的，需要深刻理解。

虽然有这么多非理想因素，现实中以能量集中部分带宽为基础的现实采样，再现实滤波还原出来得到的信号，从时域和频域来看，都可以足够近似原信号。

另一方面，在后面将要重点讲到的数字通信，大多数时候，更不要求电磁信号完全精确，足够近似就可以了。当然，这也是数字通信的一个优点。

最后，前面所有关于采样的讨论都是以基带信号为基础的。但信号不一定都是基带信号，如果信号是频带信号会怎么样呢？回忆频带信号一般指频谱非0范围不是刚好在零频（$\omega=0$）附近的那些信号，比如频谱非零范围为$0<W_1\leqslant\omega\leqslant W_2$或者频谱非零范围为$[-W_2,-W_1]\cup[W_1,W_2]$等。关于频带信号采样，本书不打算详细讲，分析方法和上面类似。毫无疑问，频带信号可以当成一种特殊的基带信号来处理，即仍然以大于最高频率两倍来采样，一定可以无失真还原。比如，即使频带信号为$\cos(\omega_c t)$，我们也可以以大于$2\omega_c$速率采样来还原。但问题是，频带信号的最高频率可能很高，这样的话采样速率要求太高了。同时，人们又注意到，虽然最高频率很高，但真实非零带宽可能很小，有没有可能将采样速率与真实非零带宽联系起来呢？从而以更低的采样速率达到无失真效果。这也是频带信号采样主要研究的内容。

答案当然是有可能的，具体是多少，留做练习，请读者朋友自己推导。原理和基带信号常规推导方法一样，反正以任何速率采样，都是信号频谱的重复，只要弄出一份没有重叠的频谱就好了。

小结（采样定理的现实意义） 对于现实通信系统来说，要发送和接收的信号的宽度是根据提前设计的通信系统占用的频带宽度来设计的，是受限于系统频带宽度的。比如，通信系统将要运行的频率及带宽为1920～1925 MHz，那么所有在这个通信系统里发送接收的模拟信号带宽不能超过5 MHz，至少能量集中部分不能超过5 MHz。并且，发射端设备和接收端设备的制造设计者当然也是提前知道这一点的。对于发射端设备来说，它要发送这么宽的信号，首先它得生成这么宽的一个信号。怎么生成简单呢？要知道带宽不超过5 MHz的信号有无穷多，这些模拟信号可是千差万别的，如果每个信号都直接由电路实现，那电路会非常复杂。这时，要是在生成这些模拟信号的每一个模拟信号之前，先通过其他办法（这里先不讲哪些具体办法）知道当前要生成的模拟信号的满足采样定理（现实意义下满足）的采样序列那就好办了：我的电路只需要实现一个波形的模拟信号，即sinc信号，就可以了。其他所有模拟信号都可以利用sinc信号和采样序列、做一些简单的机械的放大/缩小、平移/相加就都可以实现了。

另一方面的现实意义是，目前的趋势来说，数字手段的通信的应用越来越多，而数字手段首先要涉及数字化，或者说离散化，而显然采样就是很简单直接的一种对模拟信号的离散化手段了。先说这么多，后面我们还会具体讲。

再来和泰勒（Taylor）展开比较，采样定理和泰勒展开有什么区别啊？从表示论来说，没什么区别，两者都是通过一序列离散值来决定原连续信号。用线性空间的观点来看，就是同一向量在不同基下的表示，坐标不同而已。话虽如此，但还是有一些细节区别的，比如通过泰勒展开，很难看清楚信号到底会有什么样的具体取值；而通过采样定理，至少知道采样点的位置的取值；另一方面，从实现来说，采样定理重建原信号只需要把同一个信号简单地乘以一个系数，平移、相加就行了，都是简单的操作，而泰勒展开就复杂得多了，泰勒展开处理的基本单元是不同阶数的指数函数x^n。

4.2 离散傅里叶变换——不仅仅是两串序列变来变去

在现实数据处理中，例如计算机处理，更倾向于处理离散的、有限的数据，也就是不论从时域，频域都希望是离散的。

4.2.1 离散时间序列的傅里叶变换（DTFT）

假设 $F(\omega)$ 为区间 $-\frac{W}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{W}{2}$ 上的信号（可以是讨论采样时提出的"虚拟"频谱区间概念），记

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$$

不妨设 $F\left(-\frac{W}{2}\right)=F\left(\frac{W}{2}\right)=0$。由性质 2-4 知，那它可以由正交基

$$\{\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\frac{2\pi}{W}\omega},\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{W}\omega},1,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{W}\omega},\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\frac{2\pi}{W}\omega},\cdots\}$$

来表示，其中 $-\frac{W}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{W}{2}$。首先根据坐标计算方法，把信号 $F(\omega)$ 在该组基下的坐标写出来为

$$\frac{\int F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{2\pi}{W}\omega}\mathrm{d}\omega}{\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}\mathrm{d}\omega}=\frac{2\pi f\left(-\frac{2n\pi}{W}\right)}{W} \tag{4-31}$$

那么，我们看到 $F(\omega)$ 居然能由 $f(t)$ 的一系列离散点的值和一组基线性组合表示出来，离散点可以看成是通过采样得到的，即有

$$F(\omega)=\sum_n\frac{2\pi f\left(\frac{2n\pi}{W}\right)}{W}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{2\pi}{W}\omega}\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{W}\right)\right] \tag{4-32}$$

这个思路的具体推导在附录 C 里从线性空间推导采样定理时有详细介绍。我们已经看到，频带有限信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 可以由 $f(t)$ 的采样点与截断三角函数正交基来表示。同样频带无限信号也可（以能量集中带宽为基础）如此得到近似的频谱。

现在假设 $f(t)$ 的带宽为 $\frac{-W}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{W}{2}$，以等间隔 $\frac{2\pi}{W}$ 采样得采样点序列为

$$\{\cdots,f_0,f_1,\cdots,f_N,\cdots\}$$

则它的频谱 $F(\omega)$ 形式为

$$F(\omega)=\sum_n\frac{2\pi f_n}{W}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n\frac{2\pi}{W}},\frac{-W}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{W}{2} \tag{4-33}$$

把非本质的常数项 W，2π 去掉，即伸缩变换到简单形式，实际中需要的话相应伸缩回去就行了

$$F(\omega)=\sum_n f_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega},\ -\pi\leqslant\omega\leqslant\pi \tag{4-34}$$

式（4-34）称为离散时间序列 $\{\cdots,f_0,f_1,\cdots,f_N,\cdots\}$ 的傅里叶变换。从上面的讨论知，考虑信号的频谱，除了最直接的按信号的傅里叶变换定义来看，这里又多提供了一种方法，即以采样点序列的傅里叶变换来讨论。

现实信号总是时间有限的,频域无限的。那么按能量集中带宽采样只能得到有限个采样点,下面重点看看有限个采样点的情况。现在假设 $f(t)$ 按能量集中部分以间隔 T_s 采样得到有限个采样点为

$$\{f_0, f_1, \cdots, f_{N-1}\}$$

则信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 近似为

$$F(\omega) \approx \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2\pi f_n}{W} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n \frac{2\pi}{W}},\ -\frac{W}{2} \leqslant \omega \leqslant \frac{W}{2} \tag{4-35}$$

其中 $T_s = \frac{2\pi}{W}$。把非本质的常数项去掉,得到该有限离散时间序列的傅里叶变换

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega},\ -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi \tag{4-36}$$

4.2.2 离散傅里叶变换(DFT/IDFT)——完美的蜕变

注意到,由式(4-34)、式(4-36)定义的离散时间序列的傅里叶变换仍然是以 2π 为周期的连续信号(先不看自变量的限制范围),只要知道任何一个周期的频谱,就可以还原任何自变量范围的频谱,但还不是离散的。为了和其他资料保持一致,接下来我们把自变量范围稍微调整一下,调整到 $[0,2\pi]$。要离散化,我们知道最简单的操作就是“采样”。那我们就在 $[0,2\pi]$ 区间上等间隔采 N_c 个点看看有什么发现。这 N_c 个点为

$$F\left(\frac{2\pi k}{N_c}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi nk}{N_c}},0 \leqslant k \leqslant N_c - 1 \tag{4-37}$$

再提醒一下,我们的初衷当然不是为了形式上的离散化而离散化,而是在还原意义上的离散化,即通过离散化出来的值我们能通过某种手段(或规则)知道这些离散值对应哪个离散序列的傅里叶变换连续谱。这里就是,通过 N_c 个点 $F\left(\frac{2\pi k}{N_c}\right)$ 知道 N 个点的离散序列 f_k。也就是说,它们需要有个一一对应的关系。那它们有一一对应的关系吗?通过对三种情形讨论:$N_c < N, N_c = N, N_c > N$,知,后两种情形可以使得有一一对应关系,具体讨论见附录 C。由此,我们可以总结得到离散傅里叶变换及逆变换(DFT 及 IDFT)相关知识。

定义 4-2(离散傅里叶变换及逆变换) 两个长度为 N 的序列 x_n 和 X_n 可以通过一对互逆运算相互一一确定

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi nk}{N}} \tag{4-38}$$

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}2\pi nk}{N}} \tag{4-39}$$

通常,仍然称 x_n 为时域序列,X_n 为频域序列。当然,序列 x_n 与 X_n 的关系也可以用如下的矩阵形式表示出来:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 0\cdot i}{N}} & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 1\cdot i}{N}} & \cdots & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 1\cdot (N-1)}{N}} \\ & & & \vdots & \\ 1 & \cdots & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot (N-1)\cdot i}{N}} & \cdots & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot (N-1)\cdot (N-1)}{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \tag{4-40}$$

式(4-40)右边那个大矩阵一般称为 DFT 矩阵(本书记为[DFT]),其逆矩阵也就是 IDFT 矩阵(本书记为[IDFT])。

下面简单说明一下 IDFT。注意到式(4-40)等价于

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 0\cdot i}{N}} \\ \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 0\cdot i}{N}} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot(N-1)\cdot i}{N}} \end{pmatrix} \tag{4-41}$$

也就是说,DFT 之后序列 X_n 是 N 个向量的线性组合,而这 N 个向量我们已经证明过是正交的(见附录 C),也就是一组正交基;另一方面,DFT 之前序列 x_n 可以看成分别是这些基下的坐标,从而要给出 IDFT 的公式,其实就是计算序列 X_n 在各个基下的坐标。回忆一下普通向量的内积定义形式以及正交基下坐标计算公式可知,序列 X_n 在第 i 个基

$$[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi i\cdot 0}{N}},\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi i\cdot 1}{N}},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi i\cdot(N-1)}{N}}]^{\mathrm{T}},0\leqslant i\leqslant N-1$$

下坐标为

$$x_i = \frac{\sum_k X_k(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi ik}{N}})^*}{\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi ik}{N}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi ik}{N}})^*} = \frac{1}{N}\sum_k X_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi ik}{N}} \tag{4-42}$$

当然,同样,如果先有 IDFT 的定义,则 DFT 公式等价于求序列 x_n 在另一组基(取个共轭)下的坐标。

如何快速计算一个序列的 DFT 或 IDFT 呢? 对应的快速算法有快速傅里叶变换及逆变换(FFT 及 IFFT),本书不详细讲了,请读者自行查阅相关文献。

三言两语

最后再强调一遍,离散傅里叶变换是用离散数据来分析信号频谱的工具,一定要把如何从信号的连续谱过渡到离散数据的离散傅里叶变换的原理搞清楚,不然凭什么说它可以用来分析频谱,凭什么把两个序列一个叫时域序列,一个叫频域序列,它们就是两串能等价表示的数而已!

4.3　OFDM 基本原理——是否出场太早?决不!

正交频分复用(Orthogonal Frequency Division Multiplexing,OFDM)技术现在很火,也是现在比较主流的调制方式及复用方式,目前相对比较前沿的几个标准如 WiMAX、IEEE 802.11n/ac、LTE/LTE - A 等都采用 OFDM 作为基本调制及复用方式。但是,该技术并不神秘,就目前我们讨论过的内容已足够揭开其神秘面纱,本节就讲一讲 OFDM 最基本的原理吧。

4.3.1　正交信号是基础

在前面的章节中,我们已经预告了一些 OFDM 的基本思想。假设现在有一堆数据符号序列 $a_0,a_1,\cdots,a_{N-1}$要发送,对于 OFDM 技术,最后发射的电磁信号为

$$S(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{j2\pi n\Delta ft}, t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{k}{\Delta f} \tag{4-43}$$

其中,每一个分量电磁信号

$$e^{j2\pi n\Delta ft}, n=0,\cdots,N-1$$

被称为子载波。可以看到,最后发射的电磁信号,是这些子载波的线性组合;而我们又知道,当 k 为非 0 整数时,子载波是两两相互正交的(请回忆截断正交基),即

$$\int_{t_0}^{t_0+\frac{k}{\Delta f}} e^{-j2\pi m\Delta ft} e^{j2\pi n\Delta ft} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{k}{\Delta f}, & m = n \end{cases}$$

那么最后发射的电磁信号 $S(t)$ 在各个子载波(基)下的坐标即为 a_n。另一方面,从频域来看,每个子载波对应的频谱为频域 sinc 信号,两两子载波之间的频谱是相互平移的关系,整个信号$S(t)$的频谱就是一系列 sinc 信号,如图 4-14 所示。

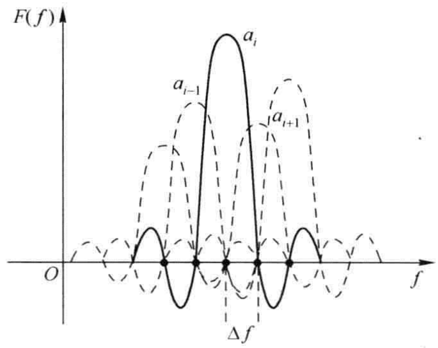


图 4-14 OFDM 信号频谱

我们也知道,这些频域上相互平移的 sinc 信号虽然看起来是有交叠的,但实际上它们(在信号常规内积下)也是两两正交的,这也就是"正交频分"的来历了。

现在的问题是,接收端收到这个整体信号 $S(t)$ 后,怎么把数据符号 a_n 抽出来呢? 提醒一点,接收端当然知道整体信号是上面的和形式,它只是不知道不同时刻和式中 a_n 具体是多少。

很简单,不还是求坐标吗? 这个我们再熟悉不过了。利用坐标计算公式,计算每个基下坐标,

$$a_n = \frac{\int S(t) e^{-j2\pi n\Delta ft} dt}{\int e^{j2\pi n\Delta ft} e^{-j2\pi n\Delta ft} dt} = \frac{k}{\Delta f} \int S(t) e^{-j2\pi n\Delta ft} dt \tag{4-44}$$

这样,通过 N 次坐标计算,接收端就可以得到所有发射端发送的数据 a_n 了。

从前面还可以看出,数据符号即使是给不同用户的也可以,只要分别告诉各个用户他们的数据在哪些子载波上即可。换言之,OFDM 还可以被用来作为一种不同用户的接入复用技术,即正交频分复用多址(Orthogonal Frequency Division Multiplexing Access,OFDMA)。

假设共有 N 个子载波,则每次传输能传 N 个数据符号。我们当然想在单位时间内尽可能多传几次。那么就要每次传输持续的时间尽量短,即 k 尽量小。但我们知道 k 最小也就是 $k=1$ 了,再小就不正交了。此时,持续时间为$\frac{1}{\Delta f}$,刚好为子载波中心频点间隔的倒数。这也是一个 OFDM 符号长度与其子载波间隔成倒数关系的原因。比如,我们知道 LTE 的子载波间隔为 15 kHz,相应地一个 OFDM 符号的长度约为 66.7 μs(不含 CP)。

注意到,假设现在给定的系统带宽为 B,子载波间隔为 Δf,那么一共可以划分成$\frac{B}{\Delta f}$个子载波,则每个 OFDM 符号能传输$\frac{B}{\Delta f}$个数据符号;而此时一个 OFDM 符号的长度为$\frac{1}{\Delta f}$,则单位时间内,比如 1s 内,OFDM 符号的个数为 Δf 个。那么,单位时间内,整个系统能传输的数据符号个

数为

$$\frac{B}{\Delta f}\cdot\Delta f = B \tag{4-45}$$

请注意,单位时间内整个系统能传输的数据符号个数和子载波间隔毫无关系,不管子载波间隔定为多少,最后能传输的数据符号总个数总是一样的。那是不是说,一个 OFDM 系统可以随便确定子载波间隔呢? 因为反正传的数据符号一样多? 这些内容将在本书第四部分更深入地讲 OFDM 系统时再介绍。

4.3.2　简化信号接收与 DFT

现在有个现实问题需要解决:在上面的讨论中,接收端要获得发射端的数据,需要计算不同基下的坐标 N 次,而每个坐标的计算都要用积分运算,即要用 N 个积分器同时工作才能分离数据符号。当子载波数量相当多时,每个子载波都需要一个相应的积分器,这样实现成本太高,系统太复杂。这一问题如何解决呢? 先看一下下面给出的公式。

记一个 OFDM 符号长度 $T_s=\frac{1}{\Delta f}$。对接收信号 $S(t)$ 以 $\frac{T_s}{N}=\frac{1}{N\Delta f}$ 为间隔采样,得到 N 个采样点 $A_n(n=0,\cdots,N-1)$,则有

$$S(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{j2\pi n\Delta ft} \Rightarrow A_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j2\pi\frac{kn}{N}} \tag{4-46}$$

可以发现,采样点和序列 a_n 的 IDFT 的值相等,这样在接收端先对信号 $S(t)$ 采样再进行 DFT 就可以还原 a_n 了。无论是采样还是进行 DFT/IDFT 运算,随着数字信号处理(Digital Signal Processing,DSP)能力的提高,相对于积分器来说,都变得简单了很多,这也使得 OFDM 技术更快地被纳入实际系统应用中。

并且,在接收端来说,采样 N 个点理论上是足够精确的。当然,也可以以任意大于 N 的整数来采样 $N_c>N$ 个点,此时采样点序列为

$$A_n = \sum_{k=0}^{N_c-1} a_k e^{j2\pi\frac{kn}{N_c}},0 \leqslant n < N_c$$

其中,当 $k>N$ 时,$a_k=0$。要得到真正发出的那些 a_k, $0\leqslant k\leqslant N-1$,取 A_n 的 DFT 的前 N 项就可以了。实际系统中,一般为了用得上快速算法 FFT/IFFT,一般取 $N_c>N$ 且为 2、3、5 的幂次,即 $N_c=2^a3^b5^c$。

三言两语

最后必须强调,不管发射端采取什么操作,只要保证最后发出的信号确实是 $S(t)$,那么接收端通过采样操作再进行 DFT 运算,理论上是一定能无误地得到发射端各子载波承载的数据的。换句话说,接收端的行为和发射端无关,特别地,和发射端是否采用 IDFT 没有任何关系。

思考一下　这里的采样点如果不是用来做 DFT 变换以求出 a_n,而是用来先插值还原原信号波形,再按基本原理的积分器能无误还原出 a_n 吗?

4.3.3　简化信号发射与 IDFT

发射端简化,主要是指什么呢? 这个我们在前面讨论采样的现实意义时已经讨论过了,发

射端简化主要涉及如何生成要发送的模拟信号,这里就是生成信号 $S(t)$。在介绍采样的意义时,我们讲过如果在生成这些模拟信号的每一个之前,先通过其他办法知道当前要生成的模拟信号的满足采样定理(现实意义下满足)的采样序列,那么只需要实现一个波形的模拟信号,即 sinc 信号,就可以了;其他所有模拟信号都可以利用 sinc 信号和采样序列,做一些简单的放大缩小和平移相加就都可以实现了。那我们首先看,该对 $S(t)$ 采样多少个点满足现实意义采样呢?首先根据图 4-14 所示的信号 $S(t)$ 的频谱示意图可知,对于有 N 个子载波的信号 $S(t)$ 来说,其频谱能量集中部分频带宽度大于 $N\Delta f$,也就是说如果以这个宽度来采样,则单位时间内要采样 $N\Delta f$ 个点;而一个 OFDM 符号持续的时间是 $\frac{1}{\Delta f}$,那么,对于一个 OFDM 符号的持续时间里,至少要采 $(N\Delta f)\cdot\frac{1}{\Delta f}=N$ 个点才差不多能得到与信号 $S(t)$ 比较近似的信号。在实际系统中,采样个数一般都远大于 N 个点。我们现在先假设只采样 N 个点吧。

我们现在先在逻辑上假设信号 $S(t)$ 已经生成了(实际没有生成),等间隔采样 N 个点得到的采样点序列是什么呢?这个和接收端就一样了,对信号 $S(t)$ 以 $\frac{T_s}{N}=\frac{1}{N\Delta f}$ 为间隔采样,得到 N 个采样点 A_n, $n=0,\cdots,N-1$,

$$S(t)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n e^{j2\pi n\Delta f t}\Rightarrow A_n=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{j2\pi\frac{kn}{N}}$$

即,采样点序列和序列 a_n 的 IDFT 的值是相等的。由这个原理,我们在实现的时候实际上并不是先生成 $S(t)$ 再采样得到其采样点序列,而是先直接通过数字处理手段(DSP),对要承载于各子载波传输的数据序列 a_n 先做 IDFT 变换得到序列 A_n,再利用插值函数 sinc 信号,结合 A_n 生成信号 $S(t)$ 近似信号。当然现实中不可能生成时域 sinc 信号,插值函数也就不可能真正是 sinc 信号,具体是什么这里就不讲了,从原理上看,我们当它是 sinc 信号就足够了。

现实中,需要的采样点个数一般远大于 N 个点,比如 $N_c\geqslant N$ 个点。简单写一下就可知道,采样 N_c 个点为

$$A_n=\sum_{k=0}^{N_c-1}a_k e^{j2\pi\frac{kn}{N_c}},0\leqslant n<N_c$$

其中,当 $k>N$ 时,$a_k=0$。即,需要先对数据序列 a_n 补 0,再计算 IDFT;一般所补的 0 对应的子载波被称为虚拟子载波。

另一方面,和接收端不同的是,发射端不论采样多少个点,理论上都不是足够的,都是一种近似处理,只是近似的程度不一样而已,原因是该信号 $S(t)$ 频率是无限延伸的。

三言两语

同样最后必须强调,不管接收端将要采取什么操作,发射端是不用管的,发射端只要保证最后发出的信号确实是 $S(t)$ 就可以了。特别地,和接收端用不用 DFT 没有任何关系。换言之,发射端不是因为配合接收端将要采用 DFT,所以才用 IDFT 的。

4.3.4 一段话总结

关于 OFDM,这里先讲这么多,以后讲无线部分时,我们再深入讲解。这里主要先讲了 OFDM 最基本的原理;然后讲了实现时 IDFT 和 DFT 在发射端与接收端各自的主要作用;特别

希望指出的是,IDFT 和 DFT 并不是天然应该成对出现的,也就是说,并不是因为其中一端用了 IDFT(或 DFT),另一端才凑个 DFT(或 IDFT)来对应的。

第一部分小结

第一部分主要围绕怎么认识信号来展开。所谓认识,就是从多个角度来挖掘信号的特征。在这里,对于信号,最直观的印象就是某个时间发生了代表某个意思的事情。如果把这个事情的过程或者说行为对应到一个数量,那么这个信号最终可以被表示成时间上的函数。有了这个最初的刻画,接下来我们就要想想看如何找到其他适合的角度去挖掘特征。比如我们可以考虑这么一个问题:$f(t)$ 和 $f(t-t_0)$ 是同一个信号吗? 从传递的信息来讲,肯定是同一个信号。所以,时间肯定不是信号的本质纬度,它只是一个载体。但我们确实又需要表明它们是发生在不同时刻的。能不能找到另外一个载体,来表示 $f(t)$ 和 $f(t-t_0)$,但不是用在载体上的相对位置来区分它们,而是用函数值来区分? 频域就是这么一个载体,函数值变成了复数。该复数的模承载信号的本质,而相位差则用于区分非本质的不同时刻。

上面仅是从一个例子来说明如何找到一些问题来考虑,更一般地,接下来我们用最自然的分解与组合的思想来研究。又特别地,我们从应用最广泛的线性分解与组合着手。要应用线性组合与分解,我们把其基本的理论,即线性空间理论在附录 A 作为重点进行了介绍。再下来,从不同的考虑,不同的侧重点,我们研究了几种线性分解与组合形式,包括冲激信号分解、傅里叶级数表示、傅里叶变换、采样定理导出的 sinc 信号表示,以及采样定理作为桥梁衍生出的离散时间序列的傅里叶变换和离散傅里叶变换。

对于一个事物,有些特征仅在某个分析角度才能看得到,但也有些特征是不依赖于分析角度的,比如信号的能量、功率等。那么就要研究特征在不同分析角度里表现形式的关系,比如时频能量守恒,以及采样点与能量关系等。

最后,通信的发生肯定是一个系统的概念,有信号发射端、传输媒介、信号接收端。因此我们介绍了一些系统的概念和研究方法。其实就是看输入和输出是什么。这一部分的重点是线性系统和时不变系统。线性系统,即多个输入叠加起来的输出为它们分别输出的叠加。这样就可以把输入信号按方便的形式分成小块,然后看每个小块的输出是什么,然后再叠加在一起,就得到整个原输入信号的输出。而分解成冲激函数 $\delta(t)$ 又是这一部分主要研究的问题,然后是卷积表示等。时不变系统又为什么重要? 因为人制造的系统几乎所有都是时不变的。如果是时变的,那几乎没法用了,因为你都不知道将会发生什么结果。

而通信的理想情况,就是对于发送方发送的信号,接收方能正确无误地接收到。当然,这个目标是整本书都要讨论的课题,本部分仅对信号的传输无失真做了介绍。

第二部分

基本通信原理

第一部分讲了什么是信号，并且重点放在了电磁信号本身的特性、信号表示及分析方法上面，而没有涉及如何从电磁信号上体现具体的消息的传递。

第二部分主要介绍怎么传递消息，以及在接收端怎么识别消息。我们首先从没有噪声的理想通信开始，重点介绍数字通信系统如何建立消息与数字信号的联系，传递消息过程中发送和接收电磁信号需要哪些处理，哪些处理或设计能实现准确无误的消息传递，理想情况下的极限传输能力是多少等内容。

其次，我们开始引入噪声，并介绍现实通信过程中的一个重要步骤——调制，为什么要调制？为什么要研究不同的调制方法？最后，因为噪声的污染，接收端接收的信号必然不能真实体现发射端想传递的信号，而通信的目的就是要获得发射端想传递的信号，那么这种情况下接收端如何确定发射端想传递的信号是什么呢？就这问题，我们也重点介绍了一些基本的信号接收判决方法。希望读者朋友阅读过程中多多体会和总结识别问题和分析、解决问题的思路。

第5章　从理想通信开始

本书第一部分,消息、信息、信号这些词是混着使用的。下面为了方便说明,我们明确定义以下概念。

- 消息:真正有意义,需要通信交互的东西,比如,“是否有外敌入侵”。
- 信号:用来承载消息的东西,比如,“狼烟”。

当前的主流通信手段,信号的最后形式都是电磁信号。第一部分,我们把重点放在了电磁信号本身的性质以及特征上,而未涉及电磁信号承载了什么消息,怎样用电磁信号来承载消息。现在我们逐渐把消息引进来,即需要联合考虑消息与信号的关系。

5.1　理想模拟信号通信

模拟信号通信大概可理解为,消息的获得在接收端来说,需要获知一个连续电磁信号。模拟通信系统主要流程如图5-1所示,如果系统里没有噪声,就是我们说的理想模拟信号通信。

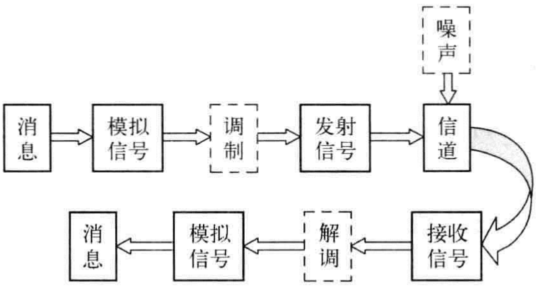


图5-1　模拟通信系统主要流程

对于模拟信号通信情形,假设一个消息已经被表示成了电磁信号,但接收端必须由完整的电磁信号上的每一个取值才能解读正确,那理论上正确通信的条件是什么?比如,最初的模拟语音实现,语音直接就被转换成了电压或电流信号,接收端也是直接把电压或电流信号直接转换成语音了。这种情况,消息的正确接收(或正确解读)理论上依赖于电磁信号每个时刻的取值,理想的通信就是保证每个时刻的取值都能正确被还原出来。

这个问题,其实就是我们第一部分里讨论信号传输无失真的内容。只要保证电磁信号的传输无失真,这类系统的消息传递就是无失真的。这种情形一般存在于消息天然就能很方便地用电磁信号表示的场景,比如,语音或其他消息可以很简单地用传感器转化为电磁信号。具体怎么达到传输无失真,第一部分已经讲了,本节就不再讲了。

5.2　理想数字信号通信

数字信号通信大概可理解为，消息的获得在接收端来说，只需要获知一些离散的数据就可以了。数字通信系统主要流程如图 5-2 所示，其中如果系统里没有噪声，就是我们说的理想数字信号通信。

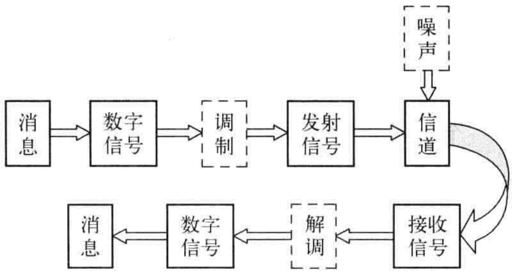


图 5-2　数字通信系统主要流程

但我们又说过，无论怎样，实际上的发射信号和接收信号还是电磁信号。那么，这就隐含了至少两个方面的过程：

（1）如何把消息转换成离散的数据。

（2）这些离散的数据又是如何转换成最后传输的电磁信号的。

下面我们就基于这些考虑来讨论。

5.2.1　生成——从声音如何得到数字信号

现实中的消息是丰富多彩的，绝大多数消息，并不是像语音一样能方便地转换成电磁信号，比如文字和图片。语音可以天然地产生机械振动，再由机械振动产生电流和电压的变化，从而生成电磁信号；而文字和图片这种静态的消息，需要先被表示成一个中间逻辑状态，或称为消息代码，比如中文文字的 GBK 码、英语字母的 ASCII 码、图片的像素信息等，然后再把这些逻辑状态表示成电磁信号。

把消息变成对应的逻辑状态涉及信源编码的问题，这也是现实中应用软件需要解决的问题。信源编解码现实的手段就是把消息数字化。举个例子，我们从网上下载的音乐、电影等视频文件，存储在计算机中的只是一些数字序列。要打开这些文件，就必须使用相应的软件（如暴风影音等），将这些数字转换为具体的声音、视频等，我们才能看见。

本书基本上不涉及信源编解码，只关心如何传输正确。

上面说了中间状态一般就是一堆数，在传输过程中这一堆数一般是按一个顺序传输的，就是一个数字序列（这大概已经有数字信号的意思了）。记消息对应的数字序列为$\{\cdots,a_n,\cdots\}$。也就是说，理想情况无误通信需要从接收到的电磁信号正确恢复这个序列。可以想象，这个过程又涉及三个方面的问题：

（1）发射端怎样把数字序列表示成电磁信号？

（2）传输过程经过什么样的信道，信道响应是怎样的？

（3）接收端的“恢复”是基于什么操作而来的？

下面我们从这三方面讨论。

5.2.2 发射——数字信号如何发射出去

首先,要用电磁信号来表示数字信号,也就是要为每个消息对应的数字序列选一个电磁信号来表示。如果你把每个序列用一个和它不能建立某种联系(如隐含关系)的电磁信号来表示,就要实现正确通信又退化到模拟信号通信的情形了,即你只能先正确接收到模拟信号,然后根据映射表找它对应的数字序列才能达到无误通信。

这个在实际通信过程中是基本不可行的,因为接收端要完成电磁信号到数字序列的解映射,首先接收端必须先准确识别接收到的电磁信号,怎么识别?这是一个很难实现的问题,别说机器了,就算是人要识别一个连续信号也是很难的。给个例子来说,现在给你看有微小差别的两条曲线(信号),然后只给你单独看其中一条,你怎么准确识别单独的这一条是最开始给你看的两条中的哪一条?

另外,这种情况需要解映射,就需要先把映射关系存储起来,而发射端和接收端也没办法存储这样一个数字序列和电磁信号之间的映射表。图5-3示意了一个数字序列到模拟电磁信号的映射表,如果采用这种方式,则需要预先把所有可能要传递的数字序列(包括不同序列长度)以及对应的模拟电磁信号确定下来,想想就知道多复杂了。并且这种产生模拟电磁信号的方法现实中还有时延问题,即发射端要等到知道了整个要传输的序列,才能根据映射表选相应的电磁信号开始发送。试想如果要传输的是一部两小时的电影,发射端得等多久才知道该发哪个电磁信号?接收端也得把电影对应的整个电磁信号接收完毕才能开始观看,用这种方法要想实现在线高清播放,可能性几乎为0。除了列举的这些,这个思路还有其他问题,所以,我们还是想其他出路吧。

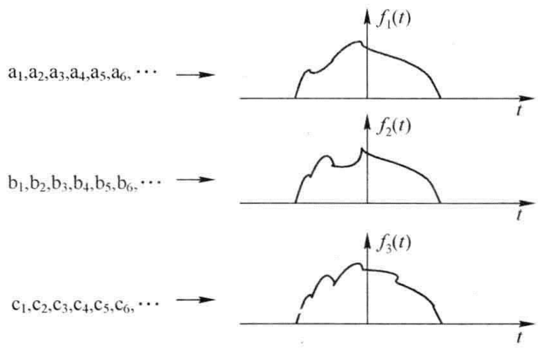


图5-3 数字序列到模拟信号映射表

最自然的避开上面讨论的映射表的方法,就是由序列自身"触发"生成该序列对应的电磁信号,即要求序列主动参与它自己对应的电磁信号的生成。好好体会"触发"二字,好好体会这个思想。而最自然的"触发"就是先设计好一个基本信号 $g(t)$,然后序列里的每个元素 a_n"触发"一个幅度为该元素值的基本信号的放大缩小版 $a_ng(t)$。而这个基本信号可以是冲激信号,可以是方波信号,也可以是其他任何信号。那么,消息对应的数字序列就被表示成了电磁信号,且这种思路里该电磁信号还可以分解成更短的电磁信号序列 $a_ng(t)$。按照这种思路,接收端若能正确接收到该电磁信号序列,显然不用什么查表对应处理,就可以知道要发送

的数字序列，因为最后接收到的序列$\{\cdots,a_n g(t),\cdots\}$暗示了要发送的数字序列$\{\cdots,a_n,\cdots\}$。是不是简单很多?

假设所述基本信号为$g(t)$吧，数字序列发送时间间隔为T_s，那么数字序列$\{\cdots,a_n,\cdots\}$生成的模拟电磁信号为

$$\sum_n a_n g(t-nT_s) \tag{5-1}$$

通常，这类信号也称为数字基带信号。至此，发射端的问题解决了，发射端可以把这个电磁信号发送出去，其他的事情让接收端去处理即可。

5.2.3　接收——接收端接收到什么信号

假设信道是一个线性时不变系统，其冲激响应为$h(t)$，那么信号

$$\sum_n a_n g(t-nT_s)$$

经过该信道后，接收端收到的信号为与冲激响应的卷积，即

$$\left[\sum_n a_n g(t-nT_s)\right]\otimes h(t)$$

注意到，发射端的电磁信号还可以写成

$$\sum_n a_n g(t-nT_s) = \left[\sum_n a_n \delta(t-nT_s)\right]\otimes g(t) \tag{5-2}$$

经过信道后，接收端收到的信号还可以写成

$$\left[\sum_n a_n g(t-nT_s)\right]\otimes h(t) = \left[\sum_n a_n \delta(t-nT_s)\right]\otimes[g(t)\otimes h(t)] \tag{5-3}$$

式(5-3)还可以等价为另一种理解：发射端采用的基本信号为冲激信号$\delta(t)$，则消息对应的模拟电磁信号为

$$\sum_n a_n \delta(t-nT_s)$$

该电磁信号经过了一个信道冲激响应为$[g(t)\otimes h(t)]$的信道，接收端收到的信号为

$$\left[\sum_n a_n \delta(t-nT_s)\right]\otimes[g(t)\otimes h(t)]$$

由此我们可以看到，不管发射端采用的基本信号是什么，总是可以统一成另一种等价形式，即发射端数字序列对应的电磁信号为冲激信号序列，而真正采用的基本信号可以划分到信道响应里面去。如上面讨论所说，我们可以把$s(t)=g(t)\otimes h(t)$当成一个广义信道冲激响应。这样的话，5.2.1 节中列举的三个考虑方面中的前两个："发射端怎样把序列表示成电磁信号?"和" 信道响应是怎样的?"，可以简化为一个问题：(广义)信道响应是怎样的? 接下来考虑如何在接收端恢复原数字序列。

5.2.4　恢复——数字信号在接收端如何无失真恢复

5.2.3 节中接收端只是把信号接收到了，要讨论"恢复"，还要对接收信号进行某种处理才行。现在就讨论接收端"恢复"序列采用的操作，可以想象采样是对一个电磁信号最简单的、最机械的、易于实现的操作之一了。我们就先讨论采样的情况。那该问题就变成了：接收端如何通过由采样操作得到的采样点序列来恢复发射端原数字序列。我们假设接收端采样间隔和发射端发送间隔一样，也为T_s。

1. 码间串扰

注意到接收到的信号为

$$\left[\sum_i a_i\delta(t-iT_s)\right]\otimes s(t) = \sum_i a_i s(t-iT_s) \tag{5-4}$$

再以 T_s 为间隔重新采样，得到的第 n 个采样点为

$$\sum_i a_i s[(n-i)T_s] \tag{5-5}$$

式(5-5)中，如果对于 $n-i\neq 0$，有 $s[(n-i)T_s]\neq 0$，那么第 n 个采样点，除了有 a_n 的信息，还有序列中其他位置 $a_i(i\neq n)$ 的信息，故一般来说接收端不能准确地恢复发射端发送的序列了，这里导致不能恢复的原因一般被称为"码间串扰"或"码间干扰"。那什么时候没有码间串扰？或者，有码间串扰，但是仍然能准确恢复原数字序列呢？

2. 狭义无失真

先看第一种情况，什么时候完全没有码间干扰？也即最狭义的无失真情形，需要接收端得到的采样脉冲序列和发射端的脉冲序列完全一样。那么接收端采样后的信号频谱也应该和发射端是完全一样的，即都为冲激序列的频谱。那对任意序列 $\{\cdots,a_n,\cdots\}$ 确定的脉冲序列 $\sum\limits_n a_n\delta(t-nT_s)$ 的频谱是什么？这个问题很少被讨论，下面讨论一下。

性质 5-1 脉冲序列 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$ 的频谱为

$$A(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_n F(\omega-nW) \tag{5-6}$$

其中，$W=\dfrac{2\pi}{T_s}$，$F(\omega)$ 是 $f(t)$ 的频谱；$f(t)$ 是任意按 T_s 间隔采样能得到采样序列 a_n 的信号。

证明 由本书第一部分采样定理的讨论可知，一个信号对应的采样冲激序列对应的频谱是被采样信号的周期重复，故成立。

三言两语

用冲激信号采样后能得到脉冲序列 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$ 的信号有很多，而采样后的脉冲序列频谱都是相应这些信号频谱的周期重复，如图 5-4 所示，其中假设 $F_1(\omega)$、$F_2(\omega)$、$F_3(\omega)$ 能得到相同的脉冲序列；而 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$ 的频谱最后形式只能有一个，那说明虽然这些不同信号的频谱不同，但经过重复叠加后却是相同的。这还说明，具有相同采样点序列的信号之间的关系是很紧密的。采样点之外的那些点的取值变化众多，我们主观认为这些信号间已经没有什么关系了，但没想到还是有这么一桩联系，真是一个很有趣的问题！

现在看，哪些信道(广义的)使得一冲激序列经过后的输出信号再采样还是这个冲激序列，也就是说这种信道的冲激响应信号是什么样的？如在第一部分讨论线性无失真系统一样，讨论无失真我们首先要确定对哪个范围的信号无失真，从而才能确定相应的无失真系统。这里我们仅分两种情况讨论：

- 对于某一个特殊取值的脉冲序列 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$ 采样无失真。
- 对于所有可能取值的脉冲序列 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$ 采样无失真。

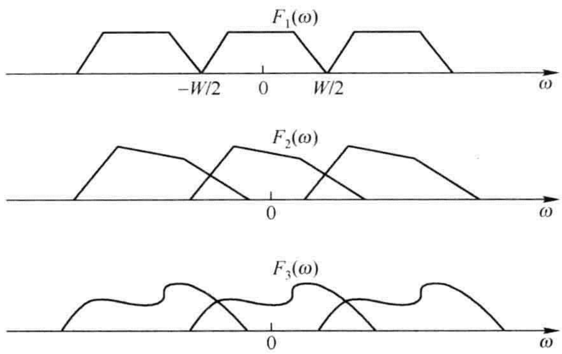


图 5-4　采样序列相同的不同信号的频谱重复

首先，对于某一个特殊取值的脉冲序列 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$，假设其频谱为 $A(\omega)$。从频域来看，冲激序列经过信道后的频谱为冲激序列自身的频谱 $A(\omega)$ 与信道传递函数 $S(\omega)$ 的乘积 $A(\omega)\cdot S(\omega)$。在接收端再以 T_s 等间隔采样出来的冲激序列的频谱为 $A(\omega)S(\omega)$ 以 W 为周期的重复。所以，只要 $A(\omega)S(\omega)$ 等于任何一个采样点序列为 $\{\cdots,a_n,\cdots\}$ 的信号 $f(t)$ 的频谱就可以做到采样无失真，如图 5-5 中 $A(\omega)S(\omega)=F_3(\omega)$，其中 $A(\omega)$ 以图 5-4 中 $F_1(\omega)$ 的重复来示意。

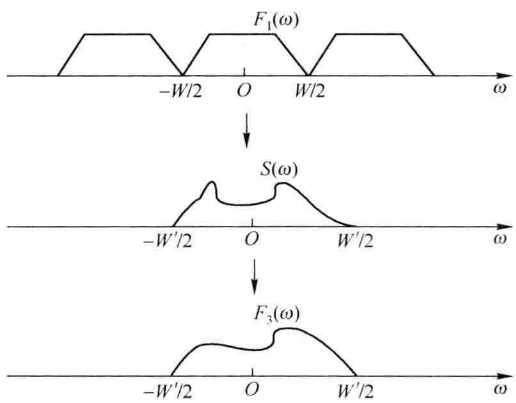


图 5-5　冲激序列过信道后频谱

通过上面的分析，显然任何一个采样点序列为 $\{\cdots,a_n,\cdots\}$ 的信号 $f(t)$ 可以确定一个对脉冲序列 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$ 采样无失真信道 $S(\omega)$。比如，$S(\omega)=\dfrac{F_2(\omega)}{A(\omega)}$，也可以是 $S(\omega)=\dfrac{F_3(\omega)}{A(\omega)}$，等等。但注意这是充分条件，并不代表无失真信道只来源于此。这就解决了对特殊脉冲序列采样无失真的问题。

接下来讨论对所有可能取值的脉冲序列 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$ 采样无失真的信道是什么样的。首先注意到，对特殊脉冲序列采样无失真的信道传递函数 $S(\omega)$ 大多和该特殊脉冲序列的取值有关，那么一般来说这样的信道对于另一个不同取值的脉冲序列不再可能采样无失真。也就是说，要对所有可能脉冲序列采样无失真，起码的要求是信道传递函数 $S(\omega)$ 和脉冲序列的取值无关。仔细观察可以知道，所有在采样点取值为 1，在与采样点间隔非 0 整数个采样间隔的点取值为 0 的信号作为冲激响应的信道能对所有脉冲序列无失真。即信道冲激响应 $s(t)$ 满足

$$\begin{cases} s(nT_s)=1, n=0 \\ s(nT_s)=0, n\neq 0 \end{cases} \tag{5-7}$$

就可以做到对任意脉冲序列采样点无失真。例如,冲激响应为 $\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)$ 的信道满足条件;又例如以下信道冲激响应也满足条件:

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)\left|\cos\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)\right|$$

因为当 $t=0$ 时,其取值为 1,当 $t=kT_s, k\neq 0$ 的整数时,其取值为 0。当然再提醒一下,这些满足条件的不同信道的输出信号是不同的,只是在采样点相同而已,但这就是我们要的效果,我们不需要整个输出信号都相同。

既然很多(广义)信道满足条件,那下面我们讨论一个效率问题:所有这些满足条件的信道里频带利用率最高的是哪个呢? 是多少呢? 这里利用率是指单位时间、单位频率带宽内能无误传输的有效数据符号个数,即单位时间、单位频率带宽内能无误传输的序列 $\{\cdots, a_n, \cdots\}$ 的长度。对于给定间隔为 T_s 的所有脉冲序列,单位时间内能传递的数据符号个数固定为 $1/T_s$,接下来只需要看要对所有脉冲序列都采样无失真的信道传递函数 $S(\omega)$ 的最小频谱带宽即可。

5.2.5 极限——理想信道下的极限传输能力

根据 5.2.4 节的讨论,我们说要对所有可能脉冲序列无失真,起码要求信道传递函数 $S(\omega)$ 和脉冲序列的取值无关,也即要求一个公共的信道传递函数 $S(\omega)$ 对所有可能的脉冲序列无失真。下面我们的想法可以这样,对每一个脉冲序列采样无失真的所有信道传递函数里,挑选出公共的信道传递函数,再在所有公共的信道传递函数里,挑选出频谱带宽最小的。比如,这个公共的且频谱带宽最小的其中之一有可能就是

$$s(t)=\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)$$

先仔细观察得到下面一个性质:

性质 5-2 对于一个脉冲序列 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$,如果按 T_s 等间隔采样能得到该脉冲序列的所有信号里,有一个信号的频谱带宽小于 $W/2=\pi/T_s$,那么能采样得到该脉冲序列的信号唯一。如果按 T_s 等间隔采样能得到该脉冲序列的所有信号里,有一个信号的频谱带宽大于等于 $W/2=(\pi)/T_s$,那么能采样得到该脉冲序列的所有信号里频谱带宽最小为 $W/2$。特别地,若有一个信号的频谱带宽大于 $W/2=\pi/T_s$,那么一定有多个信号可以采样得到该脉冲序列。

证明 我们先看后半部分。假设对于冲激序列 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$,能采样得到该冲激序列的其中一个信号为 $f_1(t)$,其对应频谱为 $F_1(\omega)$ 按间隔 W 的重复,其中 $F_1(\omega)$ 的频谱带宽大于等于 $W/2$,不妨设等于 $W/2$,如图 5-6 所示。

假设有另一个信号 $f_4(t)$ 采样也能得到该冲激序列,其对应频谱带宽小于 $W/2$,比如 $W'/2$,如图中 $F_4(\omega)$。那么该冲激序列的频谱应该为 $F_4(\omega)$ 按间隔 W 的重复,如图 5-6 所示。按理说,同一个脉冲序列的频谱应该相同,但是明显 $F_1(\omega)$ 的重复和 $F_4(\omega)$ 的重复不相等。因为对比 $F_1(\omega)$ 的重复,可以知道 $F_4(\omega)$ 的重复中间有很多"空洞",比如图 5-6 中区间 $(W'/2, W/2)$,这就造成了矛盾。所以,如果对于一个脉冲序列 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$,有一个信号的频谱带宽大于等于 $W/2=\pi/T_s$,那么能采样得到该脉冲序列的所有信号里频谱带宽最小必然大于等于

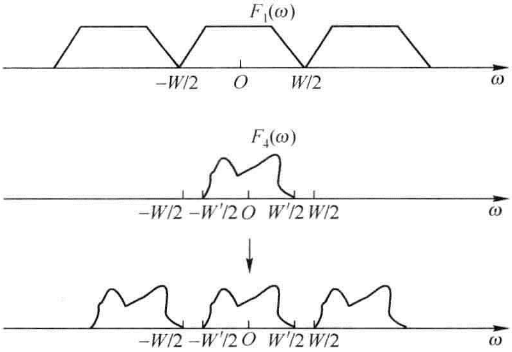


图 5-6　更窄信号带宽采样形成“空洞”

$W/2$，不可能更小。另一方面，观察知，不论序列$\{\cdots,a_n,\cdots\}$取值多少，信号

$$\sum a_n \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T_s}(t-nT_s)\right) \tag{5-8}$$

按 T_s 等间隔采样得到的采样脉冲序列为

$$\sum a_n \delta(t-nT_s)$$

而该信号的带宽不会大于和式(5-8)中带宽最大的分项，而分项中信号的带宽最大，也就是 $\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T_s}t\right)$的带宽$\frac{\pi}{T_s}$，即不会大于 $W/2$。而前面刚证明了，不可能存在频谱带宽比 $W/2$ 还小的信号，这意味着式(5-8)这种特殊情形的带宽只能是刚好等于 $W/2$ 了。从而对于后半部分，如果对于一个脉冲序列$\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$，有一个信号的频谱带宽大于等于 $W/2=\frac{\pi}{T_s}$，那么能采样得到该脉冲序列的所有信号里频谱带宽最小必然等于 $W/2$，不可能更小。

按照这个思路，前半部分的证明也一样。对于一个脉冲序列$\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$，如果按 T_s 等间隔采样能得到该脉冲序列的所有信号里，有一个信号的频谱带宽小于 $W/2=\frac{\pi}{T_s}$，那么不可能存在另一个信号按 T_s 等间隔采样也能得到该脉冲序列，不管其频谱带宽比 $W/2$ 大还是小，因为再也找不到一个不同的频谱按 W 间隔重复一样，前半部分得证。

三言两语

回忆一下采样定理，性质 5-2 可以看成采样定理的一个对偶定理。比如，按采样定理，如果一个信号的带宽小于 $W/2=\pi/T_s$，那么以 T_s 间隔采样得到的采样序列能唯一还原该信号。性质 5-2 说，对于一个脉冲序列$\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$，如果按 T_s 等间隔采样得到的该脉冲序列的所有信号里，有一个信号的频谱带宽小于 $W/2=\pi/T_s$，那么能采样得到该脉冲序列的信号唯一。同样，按采样定理，如果一个信号的带宽大于等于 $W/2=\pi/T_s$，那么以 T_s 间隔采样得到的采样序列不一定能唯一还原该信号。特别地，如果一个信号的带宽大于 $W/2=\pi/T_s$，那么以 T_s 间隔采样得到的采样序列一定不能唯一还原该信号。而性质 5-2 说，如果按 T_s 等间隔采样能得到该脉冲序列的所有信号里，有一个信号的频谱带宽大于等于 $W/2=\pi/T_s$，那么能采样得到该脉冲序列的信号可能有多个；特别地，若有一个信号的频谱带宽大于 $W/2=\pi/T_s$，那么一定有多个信号可以采样得到该脉冲序列。

根据上面的性质,我们得到如下定理:

定理 5-1 对于所有脉冲序列 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$,能对所有这些序列采样无失真的信道传递函数的最小频谱带宽为 $W/2=\pi/T_s$。

证明 由性质 5-2,仍然分为两部分讨论。对于脉冲序列 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$,如果有一个能得到该脉冲序列的信号频谱带宽小于 $W/2$,因为该信号是唯一的,那么过信道后采样前的信号频谱必然为该唯一信号的频谱才能保证采样后无失真。从而信道传递函数 $S(\omega)$ 在该唯一信号的频谱范围内需要为常数,而在 $[-W/2,W/2]$ 剩下的部分可以取值任意,如图 5-7 所示。

而对于脉冲序列 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$,如果有一个能得到该脉冲序列的信号频谱带宽大于等于 $W/2$,那么能采样得到该脉冲序列的所有信号里频谱带宽最小为 $W/2$。从而要对这部分脉冲序列无失真,要求信道传递函数 $S(\omega)$ 的频谱带宽大于等于 $W/2$。如果信道带宽比 $W/2$ 还小,则过信道后的频谱比 $W/2$ 还小,那么过信道再采样出来的冲激序列的频谱为该比 $W/2$ 还小的频谱按 W 周期重复,无论如何也不可能是发射端冲激序列的频谱,还是因为"空洞"的原因,如图 5-8 所示的区间 $(W'/2,W/2)$。

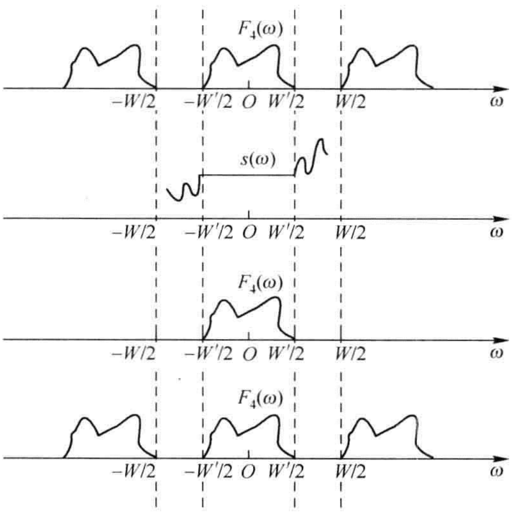


图 5-7 对于频谱带宽小于 $W/2$ 的无失真信道传递函数

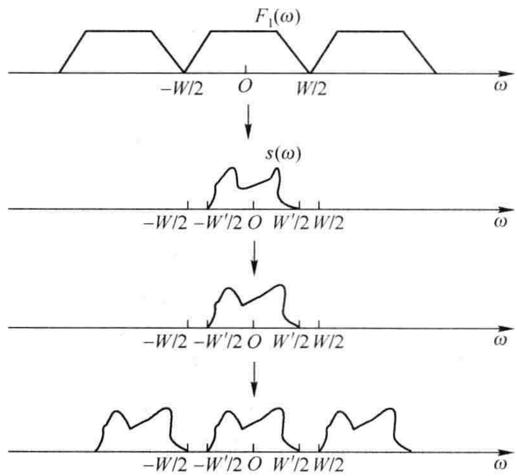


图 5-8 更窄信道带宽采样形成"空洞"

从对这两部分脉冲序列的无失真讨论来看,能对这两部分同时采样无失真,频谱带宽最窄必然为 $W/2$。特别地,该无失真信道传递函数 $S(\omega)$ 可以为 $[-W/2,W/2]$ 上的方波,即时域冲激响应为 $\mathrm{sinc}(\pi t/T_s)$。

通过前面的讨论知,在有效传输的情况下,无误传输的信道带宽最小为 $W/2$。而单位时间内传递的符号个数是一样的,带宽越小,频谱效率越高,效率最高为单位时间(秒,s)单位带宽(赫兹,Hz)可传输的数据符号数为

$$\frac{1/T_s}{W/(2\times 2\pi)}=\frac{1/T_s}{\dfrac{1/T_s}{2}}=2$$

即 2 个数据符号每秒每赫兹(2 Symb/s/Hz)。

定理 5-2(采样无失真最高频谱利用率) 给定系统带宽,在采样无失真的情况下,频谱最

高利用率为单位时间(秒,s)单位带宽(赫兹,Hz)传输 2 个数据符号,即 2Symb/s/Hz。这个速率也被称为奈奎斯特传输率。

由上面的讨论,采样点无失真的(广义)信道传递函数此时可以为

$$S(\omega)=T_s,\ -\frac{W}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{W}{2} \tag{5-9}$$

现在要传输这个数字序列,发射端可以选用的基本信号为

$$g(t)=\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T_s}t\right) \tag{5-10}$$

$$F\{g(t)\}=G(\omega)=T_s\operatorname{Rect}\left(\frac{\omega}{W}\right) \tag{5-11}$$

此时狭义信道传递函数为

$$\frac{S(\omega)}{G(\omega)}=\operatorname{Rect}\left(\frac{\omega}{W}\right) \tag{5-12}$$

那么,这个系统接收端理想采样出来的就是发射端数字序列。

前面讲的是狭义无失真,现在我们考虑广义无失真的情况。例如,过信道在接收端采样得到的不是 $\sum_n a_n\delta(t-nT_s)$,而是

$$\sum_n (a_{n-1}+a_n)\delta(t-nT_s) \tag{5-13}$$

看起来,采样点失真了,但是注意到只要 a_{n-1} 和 $a_{n-1}+a_n$ 正确接收了,a_n 显然也能正确接收,依次类推,就没问题了。这个采样序列可以看成

$$\sum_n a_n\delta(t-nT_s)+\sum_n a_{n-1}\delta(t-nT_s) \tag{5-14}$$

观察知,接收端采样后能得到这样一个采样序列,信道响应可以是

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T_s}t\right)+\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T_s}(t-T_s)\right) \tag{5-15}$$

则该系统广义下也是采样点无失真的。并且信道的带宽(信道响应的带宽)相对于狭义无失真最高利用率情形没有增加,所以该系统也能达到最高频谱利用率 2symb/s/Hz。该系统信道响应如图 5-9 所示。

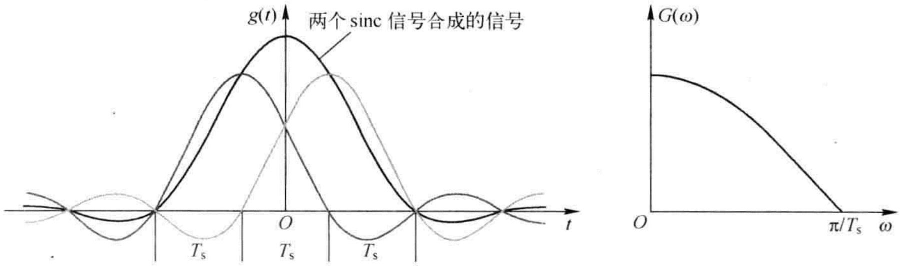


图 5-9　部分响应系统的信道响应

当然,该系统只要前面一个 a_{n-1} 错了,后面的基本上都错了,即错误扩散。不过可以通过先对要发送的序列 $\{\cdots,a_n,\cdots\}$ 进行预编码再发送的方法来消除错误扩散。这部分内容在一般通信原理教材上就是部分响应系统的内容,更细节的讨论本书就不讲了,请大家自行查阅资料了解。

5.2.6 回归——理想回归现实的一点说明

前面的讨论都是基于理想情况的，现实中还有很多问题，在应用时需要做些调整。比如，对于达到最高效率的系统，发射端采用的基本信号是 sinc(αt)，但 sinc 信号收敛太慢了，尾巴振荡太大了，若在接收端采样稍有偏差，就会引入很大的相互干扰。因此实际中可以选一个尾巴小、收敛快的作为基本信号，但当然代价是牺牲频谱效率，例如滚降信号。而为了既满足尾巴振荡小、收敛快，又能达到最高频谱效率，可以采用部分响应系统。通过图 5-9 可以看到两个 sinc 信号叠加起来的信号尾巴相对于单个 sinc 信号尾巴振荡小了很多。

此外，前面在讨论时把模型简化成了“冲激序列 - 广义信道 - 接收端采样”。并且我们要求广义信道满足一定条件，才能做到无失真。如果真实的(狭义)信道不满足条件，则可以根据实际情况，“差多少补多少”，凑成满足条件的，比如采样前再加个滤波器。

例 5-1 广义信道 $S(\omega)$ 是满足无失真的。发射端采用的基本信号为 $G(\omega)$，狭义(真实)信道传递函数为 $S'(\omega)$。显然，发射端数字信号如果直接经过狭义信道，则采样是不能做到采样无失真的。这时，可以在发射端发射前，或接收端采样前加一个滤波器，使得该滤波器传递函数为

$$\frac{S(\omega)}{G(\omega)S'(\omega)}$$

这样就可以做到采样无失真了。

最后说明，除了采样外，接收端还可以做其他不太复杂的操作来“恢复”原序列，比如奈奎斯特的比较波形面积等。我们看到，数字通信的接收处理更灵活，即接收端“恢复”消息的手段更加多样化，如采样、比较面积等。而模拟信号若直接传输，通常就是接收到什么就是什么了。因此，数字通信的应用越来越多，逐渐替代模拟通信。

5.3 数中有模，模中有数

不管是数字信号，还是模拟信号，它们仅仅是我们表示消息的形式而已。往往它们之间需要相互转换。比如，本来消息先被表示成了模拟信号，为了传输这个模拟信号，我们又把模拟信号表示成数字信号。对于这一步来说，模拟信号相当于消息，变成数字信号经过一些数字手段处理后，可能最后又表示成模拟信号，因为不管怎么样，最后发射的还是模拟电磁信号。就像太极阴阳一样，两者并不能绝对地分开来看，总是模中有数，数中有模。所以，有必要简单介绍数—模转换(Digital-to-Analog，D/A)和模—数转换(Analog-to-Digital，A/D)。

5.3.1 数—模转换

数—模转换就是前面已经讲过的，找一个基本信号，把数字序列表示成不同幅度的基本信号的平移叠加，这一过程也可称为脉冲成型。

5.3.2 模—数转换

假设消息本身就是模拟信号，或者已经被表示成了模拟信号，我们当然可以采用模拟信号通信手段直接把模拟信号传输出去。但如果把模拟信号自身又看成“消息”，那怎么把这个

“消息”用数字信号系统传输出去呢？首先得把这个“消息”变成数字信号。这个把模拟信号变成数字信号的过程就是模—数转换。

把模拟信号这个“消息”变成数字信号最简单的方法就是对其采样，采样得到的采样点序列就是模拟信号作为“消息”对应的数字序列。只要采样序列无失真，接收端就可以重建原模拟信号，也就可以还原最开始的消息。这样虽然理论上可行，但是不是多此一举呢？也不完全是。比如，就以语音信号为例，假设我们要用数字信号通信来传输语音信号，那就得把语音信号编码成数字序列（信源编码）。而我们前面提过，语音及其他一些信号可以很方便地表示成模拟信号，而模拟信号很方便地就通过采样得到数字信号序列，这就是一种比较自然的信源编码方法呀，为什么不可以用？并且我们说过在数字通信系统中，对信号的处理手段更丰富（如采样、限幅等），这就是进行模—数转换的原因。

总体来说，模—数转换，就是先采样，得到采样点，再进一步把采样点量化，甚至把量化后得到的值表示成二进制比特流等，这些内容本书略去。

第6章　总要面对现实

前面都是考虑的理想系统,不管信道条件怎么样,理论上总是可以设计出无失真的系统。失真只会因为设计缺陷,比如码间干扰等带来,而不会因为外界的不确定性带来,比如外界干扰、噪声等。但是,在实际系统中,我们总是会不可避免地碰到随机干扰或者噪声,从而发送的信号会随机地错成另外的信号,这又涉及一些概率分析的知识。鉴于此,本节我们再补充一些基本概率知识。

6.1　高斯分布——标致又实用

常见的随机变量及分布,例如二项分布等这里也不花篇幅讲了。我们重点讲一类特别重要的随机变量及分布——高斯(Gauss)分布。

定义6-1(高斯分布)　随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{6-1}$$

随机变量 X 称为高斯变量,其服从的分布称为高斯分布,并记为 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$。

图6-1给出了不同 μ,σ 的高斯变量概率密度函数曲线。

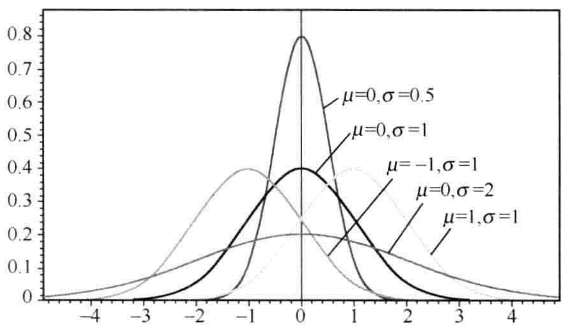


图6-1　各种高斯分布概率密度函数

显然,由概率密度函数可以确定高斯变量的累积分布函数为

$$P(X<x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \tag{6-2}$$

如图6-2所示。

性质6-1(高斯变量均值和方差)　概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

的高斯变量 X 的均值为 μ,方差为 σ^2。

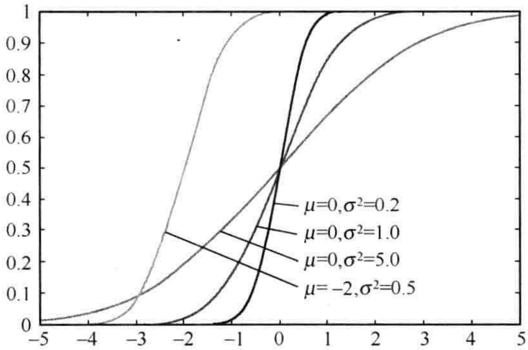


图 6-2　各种高斯分布累积分布函数

三言两语

这是一个非常漂亮的性质，只要知道高斯变量的均值和方差，就能轻而易举地把完整的分布或概率密度函数写出来。

另外，从图 6-1 还可以看到，高斯变量的概率密度函数关于均值 $X=\mu$ 是对称的，并且越靠近均值的地方概率密度越大，即发生的概率越大；若均值 $\mu=0$，则说明绝对值越小的地方概率密度越大，发生的概率越大。我们知道方差刻画了随机变量的取值相对于其均值的弥散情况，方差越小，随机变量的取值越集中在其均值周围，其概率密度函数曲线表现为越窄和高；方差越大，其概率密度函数曲线表现为越宽和扁；这从图 6-1 中也能看出来。下面介绍另一个很好的性质。

性质 6-2（形式不变性）　几个独立高斯变量的线性组合仍然是高斯变量。假设高斯变量 X_1 和 X_2 独立，

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2),X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2) \tag{6-3}$$

那么，$X=kX_1+lX_2$ 也是高斯变量，且

$$X \sim \mathcal{N}(k\mu_1+l\mu_2,k^2\sigma_1^2+l^2\sigma_2^2) \tag{6-4}$$

从形式不变性，也许我们会想，几个独立随机变量的线性组合如果是高斯变量，则是否可以说明这些随机变量也一定只能是高斯变量呢？答案是不一定。但下面只要再稍微加个条件，答案就是一定的了。

性质 6-3（有限分解定理）　几个独立的随机变量之和为高斯分布，只要其中有一个是高斯分布，那么所有的随机变量只能都是高斯分布。

是不是很有意思啊？有限分解定理原名是 Crämer's 分解定理。

6.2　白噪声——最无章可循

实际系统中，外界干扰和/或噪声总是在某种程度上存在的，不可避免的。下面我们就介绍最常见、最无章可循、又最基本的一类噪声——白噪声。

定义 6-2（白噪声）　一个随机过程 $\xi(t)$ 被称为白噪声，那么从频域上看，该随机过程的

功率谱 $P(\omega)$ 在整个频域上保持不变，为一个非 0 常数。从时间上看，$\xi(t)$ 满足

$$E[\xi(t)]=0,\text{对任意 } t \tag{6-5}$$

$$E[\xi(t_1)\xi(t_2)]=0,\text{对任意 } t_1\neq t_2 \tag{6-6}$$

$$E[\xi(t)^2]=\frac{1}{2\pi}\int P(\omega)\mathrm{d}\omega=\int P(f)\mathrm{d}f \tag{6-7}$$

图 6-3 示意了一个白噪声的一段实现。理想的白噪声从时间上看是平稳随机过程，则由其功率谱与自相关函数的关系维纳 - 辛钦（Wienner-Khinchin）定理知，平稳随机过程的功率谱是其自相关函数的傅里叶变换，而我们知道常数的傅里叶逆变换是冲激信号，从而知白噪声（注意是平稳随机过程）的自相关函数为原点 $t=0$ 时的冲激，即对任意时刻 t_1 有

$$R_\xi(t)=E[\xi(t_1)\xi(t_1+t)]=C\delta(t) \tag{6-8}$$

其中，C 为和随机过程功率相关的某常数。从这个方面，我们也可以理解上面白噪声定义中时域特征和频域特征的对应关系。

由式(6-6)可以看出，随机过程时间上两个不同点所对应的随机变量是不相关的（Uncorrelated）。但一般情况下，我们把“不相关”加强成“独立”作为白噪声的时域特性（注意两个不同点所对应的随机变量独立也使得时域特征第二条成立）。再一方面，由式(6-7)可知，白噪声每个点对应的随机变量的方差为该白噪声的功率。

性质 6-4（白噪声基本特性） 白噪声时间上任意两个时刻对应的随机变量独立；白噪声每个时刻对应的随机变量的方差为该白噪声的功率，即

$$\mathrm{Var}[\xi(t)]=\frac{1}{2\pi}\int P(\omega)\mathrm{d}\omega=\int P(t)\mathrm{d}f$$

其中，$P(\omega)$ 为白噪声角频率功率谱；$P(f)$ 为白噪声线频率功率谱。

由于有这个基本特性，一般描述白噪声时，描述每个时刻所对应随机变量的方差，与描述白噪声的功率是等价的。另外，理想的白噪声功率为无穷，现实中是没有的。现实中，把有限频带内（或者说在当前考虑的系统的整个频带内）的功率谱基本平坦的噪声也当做白噪声处理。即此时也认为时间上两噪声点是独立的，每个时刻随机变量的方差等于功率。

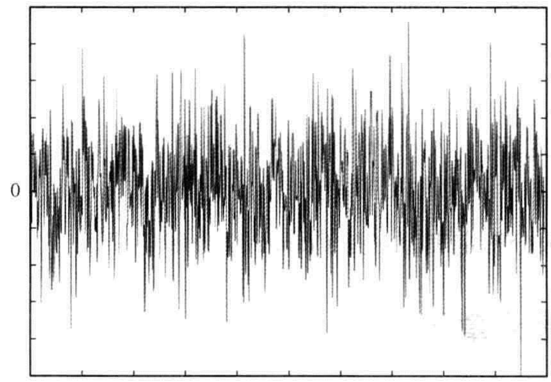


图 6-3 白噪声

定义 6-3(高斯噪声)　如果一个随机过程 $\xi(t)$,对任意 $k>0$,任意 $t_1,\cdots,t_k$,随机向量 $[\xi(t_1),\cdots,\xi(t_k)]$ 是联合高斯分布,则称为高斯过程或高斯噪声。

定义 6-4(高斯白噪声)　既是高斯噪声,又是白噪声,则称为高斯白噪声。

值得一提的是,白噪声并不是特指高斯白噪声,它只是白噪声的一种形式,不要把概念搞混了。

6.3　加性高斯白噪声(AWGN)

定义 6-5(加性高斯白噪声信道)　信号 $x(t)$ 在经过信道到达接收端时,接收端的信号 $y(t)$ 是原信号加上一个高斯白噪声,

$$y(t)=x(t)+w(t)$$

其中,$w(t)$ 为高斯白噪声,该信道称为加性高斯白噪声信道。加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise)信道,通常简记为 AWGN。通信中,在评估比较各个方案性能时,若没有给定具体信道模型,一般以 AWGN 作为信道模型来比较各自的性能。原因源于概率论中讲的大数定理(参见本书附录 B 概率基础知识)。接收端产生加性噪声的因素很多,比如大量的分子热运动,最后的整体效果基本上很大可能表现成高斯白噪声。

最后可以看到,如果接收端对接收信号 $y(t)$ 进行采样得到 $y(nT_s)$,那么采样点是发射信号 $x(t)$ 相应样点叠加了相互独立但同分布的高斯噪声,即

$$y(nT_s)=x(nT_s)+w_n \tag{6-9}$$

其中,w_n 为两两相互独立但同分布的高斯变量。

第 7 章　信号调制与解调

一般通信原理教材中会用大量的篇幅讲调制与解调，本书只做些简单的概括介绍，详细内容还请读者自行查阅教材或相关资料。

7.1　浅谈其基本思想

不管是模拟信号还是数字信号，最后的形式还是电磁信号。但一般电磁信号不能直接发送而是需要先调制。为什么要调制？有很多实际原因，比如各频段的传播特性不一样，直流、低频不易传输；各频段的能量衰减不一样，频率低的信号，波长长，一般障碍物都能绕过去，所以能量阻挡少，传得远，频率高的信号，波长短，稍微大点的障碍物都很难绕过去，能量被阻挡了，传得近；信号频率和天线尺寸相关，低频段的信号需要很大的天线才能辐射出去；还有，现实中为不同的应用设计了不同的系统，为了人为地把各个不同系统的信号分开，通过调制可以实现频谱搬移，这样才使得各系统都能使用各自的频率资源，而不相互干扰。

7.1.1　调制方法简介

调制方法在整个通信原理中，是相对比较独立的一个课题，也相对比较成熟。目前研究上来说更偏向硬件实现上的优化。

1. 模拟信号调制

模拟调制，就是把模拟信号的改变规律反映到载波（比如正余弦信号）的某个参数上，信号改变，相应的载波参数（幅度、相位、频率）随之改变。接收端根据看到的载波参数变化规律来确定原模拟信号，接收端还原原模拟信号的过程称为解调。一般不同的调制方法可以对应不同的解调方法。模拟调制解调在模拟通信系统中的位置如图 7-1 所示。

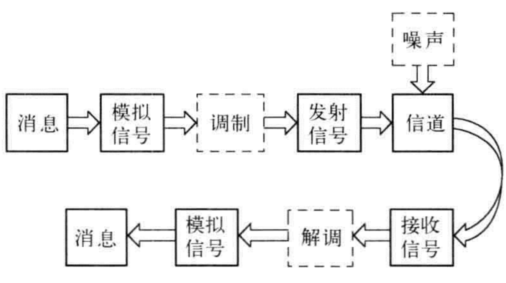


图 7-1　模拟通信系统主要流程

模拟调制方法主要包括调幅(AM)、调频(FM)和调相(PM)。举个例子,现实中印象较深的应该是收音机了吧,上面搜索频道有 FM 和 AM,广播里总是说某个电台是调频多少兆赫,等等。调幅就是用模拟信号(调制信号)的变化规律去改变正弦信号(载波)的幅度,调制后的输出效果信号如图 7-2 所示。

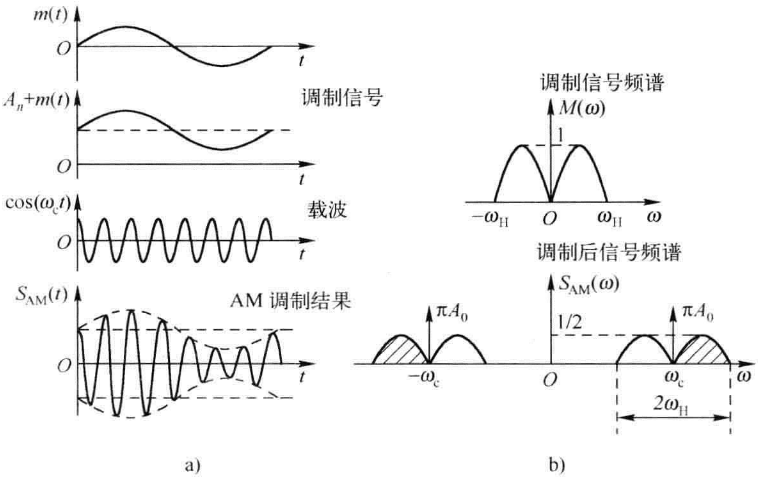


图 7-2　调幅时域(左)和频域(右)效果

调频就是用模拟信号(调制信号)的变化规律去改变正弦信号(载波)的频率,调制后的输出效果信号如图 7-3 所示。调相就是用模拟信号(调制信号)的变化规律去改变正弦信号(载波)的相位,调制后的输出效果信号如图 7-4 所示。

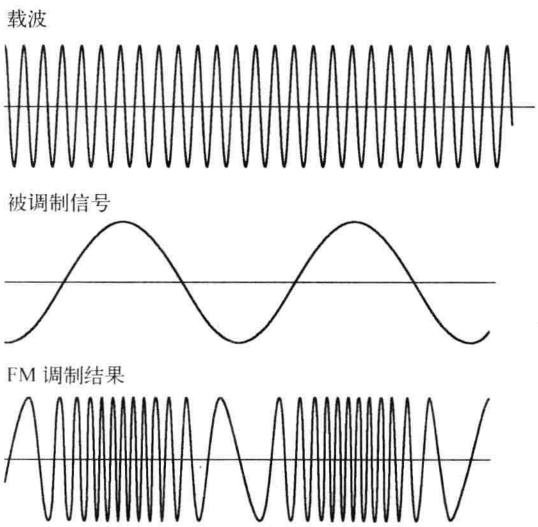


图 7-3　调频效果示意图

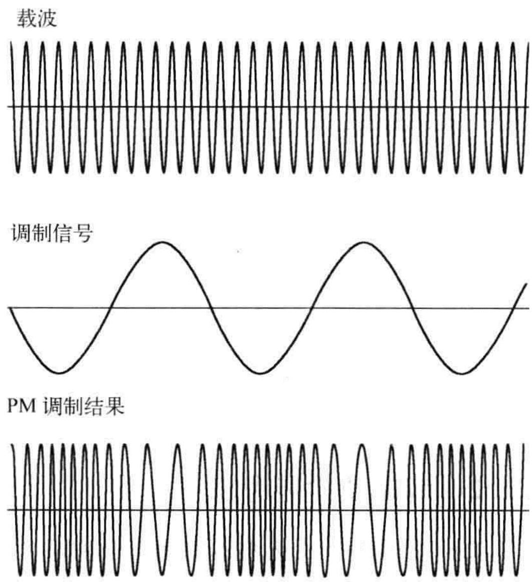


图 7-4　调相效果示意图

2. 数字信号调制

数字信号调制的思想、方法和模拟信号调制类似,也分为调幅、调频、调相。但在数字通信系统里,它们有自己的名字,对应分别是幅移键控(Amplitude Shift Keying, ASK)、频移键控(Frequency Shift Keying,FSK)和相移键控(Phase Shift Keying,PSK)。

幅移键控是指用数字基带信号(调制信号)的变化规律去改变正弦信号(载波)的幅度,调制后的输出效果信号如图 7–5 所示。

频移键控是指用数字基带信号(调制信号)的变化规律去改变正弦信号(载波)的频率,调制后的输出效果信号如图 7–6 所示。相移键控是指用数字基带信号(调制信号)的变化规律去改变正弦信号(载波)的相位,调制后的输出效果信号如图 7–7 所示。

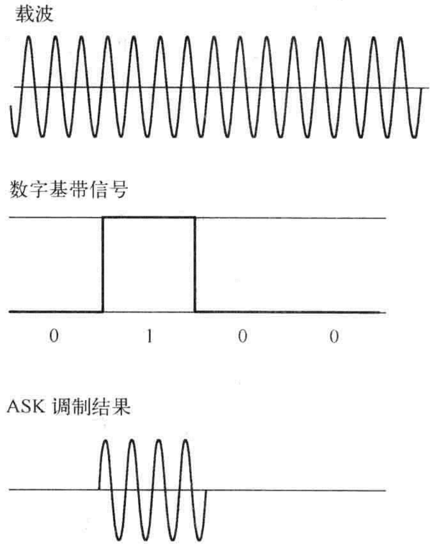


图 7–5 幅移键控 ASK 效果示意图

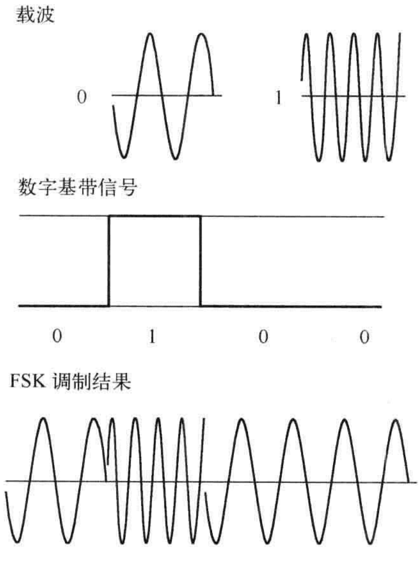


图 7–6 频移键控 FSK 效果示意图

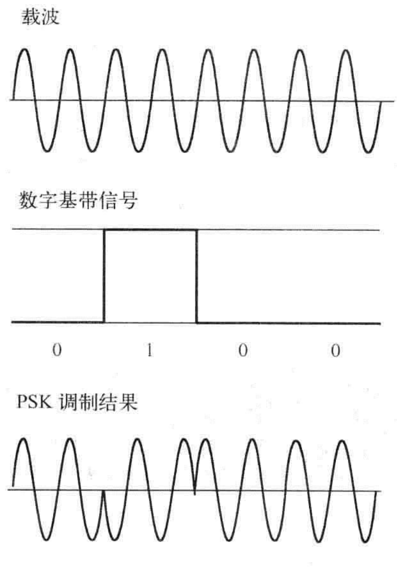


图 7–7 相移键控 PSK 效果示意图

从调制示意图可以看出,数字信号调制比模拟信号简单得多,每一种数字调制方法更像从数字信号序列按一种规则对应到模拟信号波形。

7.1.2 解调及性能考虑

为什么要研究这么多不同的调制方法?假设传输过程中没有任何噪声和干扰,接收端可以根据调制的逆操作,解调可以唯一还原原信号。如果真没有干扰和噪声,大概我们也不需要研究太多调制解调方式了。反正能正确解调。但现实是,传输过程中一定会有噪声和干扰,这个时候研究不同调制解调方案就变得有意义了。

差别在哪儿？列举其中一方面：假设不管发射端把原始信号调制出来的信号是什么样子，在接收端叠加的噪声是完全一样的。接收端按不同调制方式各自对应的解调方法解调后得到的信号，形式上是原始信号叠加了另一个噪声，这里“另一个噪声”是解调前噪声也被同样解调过程的产物；但是不同调制解调方式解调后出来叠加的所谓“另一个噪声”是不同的，其中也许有些功率很小，有些很大，当然最后“另一个”噪声功率小的调制解调方式性能更好，这就是研究不同调制解调方式的意义所在。

具体地，假设调制前信号是 $f(t)$，经过调制方式 S 作用后得到的信号是 $S\{f(t)\}$。该信号被发送出去，接收端接收到了叠加噪声的信号 $S\{f(t)\}+n(t)$，其中 $n(t)$ 是不依赖于什么调制方式的噪声。我们现在记调制方式 S 的解调过程为 S^{-1}，那么解调后的信号为

$$S^{-1}\{S\{f(t)\}+n(t)\}=f(t)+S^{-1}\{n(t)\} \tag{7-1}$$

其中，$S^{-1}\{n(t)\}$ 就是所谓“另一个噪声”。显然，对于不同的调制方法 S 及对应的解调过程 S^{-1}，最后得到的“另一个噪声”可能不同，从而整个通信过程的性能不同，从而就体现出了研究各种调制解调方式的意义。

当然这里仅仅从解调性能这一个方面来说明了研究不同调制解调方法的意义，还有很多其他方面的考虑。比如，传输相同原始信号（消息），最后经过不同调制方式出来的，实际在媒介（铜缆，无线环境等）中跑的信号对时间/频率资源的利用率可能不同，有些调制出来的信号带宽可能是 1 MHz，而有些调制出来的信号带宽可能是 10 MHz；还有可能不同的调制解调方式的实现复杂度不同，等等；所有这些因素都促成了多种调制解调方式的研究，以便在应用时，根据对各种因素的取舍/平衡来选择合适的调制解调方式。

7.2　I/Q 正交调制

7.2.1　天生 I 路与 Q 路

在上面对调制解调的基本思想介绍里我们还提到调制还有另外一个功能，就是把频率低的信号搬到频带高的部分，从而更有利于传输。不妨假设调制前的信号 $f(t)$ 的频谱是以原点 $\omega=0$ 为中心的一个频谱。现在要把它的频谱挪到 $\omega=\omega_c$ 处，一般的做法是用以 ω_c 为频率的正余弦信号和需要调制的信号相乘，从而实现频谱搬移。请回忆一下，正弦信号 $\sin(\omega_c t)$ 和余弦信号 $\cos(\omega_c t)$ 的频谱是在一对频点 $\pm\omega_c$ 处的冲激，仅方向不同。故由傅里叶变换的“时域乘积，频域卷积”知，任何一个信号乘以正余弦信号后的频谱为把原信号频谱分别向左搬移和向右搬移 ω_c 距离，然后再分别调整方向和幅度减半。图 7-8 中给出了一个用余弦进行频谱搬移的示意图。

$$\mathcal{F}\{f(t)\cos(\omega_c t)\}=\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_c)+F(\omega-\omega_c)] \tag{7-2}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\sin(\omega_c t)\}=\frac{\mathrm{j}}{2}[-F(\omega-\omega_c)+F(\omega+\omega_c)] \tag{7-3}$$

既然 $\cos(\omega_c t)$ 和 $\sin(\omega_c t)$ 都可以实现频谱搬移，如果用 $\cos(\omega_c t)$ 和一个信号 $f_1(t)$ 相乘，用 $\sin(\omega_c t)$ 和另一个信号 $f_2(t)$ 相乘，则把它们叠加起来的信号

$$s(t)=f_1(t)\cos(\omega_c t)+f_2(t)\sin(\omega_c t) \tag{7-4}$$

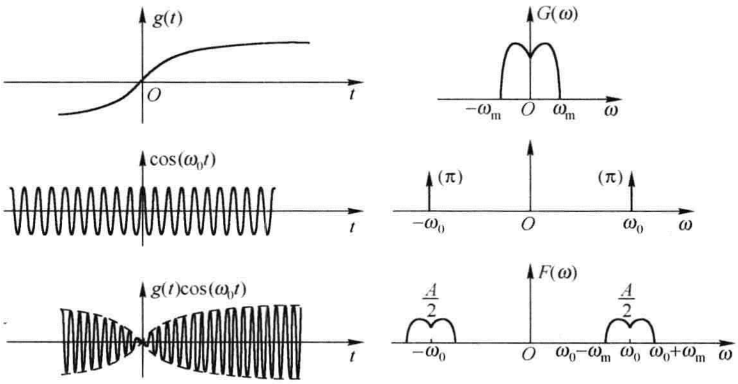


图 7-8 利用余弦频谱搬移时域过程(左)和频域过程(右)

发出去,会怎么样?假设没有其他干扰噪声,理论上接收端可以唯一得到$f_1(t)$和$f_2(t)$吗?

我们知道,下面的操作可以还原$f_1(t)$,即当ω_c大于$f_1(t)$,$f_2(t)$的带宽时,用$s(t)$再乘以$\cos(\omega_c t)$并加个滤波器就可以得到$f_1(t)$。因为根据正余弦运算关系

$$\cos(2\alpha)=2(\cos\alpha)^2-1=1-2(\sin\alpha)^2 \tag{7-5}$$

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \tag{7-6}$$

可知

$$\mathcal{F}\{s(t)\cos(\omega_c t)\}=\mathcal{F}\left\{f_1(t)\frac{1+\cos(2\omega_c t)}{2}+f_2(t)\frac{\sin(2\omega_c t)}{2}\right\}$$

$$=\frac{F_1(\omega)}{2}+\frac{F_1(\omega-2\omega_c)+F_1(\omega+2\omega_c)}{4} \tag{7-7}$$

$$+\frac{\mathrm{j}[F_2(\omega+2\omega_c)-F_2(\omega-2\omega_c)]}{4} \tag{7-8}$$

显然,只要加个滤波器把$\pm2\omega_c$处频谱给过滤掉就可以得到信号$f_1(t)$了。整个过程如图 7-9 所示。当然,还有个系数差异,不过这个系数是固定的,且可以提前知道,无关紧要,再补上就行了。

类似地,用$s(t)$再乘以$\sin(\omega_c t)$并加个滤波器就可以得到$f_2(t)$

$$\mathcal{F}\{s(t)\sin(\omega_c t)\}=\mathcal{F}\left\{f_2(t)\frac{1+\cos(2\omega_c t)}{2}+f_1(t)\frac{\sin(2\omega_c t)}{2}\right\}$$

$$=\frac{F_2(\omega)}{2}+\frac{F_2(\omega-2\omega_c)+F_1(\omega+2\omega_c)}{4}$$

$$+\frac{\mathrm{j}[F_1(\omega+2\omega_c)-F_1(\omega-2\omega_c)]}{4}$$

综合来看,接收端在接收到$s(t)$后,引出两个支路,其中一个支路和正弦信号相乘再滤波可以得到一起传输的其中一个信号(比如$f_2(t)$),另一个支路和余弦信号相乘再滤波可以得到一起传输的其中另一个信号(比如$f_1(t)$)。

另外,上面提到要求ω_c大于$f_1(t)$、$f_2(t)$的带宽,如果不这样,则各频谱通过正余弦搬来搬去,最后会有重叠,没办法无失真还原,如图 7-10 所示。

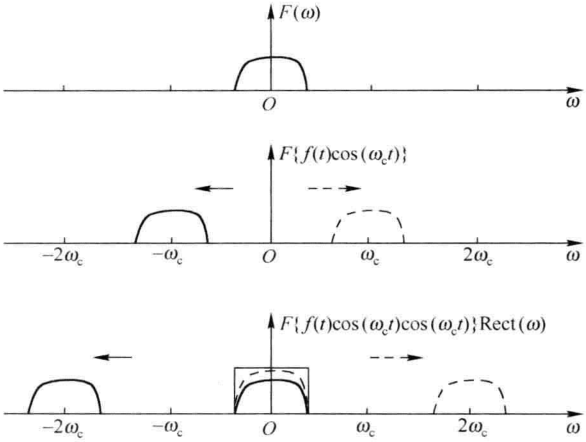


图 7-9　频谱搬移以及还原

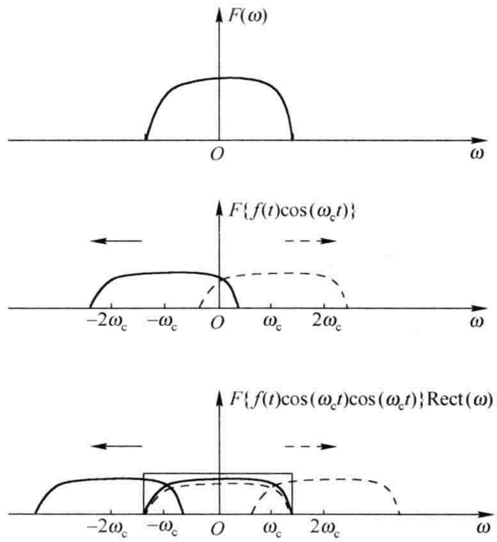


图 7-10　频谱重叠导致无法滤波还原

上面我们是从正向过程来描述说明,实际上可以从相反的方向来说明。具体地,对于任何一个窄带信号 $s(t)$(窄带信号是说信号频谱中心频点 ω_c 远大于信号频谱带宽),总可以找到两个信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 使得 $s(t)$ 可以写成

$$s(t)=f_1(t)\cos(\omega_c t)-f_2(t)\sin(\omega_c t)$$

关于这个知识点,如果要从更一般的理论上来说,就需要借助希尔伯特(Hilbert)变换以及解析信号相关的知识了,我们暂时不具体介绍,后续我们讲信号的复基带等价表示的时候,还会继续讲。

三言两语

进一步需要说明的是,因为 $\cos(\omega_c t)$ 和 $\sin(\omega_c t)$ 是正交的,这类似于在线性空间里的正交基下的唯一分解。区别在于正交基下的唯一分解是从代数结构去理解和考虑问题;但这里这个可以唯一还原,用到的是解析的技巧。但仅从方便理解上来说,你可以认为是正交基分解。

定义 7-1(I/Q 正交调制)　将两个信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 分别用余弦信号 $\cos(\omega_c t)$ 和正弦信号 $\sin(\omega_c t)$ 调制得到信号

$$s(t)=f_1(t)\cos(\omega_c t)-f_2(t)\sin(\omega_c t)$$

的过程,被称为 I/Q 正交调制。其中,$f_1(t)$ 被称为 I 路信号,$f_2(t)$ 被称为 Q 路信号。

此外,这样两路同时各(调制)发送一个信号,看起来效率更高,是否真的效率更高呢?有什么理论保证?后续我们给出答案。最后,记

$$f(t)=f_1(t)+\mathrm{j}f_2(t) \tag{7-10}$$

注意观察知,

$$s(t)=\mathrm{Real}\{f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\} \tag{7-11}$$

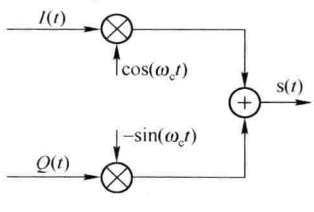


图 7-11　I/Q 正交调制

这个写法的用处以后再讲。

7.2.2 调制符号也分星座

在数字通信系统中，I/Q 调制里 $I(t)$ 和 $Q(t)$ 的最简单的体现形式或者说来源就是调制符号星座点了。常见的调制方式有 BPSK、QPSK、16QAM 等，我们以 QPSK 为例。星座图里每个星座点的横坐标对应 I/Q 调制里的 I 路，纵坐标对应 I/Q 调制里的 Q 路，如图 7-12 所示。QPSK 里的星座点$\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}$，对应图 7-12 里两比特取值 11，由它确定的 I 路信号可以为 $I(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Rect}(t)$，而由它确定的 Q 路信号可以为$\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Rect}(t)$。如果要直接传输这个调制符号用 I/Q 调制即可。

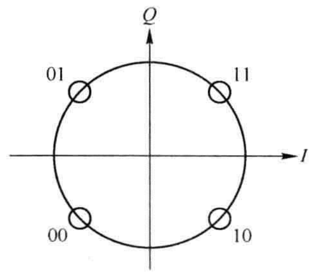


图 7-12 QPSK 调制符号星座点

第 8 章　信号接收判决基本方法

本章介绍一些基本的信号接收处理方法以及对应的通信性能(通信质量)分析。其中,既有模拟意义上的处理方法,又有数字意义上的处理方法。在讨论过程中,我们选了如下三个信道场景、只有加性噪声信道场景、只有乘性噪声信道场景、两种噪声都有的信道场景。我们可以看看相同方法在不同场景如何应用,或者不同场景是否有各自特别的方法。另外,为方便起见,本章讨论的信号暂时都限定为实信号。

8.1　加性噪声信道性能分析

先讨论只有加性噪声的情况,特别是加性高斯白噪声信道(AWGN)。我们知道信号经过 AWGN 后,基本上肯定变了样,但接收端需要根据变了样的接收数据判断发射端发射的是哪个信号,这就是信号接收处理的目的。

8.1.1　相关接收判决

相关接收是接收端利用信号相关器和比较判决来确定发射端发射了哪个信号的方法,相关接收方法是少数的保有模拟意义的处理方法之一。其处理流程示意图如图 8-1 所示。

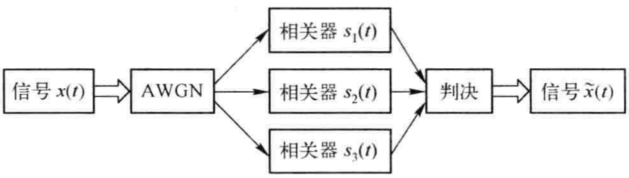


图 8-1　相关接收判决

从流程图可以看到,在接收端需要有对应于各可能信号的相关器,用来与接收信号(经过信道的信号)做相关运算,然后比较各可能信号分支得到的相关运算值,用最大的分支相关器对应的信号作为发射端发的信号。

相关接收方法的原理利用了 Cauchy-Schwarz 不等式(参见本书附录 A),假设发射端发射的所有可能信号的能量或功率相等,即

$$\int |s_1(t)^2| = \int |s_2(t)^2| = \int |s_3(t)^2| = \cdots$$

任意选取信号 $s_1(t)$ 和所有可能信号做相关运算,该信号 $s_1(t)$ 和自己做相关运算的值最大。

当然,我们在附录 A 中的讲述并没有考虑噪声的影响,实际上把噪声考虑进来之后,结果也是类似的。只不过没有噪声时,信号与自己做相关运算是绝对意义上最大;而有 AWGN 时,信号与自己做相关运算是概率意义上最大。假设发射 $s_1(t)$,经过 AWGN,接收端收到

$$y(t) = s_1(t) + w(t) \tag{8-1}$$

其中，$w(t)$为高斯白噪声。接收信号$y(t)$与所有可能信号$s_i(t)$做相关运算，

$$y[i] = \int y(t)s_i(t) \tag{8-2}$$

最有可能和$s_1(t)$做相关运算得到的相关值$y[1]$最大。原因是一个信号$s_i(t)$和AWGN噪声$w(t)$的相关运算得到的值是一个高斯变量，并且只要多个信号$s_i(t)$的能量或功率相同，那么和同一个AWGN噪声$w(t)$的相关运算得到的值是几乎独立同分布的高斯变量。这和讲高斯变量时多个高斯变量的和类似，只不过相关运算涉及的积分是无穷和而已。因此，有AWGN与没有噪声两种情况的差别在于，前者是在后者的相关值上分别叠加了一个独立同分布的高斯噪声。这和在一堆参与比较的数之上，各自叠加一个公共的数而不会改变相互间大小关系类似，没有噪声时较小的分支如果叠加噪声后反而超过了之前较大的分支，就说明较小的分支所叠加的噪声变量取值很大，而根据高斯分布可知，噪声变量取值越大的概率越小。所以大部分情况下，还是没有噪声时较大的分支叠加噪声后仍然较大。

另一方面，我们可以看到，发射端有多少个可能的信号，接收端就需要准备多少个相关器，这说明相关接收方法虽然具有模拟意义，但只能用于数字通信系统，因为数字通信系统中发射端可能的信号数是人为设计的、有限的，也是接收端明确可以知道的。对于模拟通信系统，这个方法几乎没办法应用，因为模拟系统里发射端发的信号可以认为有无穷多个，那接收端也要准备无穷多个相关器才行，不现实！

8.1.2 匹配滤波判决

匹配滤波方法也是少数保有模拟意义（或者模拟特色）的处理方法之一，并且接下来我们会看到它和相关接收方法实质是等价的。其处理流程示意图如图8-2所示。

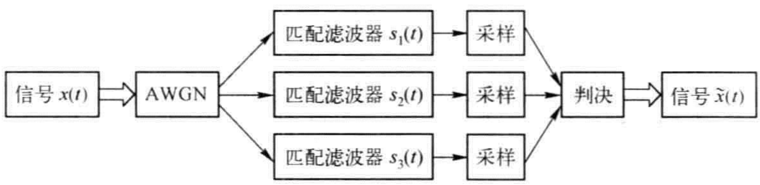


图8-2 匹配滤波判决

可以看到，在接收端需要有对应于各可能信号匹配的滤波器，接收信号（经过信道的信号）通过各个滤波器后，再分别被采样，比较各采样值的大小，用采样值最大的分支滤波器对应的信号作为发射端发的信号。

与相关接收判决不同的是，匹配滤波器是从线性系统角度来考虑，进去的是模拟信号，出来的还是模拟信号，而不是一个数值。假设模型仍然为

$$y(t) = s_1(t) + w(t) \tag{8-3}$$

假设对应于可能信号$s_i(t)$分支的滤波器冲激响应为$\tilde{s}_i(t)$，则接收信号$y(t)$通过各滤波器出来的信号为

$$y_i(t) = \int y(\tau)\ \tilde{s}_i(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8-4}$$

从式(8-4)来看，接收端需要对滤波器出来的信号$y_i(t)$采样，不管采哪个点t_0，得到的采样点形如

$$y_i(t_0) = \int y(\tau)\,\tilde{s}_i(t_0 - \tau)\,\mathrm{d}\tau = R_{y,s''}(t_0) \tag{8-5}$$

即为信号 $y(t)$ 与 $s_i''(t-t_0)$ 的相关值，其中

$$s_i''(t) = \tilde{s}_i(-t) \tag{8-6}$$

而根据相关接收，我们知道 $y(t)$ 与 $s_1(t)$ 的相关值最大，所以匹配滤波方法要满足

$$s_i''(t-t_0) = \tilde{s}_i(-t+t_0) = s_i(t)$$

则

$$\tilde{s}_i(t) = s_i(t_0 - t) \tag{8-7}$$

假设信号 $s_i(t)$ 的持续时间为 $0 \leqslant t \leqslant T_s$，为了保证是可实现的线性系统（滤波器），必须要求 $t_0 = T_s$，从而

$$\tilde{s}_i(t) = s_i(T_s - \tau) \tag{8-8}$$

即各滤波器的冲激响应和发射端可能信号是相关的，且为各信号的镜面反射加平移 T_s，如图 8-3 所示。

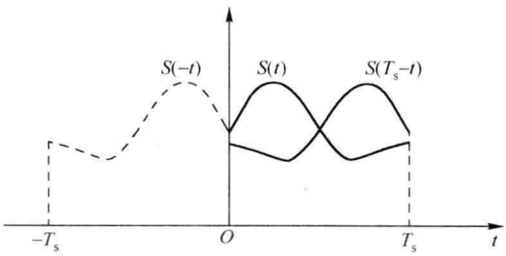


图 8-3　和 $S(t)$ 匹配的滤波器 $S(T_s-t)$

经过滤波器的信号在 $t=T_s$ 处采样得到的采样点为

$$\begin{aligned} y_i(T_s) &= \int y(\tau)\,\tilde{s}_i(T_s - \tau)\,\mathrm{d}\tau = \int y(\tau)\,s_i(T_s - (T_s - \tau))\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int y(\tau)\,s_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{8-9}$$

采样点的值与相关接收方法中的相关运算一样，剩下的分析也就和相关接收判决里完全一样了。

8.1.3　先验与后验概率判决

1. 信号判决法则

接下来，大家看如下的判决方法：在接收到数据的条件下，这个接收数据最有可能是因为发射端发射哪个信号造成的，就认为发射端发射的是哪个信号，这个可能性称为后验概率，这个判断准则就是根据接收到的数据，判断成后验概率最大的，我们称之为后验概率准则；或者看发射端在发射哪个信号的条件下，经过 AWGN 信道后接收到数据的概率最大，这个条件概率称为先验概率，这个准则称为先验概率准则。可以看到这两个判决准则感觉比较直观又很合理，这一节我们就来讨论它们。这两个准则理论上既可以用于模拟（意义）信号的判决。也可以用于数字信号的判决。但为了在讨论过程中，方便给出一些量化的结果，我们仅讨论用于数字信号的情况。

首先,这两个说法似乎表达的意思差不多,实际上还是有些区别的,取决于接收端是否提前知道发射端可能的发射数据集合。对于接收端来说,在发射端发射的数据的可能取值已知的情况下,先验概率和后验概率是相等的。下面以发射端只可能取两个值 x_1 和 x_2 来说明。首先,对于高斯噪声为 $w \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ 的 AWGN 信道,发射端发射一个数据 x,接收端能接收到的数据也满足高斯分布,即以 x 为均值,方差仍然为 σ^2 的高斯分布,

$$y = x + w \sim \mathcal{N}(x,\sigma^2) \tag{8-10}$$

从先验概率来说,如果发射端发射的是 x_1,经过 AWGN 得到 y,则高斯噪声 $w = y - x_1$,即发送 x_1 能得到 y 的概率就是 AWGN 中高斯噪声 $w = y - x_1$ 的概率;发射端发射 x_2 的情况类似。则先验概率为

$$\text{prob}(y|x_1) = \text{prob}(w = y - x_1), \quad \text{prob}(y|x_2) = \text{prob}(w = y - x_2) \tag{8-11}$$

从先验判决准则来说,上面两者谁大,就判断成发射端发射的数据。

从后验概率来说,接收端已经得到 y,如果是因为发射端发的 x_1 才得到的 y,高斯噪声必然有 $w = y - x_1$;发射端发射 x_2 的情况类似,则后验概率为

$$\text{prob}(x_1|y) = \text{prob}(w = y - x_1), \quad \text{prob}(x_2|y) = \text{prob}(w = y - x_2) \tag{8-12}$$

同样,从后验判决准则来说,上面两者谁大,就判断成发射端发射的数据。显然,先验概率和后验概率相等

$$\text{prob}(x_1|y) = \text{prob}(y|x_1), \quad \text{prob}(x_2|y) = \text{prob}(y|x_2) \tag{8-13}$$

对于这种情况,按先验判决和后验判决出来的结果是相同的。

对于 AWGN 来说,上面的先验与后验判决准则,除了可以从概率数字上计算来判决外,还有其他更直观的角度来描述吗?这个可以有。我们前面讲过,对于均值为 0 的高斯噪声有个性质:瞬时噪声取值绝对值较小的可能性较大。这就说明发送一个数据符号,在接收端接收到的值离它较近的概率较大;反过来说,接收端把接收到的值,判决成离它较近的可能数据符号,这种判决方式是正确的概率较大。我们把这种判决方式称为就近判决原则。

更一般地,对于均值为 μ,方差为 σ^2 的高斯噪声 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$,总是可以写成一个固定数 μ 与均值为 0 的高斯噪声之和,即

$$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2) = \mu + \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

那么,假设发射端发送的可能数据为 x_1,x_2,经过该 AWGN 后,接收端接收到的数据为

$$x_1 + \mu + \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$
$$x_2 + \mu + \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

相当于发射端发射的可能数据为 $x_1 + \mu$ 和 $x_2 + \mu$,再经过了一个均值为 0 的 AWGN 信道 $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$。这种情况下,就近判决方式具体为,看接收到的数据距离 $x_1 + \mu$ 近,还是距离 $x_2 + \mu$ 近。总之,非 0 均值 AWGN 可以很简单地转化为均值为 0 的 AWGN 来处理,后续我们就不会对这种情况分别描述,都只以均值为 0 的情况来讲解。

对于就近判决原则,除了比较距离之外,还可以进一步转化最后判决时依赖的形式。假设发送端的数据符号有两种:X_1 和 X_2,且 $X_1 > X_2$。接收端收到的是 $Y = X + W$,其中 X 为二者之一,$W \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$,即均值为 0、方差为 σ^2 的高斯分布。那么,发送端发送哪个符号时,接收端收到 Y 的概率大呢?计算如下:

$$\text{prob}(Y|X_1) = \text{prob}(W = Y - X_1) \tag{8-14}$$

$$\mathrm{prob}(Y|X_2)=\mathrm{prob}(W=Y-X_2) \tag{8-15}$$

可以看到上面的概率与 X、Y 的分布无关。我们前面说了，绝对值小的数据出现的概率大。那么，若

$$|Y-X_1|\geqslant|Y-X_2|$$

即 $Y<\dfrac{X_1+X_2}{2}$，则发送端发送的是 X_2 的概率要比是 X_1 的概率大，那我们就判断成 X_2；反之，X_1 的概率大，就判断成 X_1。也就是说，我们最后的判决依赖的形式可以是跟某个门限值比，这里门限为$\dfrac{X_1+X_2}{2}$。

2. 先验/后验判决性能

既然是以概率判决，就不会绝对正确，那判断错误的概率又是多大呢？

首先，弄明白什么叫判断错误？判断错误这里就是，发送端确定发的是 X_1，但我们用就近原则判断成了 X_2。也就是说，如果发的是 X_1，接收端收到的值仍然离 X_2 近，我们就会判断错误，发生这种情况的概率，就是我们按就近原则判断错误的概率，记为 $\mathrm{prob}_{X_1}(X_2)$，具体为

$$\mathrm{prob}_{X_1}(X_2)=\mathrm{prob}(|X_1+W-X_1|\geqslant|X_1+W-X_2|)$$

$$=\mathrm{prob}\left(W<\frac{X_2-X_1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{X_2-X_1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \tag{8-16}$$

同样可以计算 X_2 被错判成 X_1 的概率为

$$\mathrm{prob}_{X_2}(X_1)=\mathrm{prob}(|X_2+W-X_2|\geqslant|X_2+W-X_1|)$$

$$=\mathrm{prob}\left(W>\frac{X_1-X_2}{2}\right)=\int_{\frac{X_1-X_2}{2}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \tag{8-17}$$

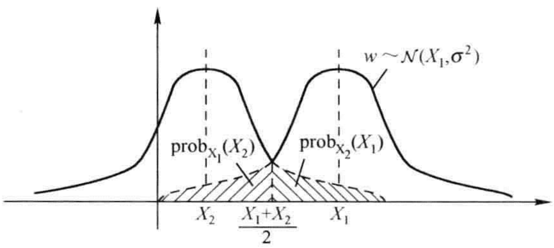


图 8-4　两两相互之间错误概率

我们知道积分就是求某个函数某个区间下覆盖的面积，这里函数是高斯分布函数，要求的面积就是阴影部分，如图 8-4 所示。由于高斯分布函数的对称性，我们知道上面两个错误概率公式所覆盖的阴影面积是相等的，也就是说，在就近判决原则下，两两相互之间判断错误的概率是相等的。

注意，这里是两两比较，而不是所有人比较。也就是说，如果发射端可能的发射信号只有两个，那么它们两两互叛错误概率相等，等价于说法“所有人被判决成其他人的错误概率相等”；然而当发射端可能的发射信号多于两个时，显然并不成立。比如，发射端有 3 个可能信

号：X_1、X_2、X_3，则 $\text{prob}_{X_1}(X_2)$ 不一定等于 $\text{prob}_{X_1}(X_3)$。但两两之间仍然具有对称性，即 $\text{prob}_{X_1}(X_2)=\text{prob}_{X_2}(X_1)$，$\text{prob}_{X_3}(X_2)=\text{prob}_{X_2}(X_3)$ 等。

进一步，如果高斯噪声功率固定，即求面积的函数曲线不变，而 X_1 和 X_2 的距离变大，即 X_1-X_2 和 X_2-X_1 一个变大一个变小，其各自覆盖的面积分别减小，即错误概率减小，如图 8–5 所示。

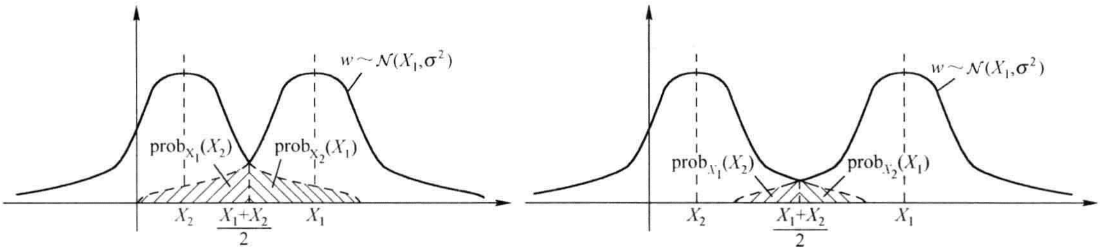


图 8–5　信号距离增大，AWGN 信道不变

反过来，如果 X_1 和 X_2 的距离固定，而高斯噪声的功率减小，则同样使得各自覆盖的面积减小，即错误概率减小，如图 8–6 所示，注意功率变小表现为概率密度曲线变瘦高。更进一步，X_1 和 X_2 的距离变大，同时高斯噪声的功率减小，最后显然也使得错误概率减小。

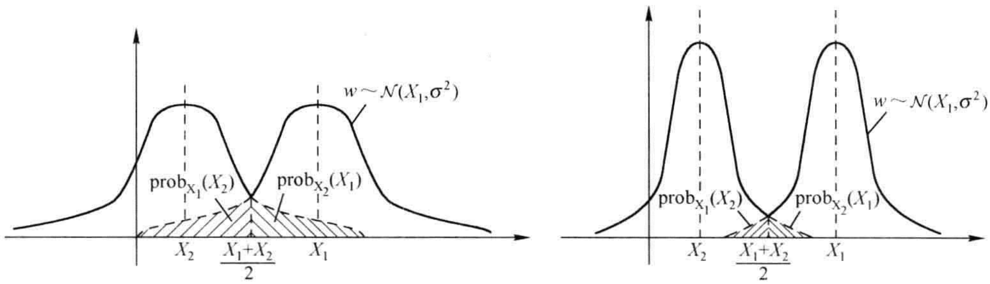


图 8–6　信号距离不变，AWGN 噪声功率减小

从这些分析可以看出，当 X_1、X_2 给定时，相互判决错误概率仅与可能信号的距离 $|X_1-X_2|^2$ 和噪声功率 σ^2 相关，并且它们之间的比值 $(X_2-X_1)^2/\sigma^2$ 越大，错误概率越小。并且最后可以归纳为，错误概率与 X_1、X_2 的绝对取值和噪声功率的绝对取值无关，仅由比值确定。

通常，当可能信号欧氏距离一定时，我们想以较小的平均能量（功率）发送数据，即要 $X_1^2+X_2^2/2$ 尽量小。分析表明，当 $X_1=-X_2$ 时，是一个比较好的满足要求的选择。此时，

$$(X_1-X_2)^2=4X_1^2=4X_2^2$$

而此时信号的平均功率为

$$\frac{X_1^2+X_2^2}{2}=X_1^2=X_2^2$$

从而

$$\frac{(X_2-X_1)^2}{\sigma^2}=\frac{4X_1^2}{\sigma^2}=\frac{4P(X)}{\sigma^2}$$

体现的就是信号平均功率与噪声功率的比值了，其中，$P(X)$ 表示信号 $X=X_1$ 或 X_2 的平均功率，也就是经常说的信噪比(Signal to Noise Ratio，SNR)。

那么，上面的分析可以这样总结，按就近原则判决，信噪比(SNR)较大时，误码率低；反之，信噪比(SNR)较小时，误码率高。

思考一下　如果噪声并不是瞬时值小的概率大，还会用就近原则解调吗？还会追求经常强调的尽量提高 SNR 吗？

8.1.4　平均错误概率最小化判决

8.1.3 节讲的先/后验概率判决准则虽然看起来合理，但是不能保证实际性能最好。例如，发射端两个信号出现的概率分别为 $P(X_1)=0.01\%$，$P(X_2)=99.99\%$，可以想象最简单的判决方法是总判成 X_2。虽然 X_1 总是被判错了，但它出现的概率本来就很小，故总体上的错误概率很小。而若按照上面的方法来判决，则可能有一部分的 X_1 被判正确了，但 X_2 可能有很大一部分被判错了，得不偿失。

所以，先/后验判决虽然看起来比较公平，但是整体实际性能并不好。基于上面的考虑，我们考虑另外一种标准：平均错误概率最小化。

以 8.1.3 节的例子为例，平均错误概率为

$$P_e=P(X_1)P_{X_1}(X_2)+P(X_2)P_{X_2}(X_1) \tag{8-18}$$

注意到，先/后验概率方法最后实际可以转化成用接收到的数据和门限 $(X_1+X_2)/2$ 比较，来判断发送的是 X_1 还是 X_2。若以同样的思想，我们把门限换成另一个，相应地错误概率 $P_{X_1}(X_2)$ 和 $P_{X_2}(X_1)$ 都会发生变化，如图 8-7 所示，从而平均错误概率 P_e 也会发生变化。例如，若门限换成 T，则错误概率变成

$$P_{X_1}(X_2)=\int_{-\infty}^{T-X_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$P_{X_2}(X_1)=\int_{T-X_2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

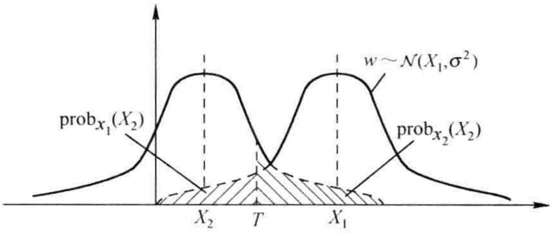


图 8-7　判决门限改变导致平均错误概率改变

在该门限判决思想下，总存在一个门限 T，使得平均错误概率最小。最后把接收到的数据和这个门限比较来判决，一定能使得平均错误概率最小。

具体地，使得平均错误概率最小的门限是多少，与发射端可能信号各自的出现概率以及高斯噪声功率有关，需要具体情况具体计算，此处就不统一处理了。

8.2 乘性噪声也来凑热闹

下面看看若不是加性信道,而是乘性信道,情况会怎样?我们假设信号 X 经过信道后得到 Y,有

$$Y = WX$$

其中,$W \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$。若仍然按先验/后验判决准则来判断,则先计算后验概率,得

$$P(X_1 | Y) = P\left(W = \frac{Y}{X_1}\right), \quad P(X_2 | Y) = P\left(W = \frac{Y}{X_2}\right) \tag{8-19}$$

若$\left|\frac{Y}{X_1}\right| < \left|\frac{Y}{X_2}\right|$,即$|X_1| > |X_2|$,则

$$P(X_1 | Y) > P(X_2 | Y)$$

那么 X_1 出现的概率大。可以看到,后验概率判决时,和接收到的 Y 没关系,和噪声功率也没关系,仅与发送的数据的绝对值大小有关。

我们再看看错误概率是什么状况。若$|X_1| > |X_2|$,则不论发送的是什么,总是被判成 X_1。显然 X_1 的错误概率是 0,而 X_2 的错误概率为 100%。此时平均错误概率为

$$P(X_1)0 + P(X_2)1 = P(X_2)$$

则绝对值相对小的 X_2 出现的概率越大,最后的平均错误概率越大。

如果$|X_1| = |X_2|$该怎么处理?比如,满足关系 $X_1 = -X_2$,例如 BPSK、QPSK 符号?假设 X_1、X_2 等概出现。有什么好的办法吗?好像没有。若我们固定总是挑其中一个作为判决结果,那和上面的一样,一个错误概率为 0,另一个为 100%,平均错误概率为 50%。若不固定挑,每次以 50% 的概率随机挑一个呢?最后的平均错误概率也为

$$50\% \times 50\% + 50\% \times 50\% = 50\%$$

事实上,若是随机猜,不论 X_1、X_2 是否等概分布,平均错误概率都是 50%。也就是说,上面的例子中采用后验概率判决时,若绝对值较小的 X_2 出现的概率大于 50%,那么平均错误概率会大于 50%,还不如随机猜。

三言两语

可以看到,随机猜,表面给人感觉不太科学,事实上有时它已足够科学了。

8.3 加法和乘法不分家

现在再考虑同时有乘性噪声和加性噪声的情况。信号 X 经过信道后得到 Y,有

$$Y = HX + W$$

其中,$H \sim \mathcal{N}(0,\sigma_1^2)$,$W \sim \mathcal{N}(0,\sigma_2^2)$。仍然直接计算后验概率

$$\text{prob}(y | X_1) = \sum_{w_0} \text{prob}(W = w_0)\text{prob}\left(H = \frac{y - w_0}{X_1}\right) \tag{8-20}$$

$$\text{prob}(y | X_2) = \sum_{w_0} \text{prob}(W = w_0)\text{prob}\left(H = \frac{y - w_0}{X_2}\right) \tag{8-21}$$

可以看到对于上面两个和式里面的同一个固定的 $W=w_0$，整个分项的大小完全由 $|X_1|$ 和 $|X_2|$ 中大的那个决定。求和累加并不改变这个关系，故整个概率也完全由 $|X_1|$ 和 $|X_2|$ 之间的大小决定。若 $|X_1|>|X_2|$，则

$$\mathrm{prob}(y|X_1)>\mathrm{prob}(y|X_2)$$

和乘性信道结果性能一样。特别地，若 $|X_1|=|X_2|$，则两者后验概率又完全相等。我们已经看到，这样判决的性能很差，平均错误概率维持在 50%。有办法提高吗？比如预先知道 h 或者 w，从而减少不确定因素。详细内容在以后的研究中我们会具体地讲。首先加性噪声一般认为是任何时候都完全独立的，所以不可能预先知道。而乘性噪声一般来说是信道衰落系数，是可以重现的，即这个乘性噪声在一段时间内（比如第四部分会讲的无线信道相干时间内）近似维持不变。如果是这样，则可以预先发一个试探信号，把衰落系数 h 估计出来再处理。假设 h 已知，接收端把接收到的数据稍加处理得到

$$y'=\frac{h\times y}{h\times h}=x+\frac{h\times w}{h\times h}=x+w' \tag{8-22}$$

这就变成了一个只有加性噪声的信道了，可以采用加性噪声的接收处理方法了，注意此时在式（8-22）中噪声 w' 功率变成了 $\frac{\sigma^2}{|h|^2}$。带信道衰落的内容，我们在第四部分会继续详细介绍。

第二部分小结

第二部分开始建立消息与信号的联系，从而研究如何设计、传输以及检测信号来完成消息的传递。

首先，从消息被表示成电磁信号的过程和方式来看，通信系统可以分为模拟通信系统和数字通信系统。我们讨论了这两类系统在理想情况下各自如何实现无失真通信，这个问题需要联合考虑发射端信号设计，经过什么样的信道，以及接收端可以采取哪些操作来处理信号。在讨论过程中，我们发现模拟通信系统要“笨拙”得多，太依赖于发射端信号和信道的天然形态；而数字通信系统里，我们可以人为加入很多“技巧”来设计和处理信号，这些是数字通信系统相对于模拟通信系统的优势，也使得数字通信系统逐渐成为主流。当然，理论上来看，数字通信系统可以看成一类特殊的模拟通信系统，也需要考虑一些公共的问题，例如信号的调制解调等。现实通信系统中，一定有噪声，这里我们介绍了最简单通用的 AWGN 模型。接下来我们还介绍了在噪声系统里，接收端有哪些处理信号的基本方式以及相应的性能讨论。最后需要指出，在讨论本部分内容时，我们用到了很多第一部分的基础知识，包括信号的频谱分析、采样定理等，因此建议大家对第一部分内容认真掌握，并且灵活应用。

第三部分

信息论基础

第二部分开始讨论用信号来承载消息并传输信号，以及无噪声信道下如何做到无失真通信，还讨论了极限传输能力，比如奈奎斯特传输率。接着引入了噪声，看起来在有噪声信道下，是一定不可能做到无失真的。这是真的吗？第三部分就来回答这个问题。

经过分析讨论，我们会发现即使有噪声污染，还是可以做到无失真通信的。首先，我们要进一步认识一下“无失真通信”，比如传输无失真和通信无失真有区别吗？基于此，我们又讨论了什么情况下，即使有噪声也可以达到无失真通信。同时，既然能无失真通信，其极限能力怎样？理论上怎么达到极限能力？最后，理论上达到极限能力的手段，在现实中并不能很好实施。那么，我们就考虑有哪些现实手段可以尽量接近极限能力呢？其中一个现实手段就是信道编码，这部分也有介绍。

第9章 香 农 熵

本章介绍香农(Shannon)在建立他的信息论基础时用到的一些基本概念。

9.1 熵的提出——和香农不一样的思考

熵(Entropy)是信息论一个非常重要的概念,通常信息论的教材中会定义信息的不确定性、平均不确定性,或者规定一些合理的性质,然后通过泛函技巧导出熵的表达式,本章给大家介绍一个更直观的组合解释。

性质9–1 假设信息符号集合是$\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$,其各自以概率$\{p_1,p_2,\cdots,p_N\}$出现。一个长度包含T个信息符号的序列,当$T\to\infty$时,共有多少种不同的序列呢?答案是

$$K=\binom{T}{Tp_1}\binom{T-Tp_1}{Tp_2}\cdots\binom{T-Tp_1-Tp_2-\cdots-Tp_{N-1}}{Tp_N} \tag{9–1}$$

其中,$\binom{n}{m}$表示二项式系数,即从n个符号中取m个的不同取法个数。

证明 当$T\to\infty$,根据大数定理(参见附录B概率基础)知,x_i在序列中出现的频率趋近于其概率,即出现的次数无限趋近于Tp_i。那么信息序列的不同个数等于一个简单的组合问题:从T个符号位置中,选Tp_1个位置放上x_1,再从剩下的位置中选Tp_2个放上x_2,依次类推。显然,这样的个数为

$$K=\binom{T}{Tp_1}\binom{T-Tp_1}{Tp_2}\cdots\binom{T-Tp_1-Tp_2-\cdots-Tp_{n-1}}{Tp_n} \tag{9–2}$$

接下来用到如下引理,其具体推导见附件D。

引理9–1 对于固定的$a,b\geqslant 0,T\to\infty$,成立

$$\binom{Ta}{Tb}=\frac{\sqrt{a}\,a^{Ta}}{\sqrt{2\pi T}\sqrt{b(a-b)}\,b^{Tb}(a-b)^{T(a-b)}} \tag{9–3}$$

根据引理9–1化简K可得如下重要定理,具体证明见附录D。

定理9–1 要用二进制比特序列给所有K个序列编号,那么平均一个信息符号x_i至少需要$H(X)$比特才能把这些序列用不同的二进制比特序列表示区分开,该$H(X)$被定义为香农熵,则

$$H(X)=\lim_{T\to\infty}\frac{\log_2 K}{T}=\sum_{i=1}^{N}-p_i\log_2 p_i \tag{9–4}$$

三言两语

一般把这个熵理解为平均不确定性，通俗点讲就是那么多无限长的序列，在没有给你任何信息时，不确定将要发送的是哪个序列的序列个数。把这个序列个数再平摊到序列中每一个符号（取对数后）就是 $H(x)$。从这个意义上来说，这里的熵一定是正数。

当然，是正数这点从熵的表达式也可以知道，因为所有的 $0 \leqslant p_i < 1$，则 $\log_2 p_i < 0$，从而所有项 $-p_i \log_2 p_i \geqslant 0$，且其中至少一个是大于0的。

一般教材中还先定义一个事件的信息量，即一个以概率 p 出现的事件，它携带的信息量为 $-\log_k p$。当底数 $k=2$ 时，信息量的单位为比特，本书里主要采用 $k=2$，并且如果对数表达式里底数 k 没有明确，一般都可以当 $k=2$ 来理解。信息量这个概念如果不升华到熵，即平均信息量，它单独出现是没有什么太大意义的。

三言两语

另外，可以想象关于平均不确定性，分布越均匀，从而任何一个事件出现的可能性差不多，平均不确定性就高，也即熵越大。反之，如果可能的事件里有一个出现概率特别高的，剩下的出现概率都很小，那么不确定性就低，熵就小；此种情况下，即使不给出信息，也会猜想可能是概率最大的那个。

这个理论上其实是因为上面那一串二项式系数（Binomial Coefficient）相乘等价于一个组合数学上的多项式系数（Multinomial Coefficient），它和二项式系数一样，先升后降，在中间时达到最大，即二项式系数

$$\binom{N}{M} = \binom{N}{M,\ N-M} \tag{9-5}$$

当 M 从0上升时，先是逐渐递增，在接近 $N/2$ 时，达到最大值，然后又逐渐下降。多项式系数

$$\binom{N}{M_1, M_2, \cdots, M_k} = \binom{N}{M_1}\binom{N-M_1}{M_2}\cdots\binom{N-M_1-\cdots-M_{k-1}}{M_k} \tag{9-6}$$

其中，$\sum_i M_i = N$。类似地，当 M_i 都趋近于 N/k 时达到最大，从而当上面概率分布 p_i 几乎相等时，熵趋近于最大值。

现在给些例子，在给定条件下，看看哪些分布的熵最大。

例 9-1　集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 为有限集合，当 x_i 等概率分布时，其熵达到最大，最大值为

$$H(X) = -\sum_i \frac{1}{N}\log_2\frac{1}{N} = \log N \tag{9-7}$$

上面的讨论中，熵的概念是以离散随机变量来说明的。实际上，连续随机变量也有熵的概念。对于连续随机变量 X，假设其概率密度函数为 $f(x)$，则对于每个 $X=x$，其概率为

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x)\Delta x$$

从而应用式（9-3）所示的离散情况熵的概念可得到

$$\begin{aligned} H(X) &= \lim_{\Delta x \to 0} -\sum_n [f(n\Delta x)\Delta x]\log_2[f(n\Delta x)\Delta x] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} -\sum_n [f(n\Delta x)\Delta x]\log_2 f(n\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} -\sum_n [f(n\Delta x)\Delta x]\log_2 \Delta x \\ &= -\int f(x)\log_2 f(x)\,\mathrm{d}x - \log_2 \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{9-8}$$

上式即为直接应用离散情况得到的熵的表达式。式中有一个正无穷大量 $-\log dx$,这种形式的熵被称为连续随机变量的绝对熵。并且注意到,任何分布的随机变量都有这个公共的正无穷大量。因此,一般应用的时候,更多的是用如下定义的相对熵。在本书其他讨论中,若无特别说明,连续随机变量的熵都是指相对熵。

定义 9–1 对于连续随机变量 X,假设其概率密度函数为 $f(x)$,则该随机变量的熵为

$$H(X) = -\int f(x)\log_2 f(x)\,\mathrm{d}x \tag{9-9}$$

因为绝对熵总是有个正无穷大量,和离散情况一样,从而可以认为总是正数;但是,相对熵把正无穷大量去掉后就不一定了。

对于连续随机变量,给定条件下,哪些分布的熵最大呢? 下面给个例子。

例 9–2 当随机变量 X 取值集合为实数域$\mathbb{R}$ 时,所有均值为 μ,方差限制为 σ^2 的分布中,高斯分布

$$X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$$

的熵达到最大,此时最大熵为

$$H(X) = \log_2\sqrt{2\pi e\sigma^2} \tag{9-10}$$

注意最大熵与均值无关,因为不确定性刻画所有取值的可能性的分布规律,与取值的数值无关。另外,显然当 $2\pi e\sigma^2 < 1$,即方差 $\sigma^2 < \dfrac{1}{2\pi e}$时,计算出来的相对熵为负数。

最后,熵的概念还可以推广到随机向量的形式,即多个随机变量的联合熵,比如推广到两个随机变量,则有

$$H(X_1,X_2) = -\sum_{(x_{1,i},x_{2,j})} P(x_{1,i},x_{2,j})\log_2 P(x_{1,i},x_{2,j}) \tag{9-11}$$

9.2 数据压缩极限——熵的一个重要应用

9.1 节香农熵的推导,还可以得到如下形式描述的命题。

性质 9–2(数据压缩极限定理) 符号集合$\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$,对于由该集合中符号组成,且符号 x_i 出现概率为 p_i 的所有消息,若要对这些消息进行二进制编码,那么每个符号平均至少需要的比特个数为

$$\sum_i -p_i\log_2 p_i \tag{9-12}$$

数据压缩极限定理只是从理论上说明了最小平均要用多少比特来编码一个序列,但是没说具体怎么编。当然从理想情况来说,它其实也说了怎么编,即把所有可能的无穷长序列摆在哪儿,然后看总共需要多少比特,最后每一个序列对应一个总共比特数的一种取值就好了。

但问题是,要等到无穷长序列出来了才开始编,是不现实的。现实可以想到的总是以一个有限长为粒度,将无限长序列分割成有限长的一部分再编码,然后再把各有限长部分对应的编码拼起来得到无穷长序列对应的编码。而所谓“有限长”,最自然最简单的情况就是把组成序列的每一个可能的符号都用比特来分别编成二进制。可以想象,这种编码方法最后需要的比特数肯定比数据压缩定理说明的极限情况多。比如最笨的方法,假设共有 $N=8$ 个数据符号,不管每

个符号出现的概率是多少,每个就用3比特表示就好了,即平均每个符号需要3比特表示。

有哪些比较好的,与极限情况差别较小的编码方法呢?我们比较熟悉的哈夫曼(Huffman)编码方法就是一个,下面简单介绍以二叉树结构来生成哈夫曼编码的过程。

假设有符号$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$,分别对应的概率为

$$\{0.1,0.2,0.2,0.15,0.35\}$$

先找到其中概率最小的两个x_1,x_4,把它们作为一个树叉的两个叶子,树叉根点s_1的概率为两个叶子概率之和0.25;在$\{s_1,x_2,x_3,x_5\}$中继续找概率最小的两个x_2,x_3,把它们作为一个树叉的两个叶子,树叉根点s_2的概率为两个叶子概率之和0.4;在$\{s_1,s_2,x_5\}$中继续找概率最小的两个s_1,x_5,把它们作为一个树叉的两个叶子,树叉根点s_3的概率为两个叶子概率之和0.6;在$\{s_2,s_3\}$中继续找概率最小的两个s_2,s_3,把它们作为一个树叉的两个叶子,树叉根点s_4的概率为两个叶子概率之和1;最后把二叉树里每个分叉的两条边分别标上0和1,每个x_i的编码就是整棵二叉树根到x_i的边上的0,1序列。具体过程如图9-1所示。

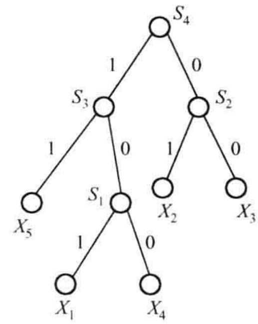


图9-1 二叉树生成哈夫曼编码

最后,各符号的二进制表示为

$$x_1=101,\quad x_2=01,\quad x_3=00,\quad x_4=100,\quad x_5=11$$

那么,每个符号平均需要的二进制比特数为

$$3\times0.1+2\times0.2+2\times0.2+3\times0.15+2\times0.35=2.25 \tag{9-13}$$

而极限情况需要的最小比特数为

$$-\sum_{i=1}^{5}\text{prob}(x_i)\log_2\text{prob}(x_i)\approx2.2 \tag{9-14}$$

如果采用最笨的方法,则每个符号需要$\log_2 5\approx2.32$比特表示。可看到哈夫曼编码和理论极限已经很接近了。仔细观察知,最笨的方法是等长编码,即每个符号采用相同的比特数来表示;而哈夫曼编码是不等长编码,其主要思想就是出现次数多(概率大)的符号用较短的比特序列表示,而出现次数少的符号用较长的序列表示。数据压缩属于信源编码领域,计算机里各种压缩文件都采用了一定的数据压缩方法,比如ZIP文件等;各种图片格式(JPEG、BMP等)也都采用了一定的数据压缩方法。

9.3 也谈条件熵与互信息

两个随机变量X和Y,当知道Y时,X的平均不确定性是多少?这个平均不确定性称为条件熵(Conditional Entropy)。和熵的概念类似,只不过将概率空间及分布换成了条件概率对应的空间及分布,详细内容参见本书附录B。请大家各自回顾我们讲条件概率时,如何确定条件概率对应的概率空间。

定义9-2(条件熵) 两个随机变量X和Y,当知道Y时,X的平均不确定性称为条件熵$H(X|Y)$,并且

$$\begin{aligned}H(X|Y)&=E_Y[H(X|Y=y_j)]\\&=-\sum_{y_i}P(y_j)\sum_{x_i}P(x_i|y_j)\log P(x_i|y_j)\end{aligned}$$

$$= -\sum_{x_i,y_i} P(x_i,y_j)\log P(x_i \mid y_j) \tag{9-15}$$

根据联合熵和条件熵的定义知：

性质 9-3 熵、联合熵、条件熵满足如下关系：

$$H(X,Y)=H(X)+H(Y|X) \tag{9-16}$$

两个随机变量 X 和 Y，考察 X。假设发射端打算告诉接收端一个满足 X 分布的无穷长序列，当发射端还没有把这个序列发给接收端时，即接收端什么信息都没有时，$H(X)$ 反映了接收端不能判断发射端打算发的是哪一个序列的序列个数；而当发射端把这个序列发给接收端后，接收端得到了 Y，即接收端得到了一部分信息，虽然有多个 X 序列可能都会得到 Y，从而仍然不知道具体 X 是哪一个。但是，多多少少会明确知道哪些 X 一定不是发射端发的序列，即一定得不到 Y 的 X。这里 $H(X|Y)$ 反映了接收端在知道 Y 时仍然不能判断发射端发的是哪一个序列的序列个数，也即反映了能得到 Y 序列的 X 序列的平均个数。这样，按照平均不确定性的理解，不确定的序列个数减少了，从而一定程度上获得了信息量，即减少的那一部分不确定性

$$H(X)-H(X|Y) \tag{9-17}$$

这个信息量也被称为互信息。

X 序列和 Y 序列的对应关系如图 9-2 所示。

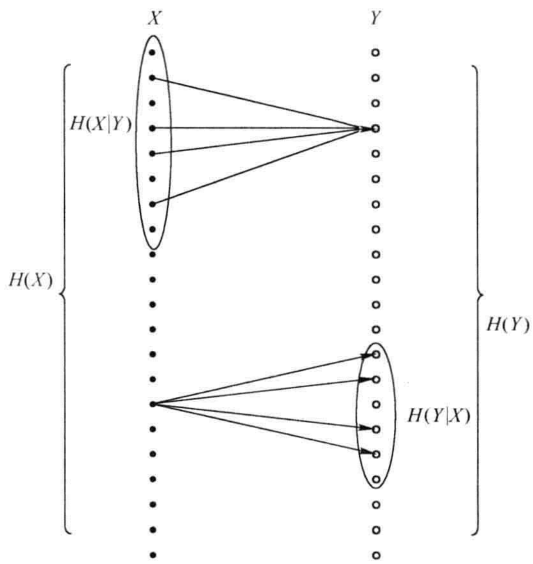


图 9-2 X 序列和 Y 序列的对应关系

定义 9-3（互信息） 两个随机变量 X 和 Y，当知道其中一个，从而得到的关于另一个的信息量被称为互信息 $I(X;Y)$

$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=H(Y)-H(Y|X) \tag{9-18}$$

互信息的概念也可以有向量形式和条件互信息。比如互信息的向量形式推广

$$I([X_1,X_2];Y)=H(X_1,X_2)-H([X_1,X_2]|Y) \tag{9-19}$$

表示一对随机变量（随机向量）和一个随机变量之间，知道其中一方能获得的关于另一方的信息量。又比如条件互信息

$$I([X;Y]|Z)=H(X|Z)-H(X|[Y,Z]) \tag{9-20}$$

表示在已经知道 Z 的情况下，知道 Y 能获得的关于 X 的信息量，等于在知道 Z 时 X 的平均不确定性与同时知道 Z 和 Y 时 X 的平均不确定性的差值。并且互信息满足如下链式法则：

$$I([X_1,X_2];Y)=I(X_1;Y)+I([X_2;Y]|X_1) \tag{9-21}$$

表示一对随机变量（随机向量）$[X_1,X_2]$ 和一个随机变量 Y 之间，知道 Y 能获得的关于 $[X_1,X_2]$ 的信息量等于知道 Y 能获得的关于其中一个分量（比如 X_1）的信息量与在该分量 X_1 已知条件下知道 Y 能获得的关于其中另一个分量（比如 X_2）的信息量之和。

第 10 章　有失真系统的无失真通信

从章节题目来看,似乎有点矛盾,既然是有失真的系统,怎么能无失真通信呢?没错,其实这还是广义的无失真通信,只不过离狭义的无失真更远了。

10.1　问题具体化——章标题矛盾,是不是写错了

这次,我们先从数字信号序列说起,并且去掉中间信号设计以及具体信道相关内容,直接看最后的结果:假设发射端发送的是 X 序列,其中序列中的元素从集合 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 中取得;接收端接收到的是 Y 序列,其中序列中的元素从结合 $\{y_1, y_2, \cdots\}$ 中取得。实际通信中,基本上会有 $\{y_1, y_2, \cdots\} \subseteq \{x_1, x_2, \cdots\}$,即为子集关系。但这里作为一般化讨论,我们还是分别表示。X 序列中 x_i 出现的概率为 $P(x_i)$,X 序列经过信道后,元素 x_i 变成 y_j 的概率为 $P(y_j | x_i)$。现在的问题是:什么情况下,可以从接收到的 Y 序列无误地判断出发射端发射的是哪一个 X 序列呢?

10.2　怎么无误通信——标题没错,一切皆有可能

先说,如果 X 序列是有限长的,那么任何一个 X 序列经过信道后,可能得到任何 Y 序列,也就是转换概率 $P(y_j | x_i)$ 在有限情况下基本没什么用,此时无论如何都不可能实现无误判断。所以,在有概率的情况下,我们如果还想得到比较确定的判断,就必须先让概率的随机效果达到稳定状态,也就是要用到大数定理使其收敛于确定效果。

既然如此,我们就假设 X 序列是无限长的,长度为 $T \to \infty$。那么根据大数定理,任何一个这样的 X 序列中,x_i 的个数必然有 $TP(x_i)$ 个。但请注意,大数定理只能保证 x_i 出现的个数,并不能保证 x_i 在 X 序列中出现的位置。也就是说,任何满足 x_i 的个数为 $TP(x_i)$ 的序列都是等概出现的。那么,这样的 X 序列共有多少个呢?这就是一个简单的组合问题,即从 T 个位置中选出 $TP(x_i)$ 个位置放上 x_i。可以先从 T 个位置中选 $TP(x_1)$ 个位置放 x_1,再从 $T - TP(x_1)$ 个位置中选 $TP(x_2)$ 个位置放 x_2,依此类推,最后根据 9.1 节关于熵的讨论得到序列总个数为

$$\binom{T}{TP(x_1)}\binom{T - TP(x_1)}{TP(x_2)}\cdots = 2^{TH(X)} \tag{10-1}$$

其中,$H(X)$ 为分布 X 的熵。

再考虑任何一个这样的 X 序列经过信道后,接收端能得到多少个不同的 Y 序列呢?还是一个组合问题。注意,当 $T \to \infty$ 时,X 序列中 x_i 的个数 $TP(x_i)$ 也是无限长的,所以根据大数定理,经过信道后必然有 $TP(x_i)P(y_j | x_i)$ 个 x_i 变成了 y_j,但到底是哪一个 x_i 变成了 y_j 不确定。和上面相同的计算方法,单看 X 序列中某个 x_i 所在的 $TP(x_i)$ 个位置经过信道变成 y_j 的不同

情况有

$$\binom{TP(x_i)}{TP(x_i)P(y_1|x_i)}\binom{TP(x_i)-TP(x_i)P(y_1|x_i)}{TP(x_i)P(y_2|x_i)}\cdots \tag{10-2}$$

如图 10-1 所示，这些不同情况必然对应得到不同的 Y 序列，再联合看所有 x_i，计算得到任何一个 X 序列经过信道后可能变成的不同 Y 序列个数为

$$\prod_{x_i}\binom{TP(x_i)}{TP(x_i)P(y_1|x_i)}\binom{TP(x_i)-TP(x_i)P(y_1|x_i)}{TP(x_i)P(y_2|x_i)}\cdots \tag{10-3}$$

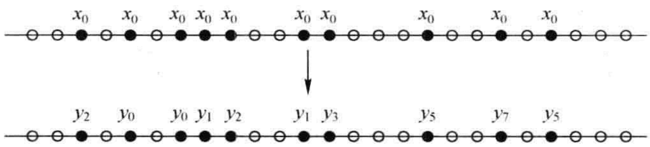


图 10-1 X 序列经过信道后元素转移情况

现在回到最开始的问题：怎么从接收到的 Y 序列来无误判断发射端发送的是哪个 X 序列呢？

从前面的分析计算，我们可以看到可能会有两个不同 X 序列经过信道后得到同一个 Y 序列，显然通过这样的 Y 序列是不能无误判断出发射端发的是哪一个 X 序列的。因此要无误判断，首先就得无误区分得到的 Y 序列是哪一个 X 变过来的；要无误区分，就要求两个 X 序列经过信道后得到的 Y 序列没有交集。那么，接下来归结为讨论如下两个问题：

- 存在性。是否能找出两个不同 X 序列经过信道后的 Y 序列没有交集呢？
- 极限能力。进一步，最多能找出多少个不同 X 序列，使得它们经过信道后得到的 Y 序列两两都没有交集呢？

针对这两个问题，如果序列个数是有限的情况，可以画一个二分图或者穷举来看看。但这里是一个无限的比较泛的命题，此法不可取。这里，我们介绍一个概率方法，这种概率方法的思想可以应用到任何关于存在性问题的讨论里。上面的两个问题可以另外叙述成：是否存在 2^{TR} 个 X 序列，它们两两对应的 Y 序列没有交集呢？R 最大为多少？

概率方法思想 概率方法的思想是：构造一个合理的概率空间，使得要讨论的命题为该概率空间里的一个事件，要证明该命题是可能成立的（存在的），只需要证明其对应事件在概率空间上的发生概率大于 0 即可。

通过分析，可以得到如下非常重要的结论：

定理 10-1 *对任意的 $R>0$，当 $R<H(X)-H(X|Y)$ 时，可以找到 2^{TR} 个 X 序列使得这些序列经过信道后得到的 Y 序列各不相同。*

更不可思议的是，如上定理中“找到 2^{TR} 个 X 序列”的方法之一就是从所有序列中随机等概率地独立选择 2^{TR} 个 X 序列。也就是说，从所有 X 序列中随机等概率地选择 2^{TR} 个 X 序列，那么这些序列经过信道后得到的 Y 序列几乎各不相同。

既然存在这样 2^{TR} 个序列，当发射端发射这 2^{TR} 个 X 序列时，接收端可以根据接收到的 Y 序列无误判断出发射端发射的是哪一个 X 序列，那么这 2^{TR} 个 X 序列可以用来作为表示某组消

息的信号,并能实现无误通信。且此时,单位时间(每个符号时间)内平均能无误传输的比特速率为

$$\frac{\log_2 2^{TR}}{T}=R \tag{10-4}$$

另一方面,我们知道这样的序列个数 2^{TR} 有最大值,说明在该信号表示方法及相应信道下,能无误通信的消息个数也有这个最大值

$$2^{TR}\leqslant 2^{T[H(X)-H(X|Y)]} \tag{10-5}$$

即信道平均能无误传输的比特速率(每个符号时间携带比特数)有最大值

$$R\leqslant H(X)-H(X|Y)=I(X;Y) \tag{10-6}$$

再一方面,假设信道的转移概率 $P(y_j|x_i)$ 不变,即转移概率只是信道的固定特征,和输入分布无关。我们把 X 序列的集合改变了,即把 $P(x_i)$ 改变了,那么这个能区分的最大序列个数也会相应改变。那么遍历所有可能的分布 $P(x_i)$,其中能区分最多序列的那一个分布 $P(x_i)$ 能表示且无误通信的消息个数最多。后续,我们知道这就是所谓的该信道的容量。

第 11 章　信道容量:噪声信道的极限传输能力

在第 10 章中我们已经得到了下面的结论:

性质 11–1　*序列 X 中 x_i 出现的概率为 $P(x_i)$,选用 X 序列表示消息,信道的转移概率为 $P(y_j|x_i)$,该信道在时间 T 内最大能无误传输 $2^{T(H(X)-H(X|Y))}$ 个消息,即单个符号平均能携带 $H(X)-H(X|Y)$ 比特信息量,或者说单位符号时间内能传输 $H(X)-H(X|Y)$ 比特信息量。*

注意到,上面的命题里若 $P(x_i)$ 改变或者 $P(y_j|x_i)$ 改变,那么能无误传输的最大消息个数也会随着变化。当我们把信道固定,即转移概率 $P(y_j|x_i)$ 不变时,遍历所有可能的分布情况 $P(x_i)$,可以找到一个分布使得单位符号时间内能无误传输的消息个数达到最大,这个最大值(以换算成比特来衡量)可以定义为该信道的容量 C,具体为

$$C=\max_{P(x_i)}\{H(X)-H(X|Y)\} \tag{11-1}$$

接下来,我们看看噪声信道的信道容量具体是多少。

11.1　解读香农在 1948 年开山之作中的思考

首先,考虑 AWGN 信道的信道容量,我们看香农在 1948 年开山之作“通信的数学基础”中是如何思考处理的。

11.1.1　将模拟信号直观几何模型化

香农在 1948 年(包括 1949 年的“噪声信道下的通信”)开山之作中采用了直接看模拟信号区分度的方法。假设发射端可能信号 $x(t)$ 带宽为 W,功率为 P。AWGN 信道下高斯白噪声 $\omega(t)$ 功率为 σ^2,均值为 0。在时间 T 内,共有多少个满足条件(带宽、功率限制)的信号在叠加完噪声后仍能两两区分开呢?所谓能两两区分开,指的是两个不同信号叠加完噪声后仍然不同。特别地,若噪声功率为 0,则相当于没有噪声,当然任何两个信号都可以区分开。

我们知道,任一带宽为 W,时长为 T 的信号 $f(t)$ 可以由 $2WT$ 个采样点来表示(特殊情况的微小误差暂不考虑),记采样点序列为 $\{x_0,\cdots,x_{2WT-1}\}$。不妨设这里是刚好以奈奎斯特率采样,则根据坐标与模的关系推导出采样点的平方和与该信号的功率的关系为

$$\sum_{i=0}^{2WT-1}|x_i|^2=2WTP \tag{11-2}$$

从而带宽为 W,时长为 T,功率为 P 的所有信号即对应所有长度为 $2WT$ 且平方和为 $2WTP$ 的采样点序列(向量),该向量在 $2WT$ 维空间中对应以坐标原点为球心,半径为 $\sqrt{2WTP}$ 的广义球体(狭义球体仅为三维)球面上一点。

每个这样的信号经过 AWGN 后,其对应的采样点序列中每个采样点独立地叠加了一个独立同分布的高斯噪声,记叠加的 $2WT$ 个高斯噪声点为

$$\{w_0,\cdots,w_{2WT-1}\},\quad x_i \to x_i + w_i$$

另一方面,我们根据维纳-辛钦定理已推导知,高斯白噪声的功率即为每个时刻对应的高斯变量的方差,则每个采样点独立地叠加了一个均值为 0,方差为 σ^2 的高斯噪声,即 $w_i \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$。从整个采样点构成的向量来说,经过 AWGN 后变成了另一个向量 $[y_0,\cdots,y_{2WT-1}]$

$$[x_0,\cdots,x_{2WT-1}] \to [y_0,\cdots,y_{2WT-1}] = [x_0+w_0,\cdots,x_{2WT-1}+w_{2WT-1}] \tag{11-3}$$

向量 $[y_0,\cdots,y_{2WT-1}]$ 在 $2WT$ 维空间中所对应点距离原信号点 $[x_0,\cdots,x_{2WT-1}]$ 为

$$\widetilde{N} = \sum_{i=0}^{2WT-1} w_i^2 \tag{11-4}$$

想一想,如果不同信号对应的采样点向量经过 AWGN 后得到的相应向量能够两两区分开,那么原信号就可以两两区分开。问题是什么时候能两两区分开,能区分多少呢? 下面接着讨论。

11.1.2　想办法让随机性稳定下来

首先当 $2WT$ 很小时,所有 $2WT$ 个独立噪声点的平方之和 $\widetilde{N}$ 可以以任意正概率(大于 0 的概率)取任何数,例如取 $\widetilde{N}_0$ 的概率为

$$\sum_{w_0^2+\cdots+w_{2WT-1}^2=\widetilde{N}_0}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right]^{2WT} e^{\frac{-(w_0^2+\cdots+w^2{}_{2WT-1})}{2\sigma^2}} \mathrm{d}w_0\cdots\mathrm{d}w_{2WT-1} = \sum_{w_0^2+\cdots+w^2{}_{2WT-1}=\widetilde{N}_0}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right]^{2WT} e^{\frac{-\widetilde{N}_0}{2\sigma^2}} \mathrm{d}w_0\cdots\mathrm{d}w_{2WT-1} \tag{11-5}$$

也就是说,一个信号对应的采样点叠加噪声后在接收端可以变成任意一个点,这就比较麻烦了,因为两个点可能经过噪声后变成同一个点,显然不可能完全区分开两个不同的信号。需要额外说明的是,从式(11-5)还可以看出,经过噪声信道后任何距离原信号点为 $\widetilde{N}$ 的点出现的概率相同,这是高斯分布所独有的性质。

但当 $2WT$ 足够大时,根据大数定理,独立同分布的一系列随机变量的瞬时实现平均以趋于 1 的概率等于随机变量的均值。这里独立同分布的随机变量是高斯变量 w_i 的平方 w_i^2,其均值为 σ^2。也就是说,这里噪声点的平方和以几乎为 1 的概率趋于 $2WT\sigma^2$。即任何一个信号对应的点经过噪声后都会在以该信号为中心,半径为 $\sqrt{2WT\sigma^2}$ 的球面上,并且对于高斯噪声来说,球面上任何点出现的概率相等。

11.1.3　就这么得到 AWGN 信道容量

好啦,现在只要任何两个球面不相交,那就能区分两个点了。显然,球面不相交,必然整个球体也不相交。共有多少个能区分的原信号点就是看共有多少个这样不相交的球。如何计算到底有多少个不相交的球体个数呢?

再观察一下,因为最后经过噪声污染后的点离坐标原点最远处为半径 $\sqrt{2WT(P+\sigma^2)}$ 的球面上,离坐标原点最近处为半径 $\sqrt{2WT(P-\sigma^2)}$ 的球面上。从而如图 11-1 所示,其中 $N=\sigma^2$,实际上这些球都集中在离半径为 $\sqrt{2WT(P+\sigma^2)}$ 的大球的表面很近那一圈上(球环上)。那么大球环上能装的不相交小球个数,可以看成半径为 $\sqrt{2WT(P+\sigma^2)}$ 大球里能装的球体与半径为 $\sqrt{2WT(P-\sigma^2)}$ 大球里能装的球体个数之差。

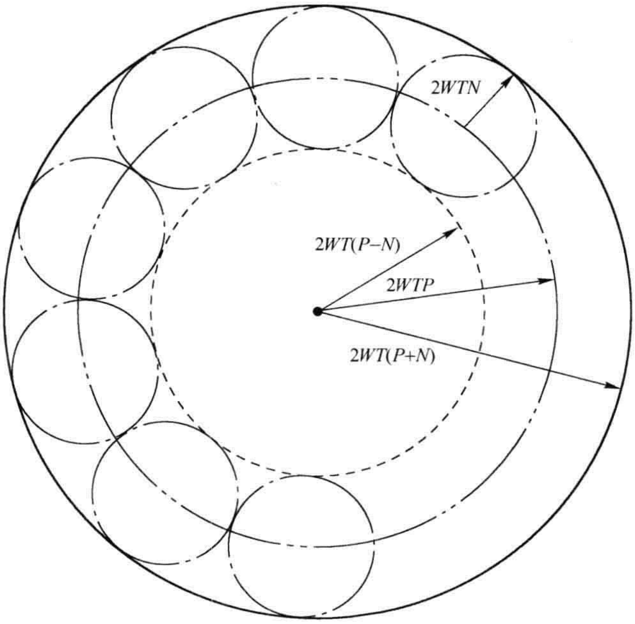


图 11-1 大球环里不相交的球个数决定信道容量

根据广义球体容积计算公式,我们知道维数为 n,半径为 R 的广义球体容积为

$$\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^n$$

其中,分母 $\Gamma(x)$ 为 Gamma 函数。其实我们只需要知道广义球体维数 n 相同时,容积与 R^n 成正比就可以了,管它是什么函数。那么,我们可以得到球的个数(取对数后)为

$$\log_2\left\{\frac{(\sqrt{P+\sigma^2})^{2WT}}{(\sqrt{\sigma^2})^{2WT}}-\frac{(\sqrt{P-\sigma^2})^{2WT}}{(\sqrt{\sigma^2})^{2WT}}\right\}=\log_2\left\{\left(\sqrt{\frac{P+\sigma^2}{\sigma^2}}\right)^{2WT}\left(1-\left(\sqrt{\frac{P-\sigma^2}{P+\sigma^2}}\right)^{2WT}\right)\right\}$$

因为 $\frac{P-\sigma^2}{P+\sigma^2}<1$,那么当 $T\to\infty$ 时

$$\left(\frac{P-\sigma^2}{P+\sigma^2}\right)^{2WT}\to 0\Rightarrow 1-\left(\frac{P-\sigma^2}{P+\sigma^2}\right)^{2WT}\to 1$$

则当 $T\to\infty$ 时,球的个数(取对数后)为

$$WT\log_2\frac{P+\sigma^2}{\sigma^2}$$

也就是说可以在时间 T 内无误传输这么多比特,即单位时间内信道容量(单位:bit/s)为

$$W\log_2\frac{P+\sigma^2}{\sigma^2}$$

三言两语

假设有信息,即一些(事件)状态要传输,那么只要将每个状态对应一个如上不相交的点对应的信号发送,经过信道传输后,接收端能完全无误地识别出发射端发送的是哪个信号,从而可以对应知道该信号携带(承载)的信息。

根据上面讨论,就可总结得到大名鼎鼎的香农容量公式。

定理 11-2(香农容量公式)　在 AWGN 信道下,若带宽为 W,噪声功率为 σ^2,信号功率为 S,则该 AWGN 信道下单位时间(秒,s)最多能无误传输的信息量,即 AWGN 下信道容量(单位:bit/s)为

$$C = W\log_2\left(1 + \frac{S}{\sigma^2}\right) \tag{11-6}$$

注意这里的单位时间为每秒,和式(11-1)的单位时间每个符号(持续)时间略为不一样,它们之间的联系我们稍后再讲。

11.1.4　几何模型化很有意思的应用

11.1.3 节关于香农容量公式的推导里,给定 AWGN 信道和提供的信号功率,从几何模型来看,只要合适地选择一个信号集合,以这些信号点为中心,噪声功率为半径的小球两两不相交,那么则能实现无误传输。反之,如果信号集合选得不合适,则使得有些球之间出现相交的情况,一定可能有错误的传输。那么所有小球出现相交情况的多少以及每次出现的相交严重程度,决定了发生错误概率的大小,相交情况越多越严重,错误概率就越高,反之错误概率越小。

根据这些定性的思考方法,我们可以做一些应用如下。

1. 功率相同,噪声不同

现在假设有两个 AWGN 信道,信号功率都配置为 P,但噪声功率分别为 σ_1^2,σ_2^2,其中 $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$。

显然,一个信号集合 S 中的信号在 σ_1^2 信道上能无误传输,那么在信道 σ_2^2 上也一定能无误传输。根据上面香农容量推导知,以 S 中信号为中心,σ_1^2 为半径的大球之间都不相交,显然以 σ_2^2 为半径的小球也不相交。如图 11-2 所示,其中 $N_1 = \sigma_1^2, N_2 = \sigma_2^2$。但反之不成立,即一个信号集合 S 中的

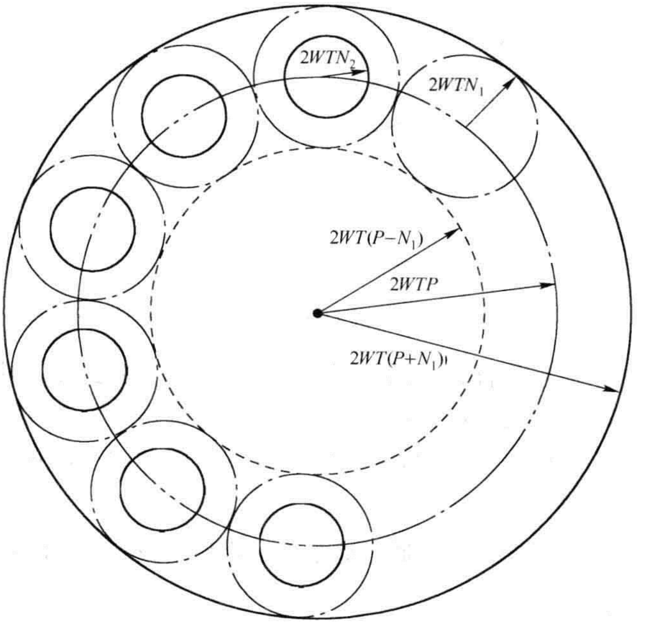


图 11-2　噪声大时能无误传输保证噪声小时一定能无误传输

信号在信道 σ_2^2 上对应的球不相交,但对于信道 σ_1^2 来说,这些球可能出现相交的情况。

根据这个逻辑更进一步,更现实的问题,同一编码调制方式出来的信号,以这些信号为中心对应的小球在 σ_1^2 信道上的相交程度必然大于在 σ_2^2 信道上的相交程度,从而在信道 σ_1^2 上的误码率必大于 σ_2^2 信道上的误码率。

2. 功率不同,噪声相同

现在假设同一个 AWGN 信道,噪声功率为 σ^2,但信号功率分别为 P_1,P_2,其中 $P_1 \geqslant P_2$。

显然,一个功率为 P_2 的信号集合 S 中的信号在该 AWGN 信道上能无误传输,那么 S 中每个信号乘以一个功率缩放因子 $\sqrt{P_1/P_2}$ 后得到的信号集合 S',也能在该 AWGN 信道上无误传输。原因很简单,根据上面香农容量推导知,球的大小没变,相对位置没变,只是球心移了位置!如图 11-3 所示,其中 $N=\sigma^2$,里面一圈小球往外挪后,仍然不相交,并且相互之间距离可以更大。但,反之不成立,即不相交的大圈往里挪不一定仍然不相交。

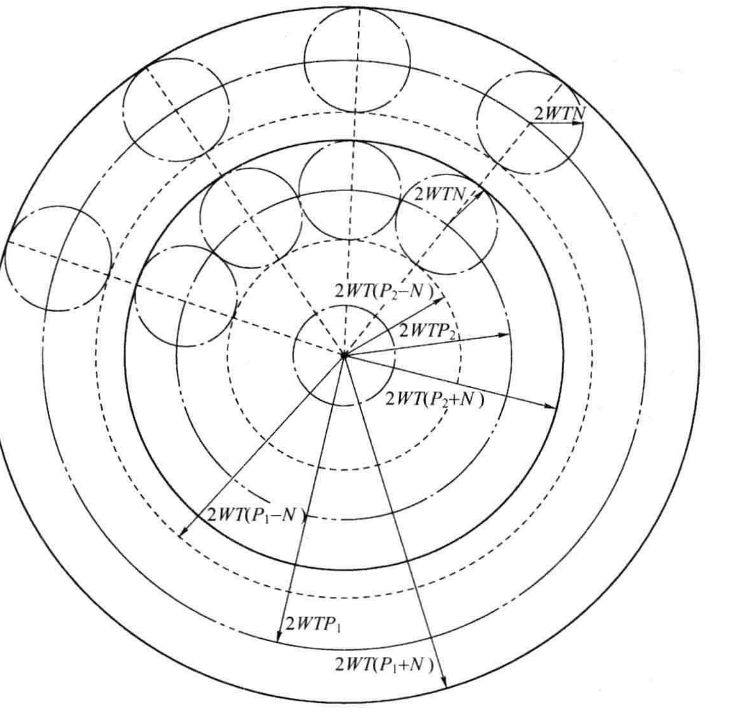


图 11-3 功率小时能无误传输保证平移后仍然能无误传输

另一方面来说,如果信号集合 S 中的信号对应的球相交,那么加大功率后的信号集合 S' 中的信号对应的球相交的程度会减轻,甚至达到不相交。根据这个逻辑更进一步,更现实的问题,同一编码调制方式出来的信号,以较大功率发送这些信号(S')的误码率会比用较小功率发送这些信号 S 的误码率低。

除了这两个应用外,更多的问题也可以通过这个集合模型来找到直观的解释,请读者朋友自己去思考。

11.2　另一个角度得到 AWGN 信道容量

11.1 节讨论的是从模拟信号角度推导香农容量公式,本节我们尝试从离散情况来重新得到香农容量公式。

11.2.1　有失真系统无失真通信的延续

现在,我们要应用有失真系统的无失真通信的一些结论。考虑这么一个具体的问题:X 序列中的元素集合为实数域$\mathbb{R}$,概率密度函数为$f(x)$,方差为 S,在 AWGN 信道下,信道容量是多少呢?

假设 AWGN 噪声 w 均值为 0,功率为 σ^2,即 $w \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$。任何信号 x,$x \in \mathbb{R}$ 经过信道后,接收端收到 $y = x + w$。要用式(11-1)计算信道容量,首先我们要看转移概率是多少。

假设发送端发送的是 x,经过信道得到 y 的概率 $P(y|x)$是多少? 首先需要明确一个事实,噪声 w 是连续的,因此 y 也是连续的,可以取到任何实数。再因为发送 x,并且 x 和 w 独立,从而要得到 y,只能是高斯噪声 w 的取值为 $y - x$。那么 y 出现的概率就是 $w = y - x$ 出现的概率,即

$$P(y|x) = P(w = y - x) \tag{11-7}$$

因此,对于某个固定的 x 来说,接收到 y 的分布 Y_x 是均值为 x 的高斯分布 $Y_x \sim \mathcal{N}(x,\sigma^2)$。但是,请注意反过来一般不一定成立。即给定 y 时,x 的分布 $P(x|y)$并不一定是高斯分布。比如,x 只取几个离散值。显然,对于这几个离散值之外的某个 x_0,它出现的概率为 0,并不是

$$P(x_0|y) = P(w = y - x_0) \neq 0 \tag{11-8}$$

从实质来说,这是因为 y 和 w 并不是相互独立的。对于某个固定的 y 来说,w 能不能取某个数 w_0,并不是独立的,取决于 x 能不能取到 $y - w_0$。

接着,因为有了条件概率 $P(y|x)$,从而可以计算条件熵,

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= E_x[H(Y|x)] = E_x[H(Y_x)] \\ &= \int f(x)\log_2\sqrt{2\pi e\sigma^2}\,dx \\ &= \log\sqrt{2\pi e\sigma^2} \end{aligned} \tag{11-9}$$

也就是说,不论 X 服从什么分布,$H(Y|X)$总是一定的。那么,要使 $H(Y) - H(Y|X)$最大,只需要 $H(Y)$最大就好了。

可以看到,这里将 Y 的取值范围限制在$\mathbb{R}$ 内,方差为

$$\mathrm{Var}\{X\} + \mathrm{Var}\{w\} = S + \sigma^2 \tag{11-10}$$

而我们刚开始讲熵的概念时,已经知道当 Y 在这些限制下服从高斯分布时,其熵$H(Y)$最大,最大为

$$\log\sqrt{2\pi e(S + \sigma^2)}$$

因此,我们得到该 AWGN(每符号时间内)信道容量(单位:bit/symb)为

$$C = \log_2\sqrt{2\pi e(S + \sigma^2)} - \log_2\sqrt{2\pi e\sigma^2} = \log_2\sqrt{1 + \frac{S}{\sigma^2}} \tag{11-11}$$

由我们前面讲的高斯变量有限分解定理 6-3 可知,当达到信道容量时,X 和 ω 独立,ω 和 Y 都为高斯分布,那么 X 一定也为高斯分布。

总结上面的讨论,现在假设发射端是功率受限的,具体 X 的功率限制为 P,当 X 也满足高

斯分布时,在某给定 AWGN 下达到其每符号时间内信道容量,该信道容量(单位:bit/symb)为

$$C=\frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P}{\sigma^2}\right) \tag{11-12}$$

三言两语

再仔细分析一下,这里离散情况只说明了:如果能够把 X 序列传输到接收端,接收端收到的序列仅为发送端发送的 X 序列中每个元素叠加了一个独立的高斯噪声,则一个 X 序列中元素(每符号)平均携带的最大信息量为 C 比特。当然,如果接收到 T 个这样的元素,携带的信息总量大概为 TC 比特。

上面仅是离散情况的推导,是一个逻辑上的结果,没有同模拟信号和现实时间概念[○]联系起来。接下来,我们想办法转化为模拟信号的情况,看单位时间(每秒)内能无误传输的最大信息量是多少。

11.2.2 关键是如何完成最后一步的华丽转身

假设 AWGN 信道带宽为 W,AWGN 功率为 σ^2。我们可以从下面几方面思考如何转化:

1)首先要在离散序列和模拟信号之间建立联系,这就是第二部分所讲数字信号系统的内容了,即把数字信号序列表示成模拟信号。

2)我们需要知道单位时间内最多能传多少个 X 序列的元素,每秒可以分割为多少个符号时间;传得越多,显然信息量越大。

3)注意式(11-12)是每个 X 序列元素仅经历 AWGN 信道的结果,即除了噪声外,不能有其他任何干扰,这里暂时要求不能有码间干扰。那么根据我们讲过的采样点无失真,最多也只能传输 $2W$ 个符号,这样才保证在接收端来看,每个符号只经历 AWGN 信道,从而每个符号平均携带的信息量才是式(11-12)所示的结果。

从上面几点考虑,满足条件的,我们知道单位时间内最多能无码间干扰地传输 X 序列的 $2W$ 个元素,故连续信号容量为

$$2W\cdot\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{S}{\sigma^2}\right)=W\log\left(1+\frac{S}{\sigma^2}\right) \tag{11-13}$$

请注意,在香农容量公式定理叙述中,我们说的是信号功率为 S。但前面的讨论都是说每个符号的方差为 S,两种说法是等价的:把发射端所有信号看成一个随机过程,则每个实现的功率先表示成采样点的平方和。则统计平均就是每个采样点对应的随机变量的方差的平均。从而,在信号功率和方差之间建立了联系。

11.3 非 AWGN 信道的信道容量

11.3.1 非高斯但仍为加性白噪声信道

注意 11.2 节中 AWGN 信道推导过程中,单从计算球体个数来说,几乎没有用到噪声分布

○ 这里仅讨论了符号时间,是一个逻辑概念,可长可短。

是高斯噪声这一点,仅仅用到因为是白噪声从而噪声点独立同分布这一性质。也就是说,对于任意的加性白噪声,信道容量的推导和 AWGN 完全一样。唯一不一样的是以信号对应点为中心,噪声功率为半径的球上各点出现的概率不像 AWGN 一样是均等的。因为并不是任何分布都像高斯分布那样具有对称性。例如,对于 AWGN,点$(x_1,\cdots,x_N)$出现的概率为

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^N}e^{-\frac{x_1^2+\cdots+x_N^2}{\sigma^2}}dx_1\cdots dx_N$$

可以看到,只要$\sum x_i^2$相等,所有这样的点都是等概出现的。由这个差别可以分两种情况来讨论一般加性白噪声信道的信道容量。

第一种情况,如果以信号对应点为中心,噪声功率为半径的球上各点出现的概率都为正数,即球面上每个点一定有可能出现,那么这种加性白噪声信道的信道容量和 AWGN 数值完全一样,都由不相交球的个数确定。

第二种情况,如果以信号对应点为中心,噪声功率为半径的球面有一部分点出现的概率为 0,即有一部分点根本不可能出现,首先对应于不相交球的那些信号点肯定是能相互区分开的。但是,注意我们实质是要求不同信号点经过噪声信道后不相交,并不等价于要求以信号对应点为中心,噪声功率为半径的球面两两不相交,后者要求太过了。那就是说,即使先把对应于不相交球的那些信号点摆在那儿,我们还可能找到信号点,把这些信号点加入后,经过信道仍然满足所有点不相交。也就是说,对于第二种情况的加性白噪声信道的信道容量是大于等于 AWGN 信道的信道容量的。

综上两种情况可知,只要是加性白噪声信道,信道容量一定是大于等于相同信号功率和噪声功率(其实信噪比一定即可)的 AWGN 的信道容量。这也是为什么我们一般说 AWGN 是最坏的噪声信道,也即最不确定的信道。

三言两语

只要是加性白噪声信道,信道容量一定是大于等于相同信号功率和噪声功率(其实信噪比一定即可)的 AWGN 的信道容量。这也是为什么通常说 AWGN 是最坏的噪声信道,即最不确定的信道。

11.3.2　别老是白噪声啊,给点颜色看看

前面讲了加性高斯白噪声和一般白噪声的信道容量,现在我们丰富一下,引入一些色彩,即讨论噪声功率谱非常数的一般加性噪声信道的信道容量。

对于一定带宽的有色噪声,虽然整个带宽上功率谱不是常数,但可以把噪声分解成若干窄带的噪声,每个窄带噪声的功率谱近似平坦为常数,这样我们可以把这些窄带噪声分别独立地按 AWGN 处理,从而可以应用 AWGN 的结果。

假设带宽仍然为 W,噪声功率谱为 $P_N(f)$,信号功率谱为 $P_x(f)$,则对窄带宽 $\omega<f<\omega+\Delta\omega$ 上应用香农公式得,该窄带上信道容量为

$$\Delta\omega\ \log_2\left(1+\frac{P_x(f_0)\Delta\omega}{P_N(f_0)\Delta\omega}\right),\qquad \omega<f_0<\omega+\Delta\omega$$

对所有窄带求和,取极限得总容量为

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{f_0}\Delta\omega\log_2\left(1+\frac{P_x(f_0)}{P_N(f_0)}\right)=\int\log_2\left(1+\frac{P(f)}{N(f)}\right)\mathrm{d}f \tag{11-14}$$

注意,这里各个窄带需要分别独立编码,使各自分别达到信道容量,最后和容量才能达到最大。

现在假设信号总功率一定,即

$$\int P_x(f)\,\mathrm{d}f=P$$

怎样的 $P_x(f)$,或者说怎样在整个频带上分配功率,使得总容量最大呢?显然,这是一个条件优化问题,应用拉格朗日乘子法(Lagrange Multiplier)可以得到最优解,该最优解通常称为注水定理(Waterfilling Theorem)。本书暂时不具体讲拉格朗日乘子法,注水定理最后功率分配策略的趋势是,噪声 $P_N(f)$ 小的频带,信号功率 $P_x(f)$ 多分配一些;反之,噪声 $P_N(f)$ 比较大的区域,$P_x(f)$ 少分配一些,甚至不分配,如图 11-4 所示。看起来也比较直观,同样多的功率分配给噪声高的地方显然性价比低,不如给噪声低的地方多分一点。

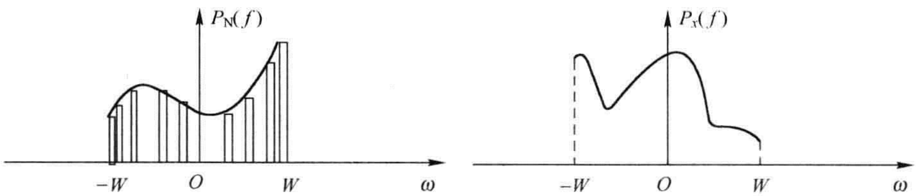


图 11-4 注水定理噪声功率分布与信号功率分配关系

特别地,对于 AWGN 来说,$P_N(f)$ 处处相等,按照注水定理,最优的功率分配方法就是平均分配功率。也就是说,达到 AWGN 信道容量的信号的功率谱也是常数,差不多隐含了达到 AWGN 信道容量的信号也为高斯白噪,即随机码。

除了拉格朗日乘子法,我们再从另一个角度来看为什么最佳功率分配满足注水定理。首先,划分成平行信道后,总容量为

$$C(p_1,p_2,\cdots,p_i,\cdots)=\sum_i\log_2\left(1+\frac{p_i}{\delta_i}\right) \tag{11-15}$$

其中,p_i,δ_i 分别为第 i 个子信道的信号功率和噪声功率。式(11-15)对 p_i 求偏导,得

$$\frac{\partial C}{\partial p_i}(p_i+\delta_i)\ln 2$$

请回忆导数的意义,导数的大小表示自变量增加一点带来的函数值变化快慢。可以想象,最佳功率分配后,要使得所有 p_i 对应的导数相等。否则,把导数小的信道的功率转移到导数大的信道总是能使得总信道容量增大,因为相同功率能使导数大的信道容量增加更多。既然最后要求 $p_i+\delta_i$ 一样,那么显然 δ_i 越小,得到的信号功率 p_i 越多;反之,噪声功率(密度)δ_i 越大,得到的信号功率越少,甚至没有。

回忆我们讲过的 I/Q 调制。假设发射端采用 I/Q 调制来发送信号,在 I 路发送 $f_1(t)$,在 Q 路发送 $f_2(t)$,最后发射出去的信号为

$$s(t)=f_1(t)\cos(\omega_c t)-f_2(t)\sin(\omega_c t) \tag{11-16}$$

经过 AWGN 信道后，接收端收到信号

$$\tilde{s}(t) = s(t) + \omega(t) \tag{11-17}$$

接收端再把信号$\tilde{s}(t)$还原成基带信号，得到的 I/Q 两路信号分别为

$$\tilde{s}_{\mathrm{I}}(t) = f_1(t) + \omega_{\mathrm{I}}(t) \tag{11-18}$$

$$\tilde{s}_{\mathrm{Q}}(t) = f_2(t) + \omega_{\mathrm{Q}}(t) \tag{11-19}$$

其中，一般情况下，$\omega_{\mathrm{I}}(t)$和 $\omega_{\mathrm{Q}}(t)$是功率相等但独立的高斯白噪声。如果把发射端信号写成复基带信号 $f(t)$，即

$$f(t) = f_1(t) + \mathrm{j}f_2(t) \tag{11-20}$$

把接收端信号写成复基带信号$\tilde{f}(t)$，则

$$\tilde{f}(t) = [f_1(t) + \omega_{\mathrm{I}}(t)] + \mathrm{j}[f_2(t) + \omega_{\mathrm{Q}}(t)] = f(t) + [\omega_{\mathrm{I}}(t) + \mathrm{j}\omega_{\mathrm{Q}}(t)] \tag{11-21}$$

我们可以把 $\omega_{\mathrm{I}}(t) + \mathrm{j}\omega_{\mathrm{Q}}(t)$称为复高斯白噪声，这样的信道称为复高斯白噪信道。

三言两语

还记得我们讲 I/Q 调制时，留了一个问题：当 I/Q 两路都可用时，两路都用比只用一路更高效吗？注水定理已经给出了答案。假设发射端不管是否 I/Q 两路都用，提供的总功率是一定的。而信道是复高斯白噪信道，现在是否 I/Q 都用，等价于是否两路都分配功率的问题。我们知道 I/Q 两路是可独立区分的，那么复高斯白噪信道的信道容量等于 I/Q 两路的信道容量之和。注意到 I/Q 两路的噪声功率相等，那么根据注水定理，想提高信道容量最好两路平分信号功率，而不是把功率集中在一路上。信道容量提升了，当然效率高了。

由以上讨论，假设复高斯白噪信道 I/Q 两路的功率分别都为 $\sigma^2/2$，称该信道为功率为 σ^2 的复高斯白噪信道。那么，我们可以得到复高斯白噪信道下的信道容量。

定理 11-3　对于功率为 σ^2 的复高斯白噪信道，假设信号带宽为 W，总功率为 P，那么该复高斯白噪信道的信道容量 C（单位：bit/s）为

$$C = 2W\log_2\left(1 + \frac{P}{\sigma^2}\right) \tag{11-22}$$

如果换成信道容量（单位：bit/symb），则有

$$C = \log_2\left(1 + \frac{P}{\sigma^2}\right) \tag{11-23}$$

证明　因为最佳功率分配（即平分）时，I/Q 两路的信道容量（单位：bits/s）分别是

$$W\log_2\left(1 + \frac{P/2}{\sigma^2/2}\right)$$

相加即得复高斯白噪信道下总信道容量（单位：bit/s）。信道容量（单位：bit/symb）类似，得证。

11.4　从香农信道容量公式出发

香农容量公式是通信基础理论中最简洁而深刻的公式之一，它非常紧凑地给出了通信基本要素（带宽、信号功率、噪声功率）在 AWGN 信道下如何一起决定了通信的极限能力。本节我们将更深入地剖析从香农容量公式可以得到哪些结论。

11.4.1 带宽与功率的此消彼长

记信号与噪声功率比 SNR = P/σ^2。为了达到相同信道容量，信噪比 SNR 和带宽 W 可以互换（注意暂时没说信号功率和带宽可以互换），即降低 SNR 但增加带宽 W 或反之。注意在 AWGN 下，香农容量公式可以写成

$$C = W\log_2\left(1+\frac{P}{n_0 W}\right) \tag{11-24}$$

其中，n_0 为白噪声功率谱密度，是人为不可控的，它是多少就是多少，我们拿它毫无办法。我们能改变的只有系统带宽 W 和信号功率 P。另一方面，我们注意到，随着 W 增大，即使信号功率 P 保持不变，信噪比$\frac{P}{n_0 W}$天然就在降低，即信噪比 SNR 和带宽 W 很自然地就在“互换”。注意，我们想要的其实是带宽 W 和信号功率 P 之间的互换，即达到相同信道容量，如果增加带宽 W，最好能减少（节省）信号功率 P 或反之。若达到相同信道容量，带宽 W 增加了，而信号功率 P 却不能降低，那为何要增加带宽？也就是说，在增加带宽时，即使信噪比天然已经在降低了，我们还可以进一步降低信号功率 P 来进一步降低信噪比。

进一步应该有下面的关系成立，这个“互换”才有意义：

$$(aW)\log_2\left(1+\frac{P}{n_0(aW)}\right) > W\log_2\left(1+\frac{P}{n_0 W}\right), \quad a>1 \tag{11-25}$$

$$(aW)\log_2\left(1+\frac{P}{n_0(aW)}\right) < W\log_2\left(1+\frac{P}{n_0 W}\right), \quad a<1 \tag{11-26}$$

而事实上，这个关系成立吗？答案是肯定的。进一步地，可以得出以下两个结论：

1）当 SNR 趋于无穷大时，带宽 W 可以保持不变，比如只增加发射功率 P，从而信道容量趋于无穷大。

2）当 W 趋于无穷大时，即使信号功率 P 保持不变，信道容量却趋于某有限常数。原因是前面已经说过的，带宽变化时，即使信号功率 P 保持不变，SNR 不可能保持不变，因为一般噪声的功率谱是分布在无穷大带宽上的。那么，当带宽 W 趋于无穷大时，噪声功率也趋于无穷大，从而 SNR 趋于无穷小，所以信道容量不会趋于无穷大。具体地，假设噪声是白噪声，功率谱密度为 n_0，则

$$\lim_{W\to\infty} W\log_2\left(1+\frac{P}{n_0 W}\right) = W\frac{P}{n_0 W\ln 2} = \frac{P}{n_0\ln 2} = 1.44\frac{P}{n_0} \tag{11-27}$$

上面的极限推导用到等价无穷小量关系

$$\lim_{x\to 0}\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} \tag{11-28}$$

11.4.2 矛盾——频谱效率与功率效率

假设 AWGN 信道带宽为 W，噪声功率谱密度为 n_0。若现在想以比特率 R（单位：bit/s）来无误传输，那每比特平均至少需要多少功率呢？记每比特需要功率为 E_b。首先，信号花费的总功率为 $E_b R$，AWGN 噪声总功率为 $n_0 W$，根据香农容量公式可知，此时能无误传输的最高比特率为

$$C = W\log\left(1 + \frac{E_b R}{n_0 W}\right) \tag{11-29}$$

显然,必须有 $R \leqslant C$,则

$$\frac{R}{W} \leqslant \log\left(1 + \frac{E_b}{n_0}\frac{R}{W}\right) \tag{11-30}$$

令 $r = R/W$ 为频谱效率,即单位带宽内的比特速率,由上式继续可得

$$\frac{E_b}{n_0} \geqslant \frac{2^r - 1}{r} = \frac{\sum_{n\geqslant 1}\frac{(r\ln 2)^n}{n!}}{r} \tag{11-31}$$

其推导中用到

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$a^x = (\mathrm{e}^{\ln a})^x = \mathrm{e}^{x\ln a} = 1 + x\ln a + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + \cdots$$

从而可知,当 $r\to 0$ 时,即频谱效率很低时,上面式(11-31)中展开带 r 的项都趋近于 0,有

$$\frac{E_b}{n_0} \geqslant \ln 2 = -1.59\ \mathrm{dB} \tag{11-32}$$

也就是说,当维持在一个频谱效率很低的区域里传输时,若每比特平均功率 E_b 达到一个常数 $n_0 \times \ln 2$,理论上就可以无误传输了。在这个频谱效率很低的区域内,比特率 R 增减时(增减后保证频谱效率还是不超出该区域),信号总功率 $RE_b = R \times n_0 \times \ln 2$ 也只需要相应比例地线性增减即可无误传输。反过来看,要想增大比特率 R,可以保持 W 不变,增加功率就好,并且效果也还不错(线性增长)。但是请考虑,在这个低频谱效率区域内,增大带宽能有什么用?没有用!因为在低频谱效率区域内,每个比特能无误传输需要的功率和带宽无关,就是常数 $n_0\ln 2$。所以,如果此时信号功率只有 P,那么最多就只能支持$\frac{P}{n_0\ln 2}$比特的无误传输,哪怕信号带宽增加到无穷大。这个结论我们在 11.4.1 节其实已经看到了,即当带宽趋于无穷大时,容量趋于 $1.44P/n_0$。可以看到,在低频谱效率区域,能无误传输的比特率不取决于带宽,而是取决于信号功率,即受限于能提供的信号功率,所以低频谱效率区域也被称为功率受限区域。

当频谱效率较高时,比如 $r>1$,上面式(11-31)中展开带 r 的项,随着 r 增长,增长都超快(级数增长)。r 增长,即 R 增长,且此时 E_b 也超快增长,需要的总功率 E_bR 也就需要超快增长才能保证以比特率 R 无误传输;R 要想增长一点,要以信号功率 E_bR 增长很多为代价。可以看到,对于已经在高谱效率区域运行时,想通过信号功率来换取比特率的进一步增长太吃亏了,怎么办呢?那别让它在高频谱效率区域内运行,从而降低频谱效率。有一个办法就是增加带宽。只要频谱效率降一点,每比特无误传输需要的平均功率就(指数)下降,对于给定量的信号功率来说,就可以支持更高比特率的无误传输。换句话说,当在高频谱效率区域时,有多少信号功率都白搭,关键看有多少带宽,即受限于带宽,因此高谱效率区域也被称为带宽受限区域。

总之,当谱效率 r 维持较小时,提高一点功率,理论上能无误传输的比特率 R 可以同比例线性提高;当谱效率 r 维持较高时,提高很多功率,才能换来 R 提高一点。

三言两语

这里就有个矛盾,若想功率有效利用,就得维持低谱效率;若想维持高谱效率,就得牺牲功率有效利用率。这个矛盾可以由如下的思想解决:如果有机会在占用带宽不变的情况下,能构造出多个平行信道,每个信道带宽一样,然后把总功率分配到多个平行信道上,这样使得每个信道维持在低谱效率,但功率能得到有效利用,最后多个平行信道加起来的谱效率还是挺高的。多天线技术 MIMO 空分复用的一部分效果就是利用该思想,以后我们再具体分析讨论。

11.4.3 香农编码定理及冷落的另一半

定理 11-4(香农编码定理) 假设某信道的信道容量为 C,$R<C$。那么,一定存在一种编码解码方法,使得以比特速率 R(单位:bit/s)在该信道传输时,错误概率任意小。

上面是大家最熟悉的,经常看到的香农编码定理的版本,其实还有另一半大家很少看到或者说关注度没有前一半多,但同样重要。这另一半说的是:若 $R>C$,则随着 R 增大,任何编码方法的错误概率都无限趋近于 1。

为什么说这另一半也很重要呢?我们这样想:如果随着 R 增大,还能找到一种编码方法,其错误概率不超过某个小于 1 的数 $E<1$。那么,给定任何任意小的数 ϵ,总存在一个整数 K,使得

$$E^K<\epsilon$$

那么,我们按照该编码方法得到的信号,重复发送 K 次,只要其中至少一次接收正确,就可以说是无误通信了,否则认为错误。显然,此时错误概率为一次都不正确的概率为 $E^K<\epsilon$。因为我们是重复发送,实际有效的比特速率变成了 R/K,但没关系,因为 R 可以很大,从而 R/K 也可以仍然很大,甚至大于 C。

如果是这样的话,那么一个信道容量的概念 C 就没意义了,因为实际上任何比特速率都能达到。但如果,随着 R 增大,任何编码方法的错误概率趋近于 1,那么不可能重复有限次就把错误概率降到任意小,从而也就不可能通过上面的重复思想来构造出矛盾。

11.5 达到信道容量现实工艺问题

到目前为止,我们讲了在有错误发生的信道下能否实现无误通信,以及无误通信的能力——信道容量,还大概讲了在这样的信道下,如何把消息表示成信号然后达到无误传输的效果。

然而,我们在证明能无误传输时,也只是证明了能设计信号达到无误传输,但并没有明确地把消息到信号的表示弄出来。即使我们把消息到信号的表示明确弄出来,比如采用不相交的球心对应的信号,这又回到理想传输时的问题,要应用这样一种表示方法,发射端和接收端需要存储一张一一映射表,这在实现中又是一个问题。所以,虽然我们前面解决了理论问题,现在又面临解决“工艺”问题,怎么简单地实现消息到信号的映射呢?思想和原来一样,就是消息自己主动参与激发它对应的信号的生成。这就是我们下面将要讨论的内容——信道编码。

第12章 信道编码

我们在证明能无误传输时,也只是证明了能设计信号达到无误传输,但并没有给出消息到信号的准确表示。即使我们把这一表示推导出来,这又会回到理想传输时的问题,要应用这样一种表示方法,发射端和接收端需要存储一张一一映射表,这在实现中又是一个问题。所以,虽然我们前面解决了理论问题,现在又需要解决“工艺”问题,怎么简单地实现消息到信号的映射呢?思想和原来一样,就是消息自己主动参与激发它的信号的生成。这就是我们下面将要讨论的内容。

要消息主动生成其信号,首先得把消息表示成统一的形式,一般来说,在数字通信系统里,任何消息都可以表示成0,1序列,或者叫比特序列。至于它们具体表示的意思,应由具体的应用软件来解释(即信源编解码)。现在假设消息已经被表示成了长度为 $M \times N$ 的0,1序列 $\boldsymbol{x}$,即

$$\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_{M \times N}]$$

请回忆,我们在推导香农信道容量公式时,不论是直接从模拟信号出发还是从离散情况(有失真系统的无失真通信)出发,消息对应的信号都转化成了数字序列,即数字信号;并且我们知道达到 AWGN 信道容量时,该数字序列的每个符号取值范围为所有实数$\mathcal{R}$(复信道下为所有复数),并且满足高斯分布。而把消息表示成数字信号,实际应用中每个信号符号的取值不可能用所有$\mathcal{R}$上的数来表示,而是会用有限的几个数来表示,而这些有限的几个数最简单的就是以所谓的调制符号形式出现,比如 QPSK 等。假设每个调制符号直接由比特序列中的连续 M 比特对应出来,称对应调制方式为 M 阶调制,共有 2^M 个不同的调制符号。按照这种消息(这里为比特序列)到数字信号生成方式,消息 x 对应的数字信号为

$$\boldsymbol{X} = [X_1, \cdots, X_N]$$

其中,X_i 为比特串 $x_{M(i-1)+1}, \cdots, x_{Mi}$对应的调制符号。

接下来,如果每一个长度为 $M \times N$ 的比特序列 x 都是可能的消息,那么每一个长度为 N 的数字信号序列 X 就都是可能的信号。那么因为信道(比如 AWGN)是有错误的信道,从而一个数字信号会错成另一个数字信号,即消息被接收成另一个消息的概率会很大。所以,和介绍信道容量时的思想一样,我们不能让所有可能的调制符号序列都成为信号,而只用其中一部分来携带消息。在这里,只要把 $M \times N$ 长的比特序列生成比 N 还长的调制符号序列就可以了,那怎么弄呢?注意不要借助映射表!一个办法是先把比特序列变成比 $M \times N$ 更长的比特序列,然后再生成调制符号序列。可以想象,这样得到的调制符号序列比 N 长,从而一定有没被用到的,这样就达到了我们的目的。注意在这个想法下,把消息变成数字信号序列最主要过程是把比特序列先变长的过程,其他调制等操作是相对比较机械的。这个把比特序列先变长的过程可以理解为信道编码,下面我们就开始介绍具体相关内容。

12.1 基础讨论

12.1.1 两届奥运会都错失射击冠军的兄弟

先给大家分享一个反映编码原理的例子:射飞镖。

编码前:假设现在靶上的红心密密麻麻地一个紧挨一个,你想发的信号就是想射中的红心,接收到的信号就是实际射中的红心,从实际射中的红心怎么判断你想射的是哪一个红心呢? 没法判断,因为靶上都是红心。

编码后:红心之间有一定距离,因为你有瞄准误差,手也抖动,所以你不见得总是命中红心。但是,你对自己的水平还是有信心的,不会像两次奥运会最后一枪都射到别人靶上的那位兄弟一样倒霉,两次都与奥运冠军失之交臂。所以,一般认为实际射中的位置离哪个红心最近,那个最近的红心就是你想射中的。

总之,相对于编码前,编码后至少能有一些准则以供判断,虽然不一定总是准确,但总比编码前的不知所措要好,这就是信道编码的作用。

所谓编码,理论上都可以归结成一个映射规则 f,即把 k 个比特的序列映射到 n 个比特的序列,即

$$[x_0,\cdots,x_{k-1}] \xrightarrow{f} [C_0,\cdots,C_{n-1}] \tag{12-1}$$

其中,编码前比特称为原始信息比特或信源比特,编码后得到的比特称为码字或码字比特。一般 $n \geqslant k$,并称 k/n 为该编码 f 的码率。若 $n < k$,则有多个原始信息比特以同一串比特作为码字,即使传输过程中不发生任何错误,显然接收端收到这样的码字,也确定不了发射端发的是这“多个”中的哪一个,那这个编码就没什么意义了。

上面射飞镖的思想简单来说,一个接收到的比特序列,我们能判断它是某个码字因为某些位置发生错误而来,那么这个接收到的比特序列本身不能是某个码字。即,假设接收到的比特序列长度为 n,2^n 个所有可能比特序列不能都用来作为信源比特在编码规则 f 下的码字。这样当我们把接收到的比特序列判断成某个码字后,再根据编码规则 f 就能得到原始信息比特。

定义 12-1(码重) 一个码字 $[C_0,\cdots,C_{n-1}]$ 中,非 0 元素个数,即 1 的个数,称为该码字的汉明重量,简称为码重。

定义 12-2(码距) 两个等长的码字 $C=[C_0,\cdots,C_{n-1}]$ 和 $C'=[C'_0,\cdots,C'_{n-1}]$ 中,取值(0 或 1)不同的位置个数,称为这两个码字的汉明距离,简称为码距,记为 $d(C,C')$。

在编码方式 f 下得到的所有码字两两之间距离的最小值称为编码 f 的最小码距。

12.1.2 编码的检错纠错能力

射飞镖的例子中,射偏红心仍然有可能判断出实际打算射哪个红心的实质是可以检测到错误并纠正,这也就是编码的目的,编码有检错纠错的功能。显然,在射击当中,假设运动员的失手概率是一定的,比较靠谱的,那么相邻红心之间的间隔距离越大,判断也能越准确,即检错纠错能力越强。两个红心之间的间隔距离,对于码字来说,就是码字之间的距离。也就是说,

直观想象知道，编码的检错纠错能力与编码的最小码距有关。需要提醒的是，有些编码只能检错而不能纠错，而能纠错的编码当然需要先能知道有错误，即一定能检错。下面我们就更具体地谈谈编码的检错纠错能力与最小码距之间的关系。

性质 12-1 一种编码方式若能检测 e 个之内的错位，那么各码字之间的最小汉明距离至少为 $e+1$。

比如，假设用集合{1,7,13,19,…}里的数字想象成码字，那么它能检测的错误最大为 $e=5$；因为若发生的错误为6，比如，发送的是7，而接收到13，接收端是没有任何依据知道这里有错误发生的。也就是说，如果发生的错误在 e 个之内，接收端一定能感觉得到有错误；但并不表示接收端感觉到有错误，那么发生的错误一定在 e 个之内。比如，发送的是7，接收端收到15，接收端也能知道有错误发生，但很明显这个错误为8，而不是在 $e=5$ 之内。

性质 12-2 一种编码方式若能纠正 t 个之内的错位，那么各码字之间的最小汉明距离至少为 $2t+1$。

很显然，能纠错必然首先要能检错，即各有用码组之间的最小汉明距离至少为 $t+1$。也就是说，当接收端感觉到有错误时，它总是假设错误是在 t 个之内的纠错方法去纠，如果发生的错误确实在 t 个之内，那么这种纠错方法正确地纠正了错误；反之，若实际发生的错误在 t 个之外，显然会错误地纠正错误。比如，集合{1,7,13,19,…}中的是码字，那么它能纠正的错误最大为 $t=2$；因为若发生的错误大于2，比如，发送的是7，而接收到11，错误为4，接收端是没有任何依据区别这里发生的错误是从7变成11还是从13变成了11。如果接收端仍然假设错误在2以内来纠错，即把11纠成13，则会错误地纠正错误。

性质 12-3 一种编码方式若能纠正 t 个之内错位，同时能检测 $e>t$ 位之内错误，那么各码字之间的最小汉明距离至少为 $e+t+1$。

这种情况不太好理解，经常有人会问“为什么最小汉明距离不是 $\max\{e+1,2t+1\}$ 呢”，满足这个条件不是既能检测到 e 个之内错误，又能纠正 t 个之内错误吗？原因在于如何理解“既能纠正 t 个错误，又能检测 $e>t$ 个错误”。正确的理解应该是，t 个之内错误一定能纠错，而大于 t 小于等于 e 之间的错误一定能检测到。即要求当错误在 $[t+1,e]$ 区间时，该错误一定不在任何码字周围距离 t 之内，否则被当纠错处理了。所以，当任何一个码组发生任何 e 个错误后，这个错误离剩下的其他码组的距离至少为 $t+1$，那么各码字之间的最小汉明距离至少为 $e+t+1$。

12.2 具体信道编码简介

12.1节只是抽象地讨论信道编码，即只把信道编码理解成原始信息比特到码字比特的映射过程。显然，这对于实际应用来说是远远不够的。要能具体到实际应用，我们需要研究各种具体的映射过程，即结合要编码的原始信息比特，怎么具体地对原始比特操作得到原始信息比特对应的码字比特。具体信道编码方式按照不同的角度有多种不同的类型划分，具体如下：

- 按照码字比特是否与原始信息比特满足线性方程组关系，可以区分为线性码和非线性码。

- 按照原始信息比特是否原封不动地出现在码字比特里,可以分为系统码和非系统码。
- 按照编码方式是否对原始信息比特长度有限制,可以分为分组码和卷积码等。

信道编码的讨论在整个通信相关技术里算是比较难的一部分,很难在短的篇幅里有非常深入详尽的讨论,这里我们也只是拿两种具体编码稍微详细地讲一下,好让大家有一些更直观的体验。

12.2.1 分组码及应用

分组码这里我们只介绍线性分组码,如字面意思,线性分组码表示这种码既是线性码,又是分组码。这类码通常可以由一个生成矩阵来表征。比如,把 k 个原始信息比特生成长度为 n 的码字比特的线性分组码对应一个 $n \times k$ 的矩阵 $\boldsymbol{G}$,即

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & \cdots & g_{0,k-2} & g_{0,k-1} \\ g_{10} & g_{11} & \cdots & g_{1,k-2} & g_{1,k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n-1,0} & g_{n-1,1} & \cdots & g_{n-1,k-2} & g_{n-1,k-1} \end{pmatrix} \tag{12-2}$$

假设原始信息比特为 $\boldsymbol{x} = [x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]^{\mathrm{T}}$,那么码字比特

$$\boldsymbol{C} = [C_0, C_1, \cdots, C_{n-1}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Gx} \tag{12-3}$$

其中

$$C_i = (\sum_{j=0}^{k-1} g_{ij}x_j) \bmod 2 \tag{12-4}$$

特别地,如果生成矩阵 $\boldsymbol{G}$ 形如

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ g_{k,0} & g_{k,1} & \cdots & g_{k,k-2} & g_{k,k-1} \\ g_{k+1,0} & g_{k+1,1} & \cdots & g_{k+1,k-2} & g_{k+1,k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n-1,0} & g_{n-1,1} & \cdots & g_{n-1,k-2} & g_{n-1,k-1} \end{pmatrix} \tag{12-5}$$

即前 k 行 k 列是单位矩阵 $\boldsymbol{I}_{k \times k}$,那么生成的编码则为系统码,因为码字比特 $\boldsymbol{C}$ 里,前 k 个比特分别就是原始信息比特 $\boldsymbol{x}$。当然,形式上其实并不要求式(12-5)里前 k 行一定连续出现,只要生成矩阵 $\boldsymbol{G}$ 里包含这 k 行就是系统码。不失一般性的讨论,我们都假设是连续的这种情况。

若线性分组码是系统码,那么其生成矩阵可以写成

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{k \times k} \\ \boldsymbol{G}'_{(n-k) \times k} \end{pmatrix} \tag{12-6}$$

对于任何给定的原始信息比特 $\boldsymbol{x}$,其对应码字 $\boldsymbol{C}$ 的前 k 个比特就是 $\boldsymbol{x}$,这前 k 个比特称为信息位。那么,对于不同原始信息比特,只需要确定剩下的 $n-k$ 个比特,这 $n-k$ 个比特称为校验位(或监督位)。基于这个分析,也可直接把 $\boldsymbol{G}'$称为生成矩阵,则校验位为

$$[C_k, \cdots, C_{n-1}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{G}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}'[C_0, \cdots, C_{k-1}]^{\mathrm{T}} \tag{12-7}$$

上式也可变换成

$$\boldsymbol{G}'[C_0,\cdots,C_{k-1}]^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}_{(n-k)\times(n-k)}[C_k,\cdots,C_{n-1}]^{\mathrm{T}}=0 \tag{12-8}$$

即

$$[\boldsymbol{G}'_{(n-k)\times k}\boldsymbol{I}_{(n-k)\times(n-k)}][C_0,\cdots,C_{k-1},C_k,\cdots,C_{n-1}]^{\mathrm{T}}=0 \tag{12-9}$$

也就是说,如果一串比特序列是对应于系统码 $\boldsymbol{G}'$的码字,那么看是否满足式(12-9)就可以了。鉴于此,称矩阵$[\boldsymbol{G}'_{(n-k)\times k}\boldsymbol{I}_{(n-k)\times(n-k)}]$为校验矩阵。

具体的线性分组码有很多,比如汉明码、Golay 码、Reed-Muller 码和 LDPC 码等,不同的线性分组码对应不同的生成矩阵。线性分组码通常用于编码少量的原始信息比特,主要是因为大多数线性分组码对应的编码生成矩阵都不会很大。因为线性分组码在应用时,显然需要存储生成矩阵,如果矩阵太大,且生成矩阵没有特殊结构,生成矩阵的存储都是问题,比较麻烦的事情。例如,LTE 中用 Reed-Muller 码(32,O)和(20,A)来编码 HARQ-ACK、CQI 等控制信息,这些信息一般只有几个比特;同样 TD-SCDMA 中用 Reed-Muller 码(48,10)来编码控制信息。LTE 中(20,A)生成矩阵如表 12-1 所示,能把 $A\leqslant 13$ 个原始信息比特$[x_0,\cdots,x_{A-1}]$编码成长度 20 的码字$[C_0,\cdots,C_{19}]$,其中

$$C_i = \sum_{k=0}^{A-1} M_{i,k}x_k \tag{12-10}$$

表 12-1　LTE 里 Reed-Muller 码(20,A)生成矩阵

i	$M_{i,0}$	$M_{i,1}$	$M_{i,2}$	$M_{i,3}$	$M_{i,4}$	$M_{i,5}$	$M_{i,6}$	$M_{i,7}$	$M_{i,8}$	$M_{i,9}$	$M_{i,10}$	$M_{i,11}$	$M_{i,12}$
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
2	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
3	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
4	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
5	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
6	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
7	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
8	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
9	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
10	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
11	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
12	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
13	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
14	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
15	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1
16	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
17	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
18	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
19	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0

当然,也有部分生成矩阵具有特殊结构的线性分组码,可以稍微能编码相对比较长的原始信息比特。比如 LDPC,如其名,低密度校验码(Low Density Parity Code,LDPC)表示生成矩阵是矩阵里 1 很少的稀疏矩阵,其存储相对容易。例如,IEEE 802.11n 里就采用 LDPC 对数据进行编码,每次能编码上千个原始信息比特。

12.2.2 卷积码及应用

卷积码和线性分组码不同,它对参与编码的原始信息比特个数没有限制。卷积码一般形式为

$$C_k = \left(\sum_{i=0}^{L-1} g_i a_{k-i} \bmod 2\right) \tag{12-11}$$

其中,C_k 为码字比特;a_k 为原始信息比特;$g_i=0$ 或 $g_i=1$;L 称为卷积码的约束长度。当然正常情况下,要求 $g_0=1$ 和 $g_{L-1}=1$,否则约束长度的定义就没意义了,因为总是可以加很多 $g_i=0$ 的项进去。也就是说,每个码字比特 C_k 要通过 L 个原始信息比特 $a_k,a_{k-1},\cdots,a_{k-L+1}$ 相互关联得到。并且输入一个信息比特只输出一个码字比特,也就是说单个卷积码的码率为 1。可以看到,该编码方式对原始信息比特的长度没有限制。

稍等!请问第一个码字比特是怎么出来的?a_0 之前不可能有其他原始信息比特啊!针对这个问题,目前有两种处理方式,分别对应两种不同的卷积码:归零卷积码和咬尾卷积码。

归零卷积码就是假设 a_0 之前需要的 $L-1$ 个比特都是 0;咬尾卷积码就是假设 a_0 之前需要的 $L-1$ 个比特为原始信息比特序列$[a_0,\cdots,a_{k-1}]$中尾部 $L-1$ 个原始信息比特。卷积码其实也是线性码,也可以写成生成矩阵的形式。例如,咬尾卷积码的编码可以表示成

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \cdots \\ C_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{L-1} & g_{L-2} & \cdots & g_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & g_{L-1} & g_{L-2} & \cdots & g_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & g_{L-1} & g_{L-2} & \cdots & g_0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{L-1} & g_{L-2} & \cdots & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{L-1} & g_{L-2} & \cdots & g_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-L+1} \\ a_{n-L+2} \\ \cdots \\ a_0 \\ \cdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \tag{12-12}$$

通常,编码不可能用码率为 1 的码字直接发送,那对于卷积码怎么生成其他码率的码字呢?比如 1/2,1/3 码率等。比较简单的方法是用多个卷积码同时对相同原始信息比特进行编码,再把编码得到的码字合起来。比如,用两个卷积码同时编码,最后能得到的码率是 1/2 的编码。通常,两个卷积码的编码规则不完全相同(甚至约束长度不同),否则就是简单的重复编码啦。

更具体地举个例子,LTE 中采用 1/3 的卷积码,具体形式如图 12-1 所示。

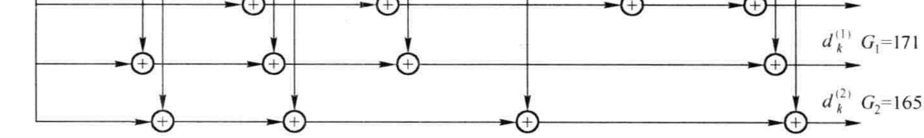


图 12-1　LTE 1/3 码率咬尾卷积码

其中采用了 3 个卷积编码来达到 1/3 码率。这三个卷积编码规则分别是

$$G_0 = 133,\ G_1 = 171, G_2 = 165$$

其中采用了八进制的表示方法,例如,

$$G_0 = 133 = 001011011$$

我们知道卷积编码规则首尾一定是 1, G_0 最前面的两个 0 没用,那么 G_0 这一路卷积码是

$$C_k = X_k + X_{k-2} + X_{k-3} + X_{k-5} + X_{k-6} \tag{12-13}$$

其他两路类似。显然,卷积码也不像线性分组码需要特别存储生成矩阵,只需要知道卷积规则就行了。

12.2.3　都差香农限一截,怎么选

1. 编码性能与香农限

我们说信道编码是达到香农容量的现实实现方式,这里我们就简单讨论一下他们之间的关系。首先说编码性能,对于给定一个编码方式,以及编码码率和调制方式,现实中不可能一下子就能保证是无误传输的。对每一个信噪比 SNR,都对应一个错误概率。显然,SNR 越高,错误概率将越小。从错误概率与 SNR 的关系曲线来看,就对应一条所谓的“瀑布”曲线。当然,只要编码方式、编码码率和调制方式三者之间有一个不同,就对应不同的“瀑布”曲线,如图 12-2 所示。其中,拿了 LDPC 和卷积码作为例子来比较示意,一般相同码率和调制方式下,LDPC 比卷积码的性能要好,即相同 SNR,错误概率要低。但注意,这里仅为性能示意,具体数值不一定绝对准确。

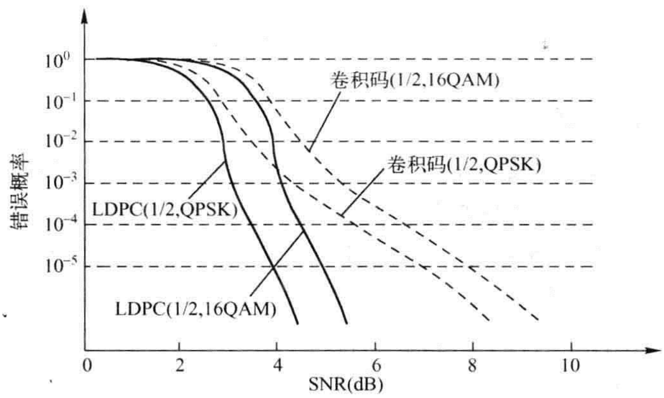


图 12-2　错误概率与 SNR 关系“瀑布”曲线

前面也提到过,达到香农信道容量时,每个数据符号可以从所有实数$\mathcal{R}$(或所有复数)里选择,只要满足信号功率要求即可。而给定一个实际的信道编码和调制方式,调制方式决定了每个数据符号的取值,信道编码方式决定了数据符号序列出现的形式。比如,若调制方式是 QPSK,那么数据符号就只有四个取值;而固定调制方式和编码码率,不同的编码方式对同一个消息(原始信息比特)选择了不同的数据符号序列,从而造成性能差异。显然,达到香农信道容量时,是全局优化;而实际的信道编码和调制方式是更进一步限制下的局部优化。因此,无论如何,实际的信道编码和调制方式实际达到的容量(或者说无误传输达到的速率)不可能超过香农容量给出的界限。如图 12-3 所示,香农容量曲线表示的是复 AWGN 信道容量与 SNR

的关系，即满足香农容量（比特每符号）公式：

$$\log_2(1+\mathrm{SNR})$$

另一方面，若调制方式采用的是 QPSK，那么即使编码速率为 1 的无误传输也最多能达到 2 比特每符号，因此任何信道编码不论 SNR 是多少都不可能超过这个界限；16QAM、64QAM 类似。同时，给定一个 SNR，现实信道编码和调制不可能绝对无误，那么图中的容量可以用错误概率很小（比如 10^{-5}）能达到的最大码率折算的比特数来近似。比如，采用 QPSK 调制，给定一个 SNR，LDPC 在错误概率为 10^{-5} 能支持的最大码率为 r，那么在这个 SNR 和 QPSK 调制下，LDPC 能达到的容量为 $2\times r$ 比特每符号；其他调制编码方式类似。图中比较了 LDPC 和卷积码，一般来说，LDPC 比卷积码更接近香农容量极限。

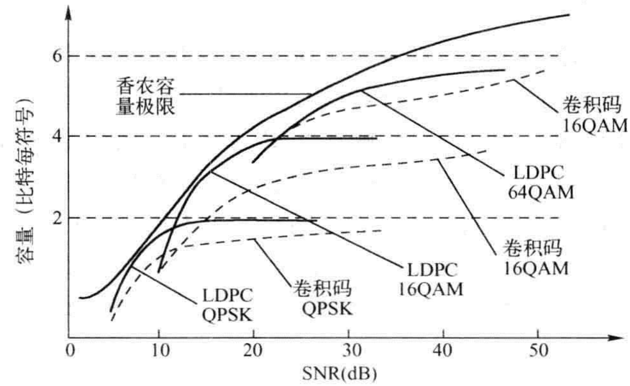


图 12-3　香农容量极限与各调制编码方式容量

2. 选择不错的编码方式

大家都知道线性分组码只要给出一个生成矩阵 $\boldsymbol{G}$ 就可以了，又或者，卷积码只要给一个卷积规则就行了。但是具体的生成矩阵或者卷积规则，具有哪些特征才算不错的编码呢？这里所谓“不错”主要是从两方面来说：一是性能，二是对应的编译码复杂度。

通常，不管性能还是译码复杂度，都和译码相关。说说译码（或者称为解码），译码一般指接收端通过接收到的比特序列（码字过信道后得到的）来生成一个原始信息比特序列的过程。不管是什么编码，理论上都是可以采用最大似然译码的，即拿所有可能的码字和接收到的比特信息比较，哪一个码字和接收到的比特关系最大（比如计算先验/后验概率），就认为发射端发的是哪个码字，从而该码字对应的原始信息比特就可以判断为发射端真正想要传输的信息比特。

可以看到，在整个最大似然译码过程描述中，译码器只需要知道可能的码字比特有哪些，而不用关心这些码字比特是怎么来的，即具体编码过程的特征（对于线性分组码就是生成矩阵的特征）完全没有在译码算法里体现出来。虽然最大似然译码理论上可行，但实际产品实现的时候，一旦原始信息比特较长，译码复杂度就会很高。比如，原始信息比特若有 20 个比特，那么可能的码字就有 2^{20} 个，若要用最大似然译码，要比较 2^{20} 个不同的情形，这仅仅 20 比特已经上百万次比较了，更不用说大多数情形，原始信息比特长度远远超过 20 个比特。

因此，在最原始、最泛的编码理论中讨论性能，都可以把任何编码看成两串比特之间的映

射关系,并不需要编码的结构的概念,也就是没有编码性能与其结构的联系。但大多数情况下,较实际的算法是和具体编码过程的特征相关的。人们在寻找具体的编码方案时,总是带着预想的规则,或者说想要的性质去构造编码方案,当该构造的编码方案现实可用时,这些规则或性质就变成了该编码方案的结构。从而,人们会去研究该编码方案的性能与结构有着怎样的关系,不同的编码结构也可能找到各自适合的译码方式,而不需要都用最大似然译码。

在 AWGN 信道下,一般把编码后输出的码字间的码距作为一个重要性能参考量。单从两个码字来看,如果他们之间距离越大,则一个被错误接收成另外一个的概率越小;从所有码字整体来看,通常最小码距越大,整体性能越好。但并没有一条绝对规则,可以按这个规则一定能比较出不同编码间的性能差异。每种编码方案性能与结构的关系有其自身的特有之处,不能随便把编码方法甲的性质套到编码方法乙中。

即使应用码距这个大致判断规则,也不尽相同。例如,Reed-Muller 码一般能对较少量的信息比特进行编码,且编码到固定长度,所以最小码距是一个比较好的度量;而卷积码,Turbo 码等几乎能对任意长度进行编码,如果仅对某个长度的原始信息比特来说,它对应的最小码距仍然是一个比较好的度量;但既然它是为任意长度原始比特设计的,那最好所有比特的性能都考虑进来,从而需要把每一个比特长度的最小码距都考虑进去,即有了所谓"自由距"的考虑。

最后,实际产品中所采用的信道编码方法,往往是性能与复杂度的折中。有可能,一种编码方式的性能更好,但译码复杂度高;人们反而退而求其次,采用性能差一点但译码更简单的编码。不过,复杂度这个指标是相对的、分阶段的。比如,早期的芯片 CPU 和数字处理技术,连处理百次可能都算复杂,但现在处理上万次也无所谓复杂问题。同样,现在认为上百万次复杂,将来可能也是小菜一碟。

12.3　循环冗余校验(CRC)

理论上说,某种编码和判决法则能达到 90% 的正确率,也就是说在 100 次传输中,90 次是正确的,但是到底是哪 90 次是正确的,我们无法知道。这就产生了一个问题,对于一次传输,接收端在解调解码以后,怎么判断这次是接收正确还是错误呢?

其中一种常用的方法,就是以原有信息比特为基础,产生一些额外的比特,使得这些额外比特和原有比特一起满足某种关联规则,一般情况下,如果接收的所有比特里某些错误,那么接收到的比特用所述规则来检验会发现不再满足该既定规则,从而可知当前接收到的比特有错误。这些规则也称为校验规则。

当然这种办法也有判断错误的时候,也就是说,本来是错误的,但根据该方法却得出正确的结论。原因是接收端有可能把信息比特完全解成另一对满足规则的信息比特了。比如,发射端发送的是 $A+B$,A 是原信息比特,B 是额外的校验比特,A 和 B 满足校验规则,但是接收端把 A 解成了 C,把 B 解成了 D,而 C 和 D 刚好是另一对满足该校验规则的,那接收端就认为当前接收是正确的,实际上是错误的。

校验方式或者说校验规则有很多,比如奇偶校验、循环冗余校验等。在所有的这种校验方式中,循环冗余校验(Cyclic Redundancy Check,CRC)是最常见、应用最广泛的一种,我们将主要介绍它。对于奇偶校验方法,我们最后会简单说明一下。

12.3.1 CRC 为什么能判断对错

循环冗余校验采用代数思想设计而成,下面描述其思想与操作流程。

假设原始信息比特序列为$[a_0,\cdots,a_N]$,现在用一个系数为0,1的M次多项式$x^M+\sum_{i=0}^{M-1}\beta_i x^i$来除多项式$a_0x^{N+M}+\cdots+a_Nx^M$,假设其余式为

$$b_0x^{M-1}+\cdots+b_{M-2}x+b_{M-1}$$

则比特序列$[b_0,\cdots,b_{M-1}]$就是M位长的循环冗余校验比特,多项式$x^M+\sum\beta_i x^i$也被称为该CRC校验的生成多项式。例如,LTE中采用的CRC有8位、16位和24位,其中8位的生成多项式为

$$x^8+x^7+x^4+x^3+x+1$$

发射端把冗余校验比特接在原始比特后一起发送出去,以便接收端能够进行错误检测。接收端为什么就能进行错误检测呢?

首先,显然多项式

$$a_0x^{N+M}+\cdots+a_Nx^M+b_0x^{M-1}+\cdots+b_{M-2}x+b_{M-1}$$

能够整除生成多项式$x^M+\sum\beta_i x^i$。接收端把接收到的比特序列$[a_0',\cdots,a_N',b_0',\cdots,b_{M-1}']$仍然写成$M+N$次多项式,然后还是拿最初的多项式$x^M+\sum\beta_i x^i$来除该多项式,如果刚好整除,则说明接收到的比特是发射端发送的比特,否则认为有错误。注意到每个序列$[a_0,\cdots,a_N]$都可以生成一个CRC校验序列$[b_0,\cdots,b_{M-1}]$。那么,当$N>M$时,显然会出现多个序列的CRC校验序列是相同的。

12.3.2 哪些错误逃不过 CRC 的法眼

1. CRC 也有失灵的时候——误检概率

误检概率是指本来是发生了错误却通过了校验的概率。误检概率也称为漏检概率。长度为M的CRC校验误检概率是多少呢?假设原始信息比特序列长度为N,那么这样的不同序列共有2^N个。而每一个唯一决定一个能够通过CRC校验的长度为$N+M$的序列,共有2^N个能通过校验的序列。注意,可以理解,当$N>M$时,可能有多个原始信息比特序列对应的校验序列是相同的。

现在,把长度为$N+M$的序列$\boldsymbol{x}$发送出去,其中

$$\boldsymbol{x}=[a_0,\cdots,a_{N-1},b_0,\cdots,b_{M-1}]$$

假设每一个比特位发生错误的概率均为独立的1/2,则在接收端收到的序列$\boldsymbol{x}'$可能是任何一个长度为$N+M$的序列。记

$$\boldsymbol{x}'=[a_0',\cdots,a_{N-1}',b_0',\cdots,b_{M-1}']$$

那么序列$\boldsymbol{x}'$可以是任何一个长度为$N+M$的序列,即总的可能接收序列是2^{N+M}个。但该序列$\boldsymbol{x}$只有变成另外2^N-1个能通过CRC校验的序列时才会发生漏检,即$\boldsymbol{x}'$里$[b_0',\cdots,b_{M-1}']$刚好就是$[a_0',\cdots,a_{N-1}']$的CRC校验比特,才会发生漏检。那么,该序列$\boldsymbol{x}$变成另外2^N-1个能通过校验的序列的概率是多少呢?

首先,注意这个概率是其他2^N-1个能通过CRC校验的序列中每一个出现的概率之和。先看看原始信息比特序列中仅某K个比特位置发生错误,且能通过校验的序列的出现概率是

什么样子。应该是这个样子

$$\frac{1}{2^K}\frac{1}{2^{N-K}}\frac{1}{2^{K'}}\frac{1}{2^{M-K'}}=\frac{1}{2^N}\frac{1}{2^M} \tag{12-14}$$

式(12-14)中等号左边表达式的前面两项分别的意思是，原信息比特序列中所述的“某 K 个位置”全错的概率和剩下的 $N-K$ 个位置全正确的概率；后面两项分别的意思是，当序列 $\boldsymbol{x}$ 中原始信息比特序列中“某 K 个比特位置”发生错误得到 $[a'_0,\cdots,a'_{N-1}]$ 后，序列 $\boldsymbol{x}'$ 中 $[b'_0,\cdots,b'_{M-1}]$ 需要刚好是 $[a'_0,\cdots,a'_{N-1}]$ 的 CRC 校验比特，才会发生漏检。假设 $\boldsymbol{x}$ 中 $[b_0,\cdots,b_{M-1}]$ 需要仅某 K' 个位置发生错误才能得到 $[a'_0,\cdots,a'_{N-1}]$ 的 CRC 校验比特 $[b'_0,\cdots,b'_{M-1}]$，这种错误出现的概率为

$$\frac{1}{2^{K'}}\frac{1}{2^{M-K'}}$$

虽然我们不清楚具体 K' 是多少，以及具体是哪 K' 个位置发生错误，但其发生的概率都是式(12-14)中等号左边表达式的后两项的样子。

继续看，式(12-14)是原信息比特序列错成给定一个仅有“某 K 位错误”的概率，那么错成所有仅有 K 位错误的其中之一的概率为

$$\binom{N}{K}\frac{1}{2^N}\frac{1}{2^M}$$

即共有 $\binom{N}{K}$ 种情况确定到底是哪 K 位发生错误，而每一种情况出现的概率都是 $\frac{1}{2^N}\frac{1}{2^M}$。进而错成所有其他 2^N-1 个可以通过校验的其中之一的概率为，把所有 $K=1,\cdots,N$ 加起来，得

$$\sum_{K=1}^{N}\binom{N}{K}\frac{1}{2^N}\frac{1}{2^M}=\frac{2^N-1}{2^N}\frac{1}{2^M}\approx\frac{1}{2^M} \tag{12-15}$$

综上，我们知道在信道每比特的传输错误概率独立为 1/2 时，长度为 M 的 CRC 校验误检概率为 $1/2^M$。

性质 12-4 在信道每比特的传输错误概率独立为 1/2 时，长度为 M 的 CRC 校验误检概率为 $1/2^M$。

当信道每比特的传输错误概率不是 1/2 时，误检概率又是多少呢？甚至比特间的错误概率不是独立的又怎样呢？有兴趣的读者可以自己去算算，分析计算方法和上面是一样，但没有 1/2 那样简单能算出准确值来，但可以做一些近似估计。

当然，你会想校验多项式并不是随便拿一个来都能很好的工作。没错，这个校验多项式最好能满足一些特别的性质。要理论研究，可能要涉及一些代数群、环、域的概念，本书就不具体讲了。

2. 哪些错误逃不过 CRC 的法眼

这里不想细写每一种长度的 CRC 到底能检测出哪些形式的错误，或者能以多大的概率检测出哪些形式的错误，只大概讨论一下思考分析方法。

首先，发生了错误表示什么？表示接收到的比特序列写成的多项式等价于发射端发射的多项式再加上了一个多项式，即

$$\begin{aligned}A'(x)&=a'_0x^{N+M}+\cdots+a'_Nx^M+b'_0x^{M-1}+\cdots+b'_{M-2}x+b'_{M-1}\\&=a_0x^{N+M}+\cdots+a_Nx^M+b_0x^{M-1}+\cdots+b_{M-2}x+b_{M-1}+C(x)\end{aligned}$$

$$=A(x)+C(x) \tag{12-16}$$

所加上的多项式 $C(x)$ 具体形式取决于哪些比特位置发生了错误，该多项式 $C(x)$ 里非 0 项就是对应那些发生错误的比特位置。这样的错误，CRC 校验能否检测得出来，根据 CRC 原理取决于 CRC 生成多项式能否整除接收端接收到的多项式 $A'(x)$，而这个多项式又可以写成两部分 $A(x)+C(x)$，其中 $A(x)$ 能被生成多项式整除，那么整个多项式能否被生成多项式整除取决于剩下另一部分 $C(x)$ 能否被生成多项式整除，即由于发生错误加上的那个多项式能否被生成多项式整除。

具体情形用这个方法来分析即可。例如，长度为 M 的 CRC 校验能检测出所有错误仅落在某个长度为 M 的连续比特块里的错误。原因是，错误仅落在某个长度为 M 的连续比特块里的错误相当于所加上的多项式为形式

$$\begin{aligned}C(x)&=c_0x^{k+M-1}+c_1x^{k+M-2}+\cdots+c_{M-1}x^k\\&=x^k(c_0x^{M-1}+c_1x^{M-2}+\cdots+c_{M-1})\end{aligned}$$

其中，$k\geqslant0$。要生成多项式能整除 $C(x)$，生成多项式必能整除其中一个因子。显然生成多项式不能整除 x^k，只需要看生成多项式能否整除

$$c_0x^{M-1}+c_1x^{M-2}+\cdots+c_{M-1}$$

而长度为 M 的 CRC 校验的生成多项式是最高非 0 项为 x^M 的多项式，只要某个 $c_i\neq0$，显然不能整除，余数多项式为

$$c_0x^{M-1}+c_1x^{M-2}+\cdots+c_{M-1}$$

因此，只要某个长度为 M 的块里确实有至少 1 比特错误，即 c_i 中至少一个不为 0，那么余数多项式不为 0，这样错误就被检测出来了。

12.3.3 顺路提提奇偶校验

奇偶校验是更简单的一种校验方法，其最简单的形式为：给一串信息比特，$[a_0,\cdots,a_N]$，若

$$(\sum_i a_i)\bmod 2=1$$

则添加一个校验比特 $b_0=1$；若

$$(\sum_i a_i)\bmod 2=0$$

则添加一个校验比特 $b_0=0$。两种情况下，最后都使得

$$[(\sum_i a_i)+b_0]\bmod 2=0 \tag{12-17}$$

那么，这些信息比特到达接收端后，接收端如果发现

$$[(\sum_i a_i)+b_0]\bmod 2=1 \tag{12-18}$$

则这些比特在传输过程中一定发生了错误。

很容易理解，如果发生错误的比特位数为奇数位，则接收端一定校验得出来，即一定有 $[(\sum_i a_i)+b_0]\bmod 2=1$；而如果发生错误的比特位数为偶数位，则接收端校验不出来，因为此时仍然有 $[(\sum_i a_i)+b_0]\bmod 2=0$，从而发生漏检。

第三部分小结

本部分主要回答了有失真系统或噪声系统下，通信的极限能力。即给定一个信道模型，到底发射端能发哪些信号，才能保证即使通过信道失真后，接收端逻辑上也是能区分开的？这样的信号最多可以有多少个呢？这就是信道容量的概念。所谓给定一个信道模型，可从两方面来讨论：广义的情形，只需要给出发射端信号到接收信号的转移概率，这部分我们给出了如何讨论做到信号区分；狭义的情形，主要就是基于 AWGN 信道的讨论。

对于 AWGN 信道，香农给出了精确又简洁的信道容量公式回答了信道极限能力的问题。对于非 AWGN 信道，我们也给出了类似的分析方法，可以大概知道其极限能力是在什么范围。在分析讨论中，我们看到 AWGN 是最坏的噪声信道，也即对信号的污染最严重，导致信道的区分度最低，信道容量最小。并且，更进一步地，对于相同噪声功率的 AWGN 信道和一般白噪声信道，我们发现，任何能在 AWGN 信道下能区分开的信号，在一般白噪声信道一定也能区分开。这个结论有很好的指导意义，我们说过在没有给出具体信道时，一般采用 AWGN 来讨论相关性能，那么这个结论告诉我们，在 AWGN 下能达到的能力，即使实际信道不是 AWGN，一般也能达到同样的能力，这就是研究 AWGN 模型一个重要意义所在。

讨论了极限情况，接下来我们通常讨论实际的手段，这里就是信道编码。从讨论中，我们知道理论上达到香农容量极限相当于一个全局优化问题，而实际的信道编码结合调制方式相当于一个进一步加了条件限制的局部优化问题，显然局部的优化结果不可能超越全局优化结果。但由于篇幅原因，我们只简单介绍了编码的基本思想和几种常用的具体信道编码，希望能对读者后续深入研究起到一定的引导作用。

第四部分

无线通信原理

第四部分开始讲无线通信。这是非常有意思、有挑战的实际应用领域，需要大家在掌握前三部分基础知识以及基本思想后，进行一个综合且灵活的应用。当然，这部分也会引导大家认识无线通信这个特殊领域的新知识和新思想。

首先，无线通信发生在无线通信环境或者说无线信道中。无线信道自身有很多特性，有些特性对通信有好处，有些有坏处。在研究清楚无线信道特性后，我们在设计系统时就要想着怎么利用无线环境的好处，怎样避免其坏处，在不能避免的时候，怎样对付坏处，把其影响减到最小。接下来，我们讨论了各种无线信道模型的极限传输能力——信道容量。再下来，我们又讨论了实际的发射接收算法和提升性能的思想，比如波束成型、分集思想等。最后，我们详细介绍了目前无线通信领域两大热门技术：OFDM 技术和多天线技术。

第 13 章　无线信道——无线通信就围着她转

相对于有线通信，无线通信中信号从发射端到达接收端经历的信道——无线信道，要复杂得多。有线通信中，收发两端用线缆连接，可以认为信号经历的信道是人为定制的，人为不可控的因素较少，故也称为恒参信道，即信道参数是不变的。而无线信道完全是一个自然存在的信道，完全由自然环境决定，人为参与的因素较少，不可控，信道参数总是处于变化之中，故称为变参信道。我们可以做的，就是秉承一个虔诚的态度去尝试摸清她的脾性，利用她的优点，而尽量克服她的缺点，来完成我们通信的目的。值得骄傲的是，经过一代代人的努力与贡献，我们已经了解了部分无线信道的特性，实现了无线通信。不过，无线信道的研究还将是一个重要并且较难的课题。这并不意味着已有的模型不正确或者怎么样，只是说我们已有的通信系统是按照我们已经清楚了解的特征来设计的，所以即使无线信道还有很多我们不是完全清楚的特征也不影响现在的通信。而继续研究信道，是为了更多地挖掘信道特征，特别是一些对通信有益处的特征，将来的通信系统能利用这些特征，设计更有效的通信系统。

13.1　无线信道基本传播特性

无线信道里，传播的电磁波信号可能由于碰到建筑物、树木、来往的汽车、行人等而产生丰富的反射、散射和能量衰减，如图 13-1 所示。这时发射端发了一个电磁信号波形，我们不可能用一个精确的数学式子来表示接收端接收到的信号波形是什么样子，太复杂了。

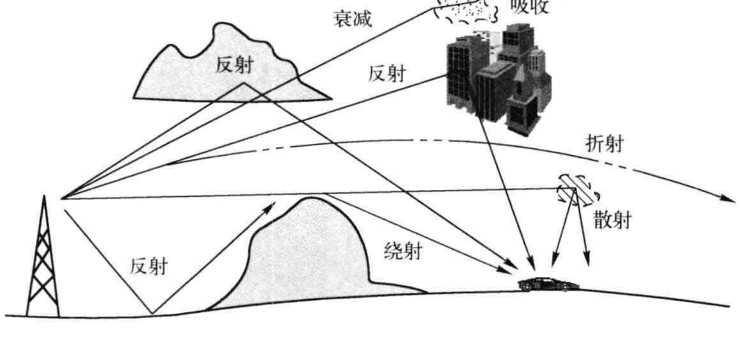


图 13-1　无线信道传播环境

值得庆幸的是，除了一些模拟通信系统，会依赖于电磁信号波形的完整性来携带信息外，对于应用越来越广的数字通信系统来说，我们传递信息不是完全靠电磁波形来携带信息的，也

就不需要接收端知道接收到的电磁波信号的精确形式。具体来说，对于数字通信系统，不管怎么设计信号，采用什么调制编码方式和复用思想等，数据的解调基本上都可以认为是以接收端对接收信号采样得到的采样点为基础的，因此我们一般需要了解的是采样点经过信道大概按什么形式变化。所以，我们关心的不是接收端精确的波形，而是对通信有用的特征量怎么变化，例如最重要的功率。谈到功率，我们就先介绍无线信道传播下的功率变化行为：大尺度衰落和小尺度衰落。

定义 13-1（大尺度衰落） 大尺度衰落，是指在当前周围环境下，接收端离发射端一定距离时的电磁波信号功率的平均衰落水平。

从定义中，我们看到大尺度衰落主要和两个因素相关：环境和距离。定义中，“当前周围环境”是比较粗的概念，比如大致可以区分为自由空间（没有任何反射、散射等的理想信道），广袤的农村、密集的城区等。这里主要是想说，大尺度衰落也是和环境相关联的，电磁波信号在不同的环境中传播相同的距离功率衰落程度也是不一样的。在这几个例子中，自由空间的衰落最小，农村一般又比城区衰落小。而之所以称之为“大尺度”，是因为接收端与发射端的距离变化较大时（成百上千米），信号接收平均功率才有明显的变化。比如，自由空间里，发射端以功率 P_t 发射一个频率为 f_c 的电磁信号 $\cos(2\pi f_c t)$，在距发射端 d（米）的任何一点的（信号）功率相等，具体为

$$P(d)=\frac{P_t}{4\pi d^2} \tag{13-1}$$

注意，自由空间里距发射端 d 的所有点构成一个半径为 d 的球面，我们知道该球面面积为 $4\pi d^2$，那么可以看到该球面上每个点的功率相当于总功率在整个球面的一个平均分布。如果在距离 d(m) 的地方放一个接收端，现实接收端的接收天线当然不可能只是一个理想的点，所以不可能仅接收到一个点的信号。一般实际天线尺寸（接收面积）和想要接收的信号的波长相关，这里不妨设接收天线的有效面积为$\frac{\lambda^2}{4\pi}$，其中波长 $\lambda=C/f_c$，$C=3.0\times10^8$ m/s 为电磁波传播速度常数，那么接收天线接收到的总功率为

$$\frac{P_t\lambda^2}{(4\pi)^2d^2}=\frac{P_tC^2}{(4\pi)^2d^2f_c^2} \tag{13-2}$$

接收功率相对于发射功率的衰减倍数为

$$\frac{P_t}{\dfrac{P_tC^2}{(4\pi)^2d^2f_c^2}}=\frac{(4\pi)^2d^2f_c^2}{C^2} \tag{13-3}$$

一般通信里喜欢用 dB 这个单位来描述两个量 x 和 y 的比值，具体为

$$\frac{x}{y}\Rightarrow 10\times\lg\frac{x}{y}\,(\mathrm{dB}) \tag{13-4}$$

那么，接收功率相对于发射功率的衰减倍数体现成对数形式（dB）为

$$10\times\lg\frac{(4\pi)^2d^2f_c^2}{C^2}=32.45+20\lg f_c+2\lg d\,(\mathrm{dB}) \tag{13-5}$$

其中，在计算过程中频率 f_c 的单位已转换成兆赫兹（MHz），距离 d 的单位已转换成千米（km）。那么，我们可以看到，距离的变化要以差不多千米量级，才有接收功率的差别，尺度真

的很“大”啊！对于其他环境，信号功率衰落的形式和式(13-5)类似，大概也包括三个部分：常数项、和频率有关的部分，以及和距离有关的部分，只不过常数项和频率或距离项的系数(这里为20)的取值有所差别。当然，其他环境的平均接收功率变化虽不像自由空间的千米量级，但至少也要距离有几米或几十米的变化才有所体现。

另一方面，实际通信系统中真正在空中传输的信号(即射频信号)不可能只包含一个频率分量f_c，而是具有一定带宽$(f_c-\frac{W}{2},f_c+\frac{W}{2})$的信号。那么是否对于信号中不同频率分量，其大尺度衰落变化差别很大呢？一般情况不是！因为实际通信系统中频率f_c(也即信号的中心频点或称为载频)一般都在几百 MHz，或上千 MHz(即 GHz)的频率位置，例如 GSM 一般在900 MHz左右，LTE 可应用在 2.0 GHz 左右；而一般信号的带宽大概为几 MHz 或甚至更小(如 GSM 的信号带宽只有 200 KHz 左右)。那么整个信号带宽上的频率分量对应的大尺度衰落不会有太大差别，都近似和中心频点f_c对应的大尺度衰落相等，我们可以认为大尺度衰落相对于实际通信系统的信号来说，是和频率无关的(中心频点除外)，中心频点一旦确定就定了。

最后，上面在讨论大尺度衰落时，是把环境和距离的衰落影响放在一起讨论；有时也会要把两个因素分离开来讨论，在单独考虑环境因素时，也把周围环境造成的衰落称为“阴影衰落”，仅此说明，不再多讨论。

定义 13-2(小尺度衰落) 大尺度衰落是指一定距离上的接收信号平均功率衰落水平，也就是说即使距离相同，同一时刻不同的位置，或者同一位置不同的时刻，瞬时信号实际功率并不相同。那么，这个“不同”是按什么样的规律变化的呢，这就是小尺度衰落需要刻画的内容。

小尺度衰落主要由信号的多径传播以及收发端的相对运动引起，对收发端相对距离变化比较敏感，大概距离变化在信号的波长量级(几厘米或几十厘米)就会引起功率的变化，故称之为“小尺度”。并且，小尺度衰落一般和信号带宽内的各频率分量有关。

图 13-2 示意了大尺度衰落和小尺度衰落之间的关系，其中中间较平稳的线刻画了大尺度功率衰落情况，以它为中心的振动刻画了小尺度功率变化情况。大尺度衰落对实际通信来

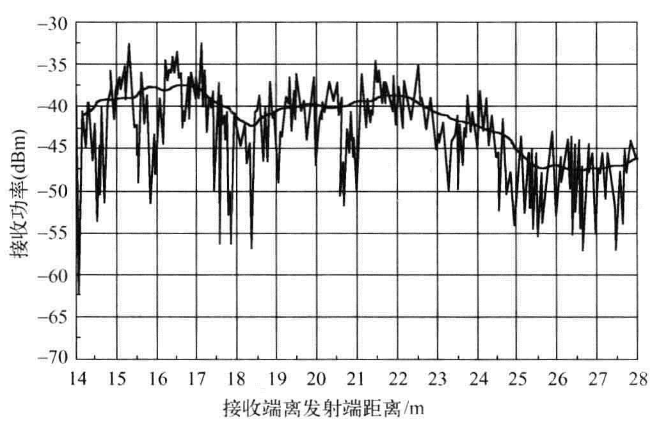


图 13-2 无线信号功率变化情况

说，变化相对比较固定，即接收端不可能在短时间（相对于一个信号持续时间，一般为微秒量级）内以几十米甚至千米量级运动，因此和通信系统的信号设计、信号发射接收处理没多大关系，本书把其放在次要位置讨论。本书里主要讨论小尺度衰落相关的东西，因为这个和信号设计等强相关。

接下来，我们就将讨论不同“周围环境”下无线信道的衰落特征，主要分为理想无线信道和现实无线信道两部分。在讨论之前，我们假设无线信道是线性系统，并且注意并没有假设无线信道是时不变系统。则，如果发射端分别发射电磁波 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，接收端分别接收到 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$，那么发射端若发射的电磁波是由两个电磁波 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 叠加产生的信号 $x_1(t)+x_2(t)$，则接收到的信号是 $y_1(t)+y_2(t)$。比较容易看到，接收到的信号可以看成两个电磁波分别独立经过信道然后在接收端叠加在了一起。

13.2　理想无线信道——自由空间

先看一个特殊的无线信道，即理想无线信道，或者称为自由空间，表示电磁波在其中传播时不会有反射、散射等，只有功率衰落，且衰落只与距离有关。

13.2.1　静态信道——理想中的理想

可以想象得到，如果发射端和接收端是相对静止的，发射端发送一个电磁波，接收端看到的是同样一个电磁波，与发射端电磁波不同的是，在时间上相对于发射端电磁波是延迟的；在幅度上线性减少，原因是电磁波传播过程中有功率衰减，而功率表现为幅度。即发射端发送的是 $x(t)$，接收端看到的是 $\alpha x(t-\tau)$，τ 是发射端到接收端的传播时延，α 为功率衰减因子。更具体地，我们可以采用下面的模型来说明和理解。

自由空间中一个信号发射源，发射了一个电磁波 $x(t)$，你可以理解为一个振动，振动的轨迹由 $x(t)$ 刻画，其功率为 P。然后电磁波向四周传播开去，在传播过程中，对于电磁波经历的每一个路径，对该路径上的点都触发一个功率不同但波形和 $x(t)$ 完全一样的电磁波，即该路径上的点跟着振动。对于自由空间来说，因为没有任何反射、散射等，电磁波按球面向整个三维空间传播，发射源传播到达周围每一个点只有一条路径，且在每个点触发的电磁波功率大小只和发射源的距离有关，那么所有和发射源距离相等的点组成的一个球面上各点的振动功率相等。这类似于往平静的湖面投入一块石头，水波振动按圆圈传播的情形，投入石头的点一直在振动，以这个点为中心，并带动周围一圈一圈的振动，离中心越远的圆圈振动起伏越小，即振动功率越小。下面为便于描述，不管是否符合其他地方的定义，我们将把电磁波 $x(t)$ 上每个轨迹点，即每个时刻 $t=t_0$ 以及对应的值 $x(t_0)$，称为一个相位；如果确实有冲突，请读者自行通过上下文注意区分。

如果此时在信号发射源周围的某个点 A 放一个接收机，接收机接收到的信号即为 A 点振动的轨迹，即接收到信号为 $\alpha x(t-\tau)$，其功率为 $\alpha^2 P$，τ 为相对于发射源的相位延迟，即发射源开始振动后，再经过时间 τ，A 点才开始振动，如图 13-3 所示。

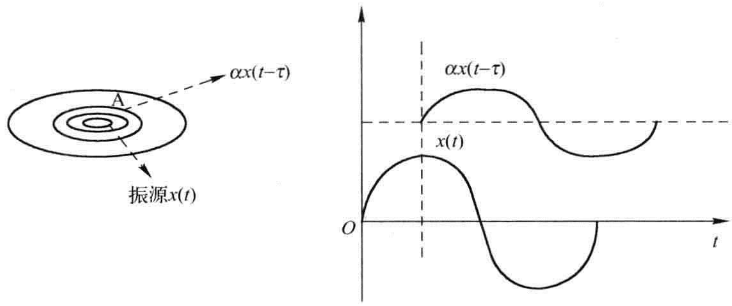


图 13-3 自由空间信号传播与静止接收

13.2.2 相对运动与多普勒频移

接收机静止情况下，在周围的某个点 A 放一个接收机，则信号发射源在 t_0 时刻相位为 $[t_0, x(t_0)]$，而接收机在 t_0 时刻接收到 $\alpha x(t_0-\tau)$；再经过时间 τ_0，即 $t_0+\tau_0$ 时刻接收到的是 $\alpha x(t_0-\tau+\tau_0)=\alpha x((t_0+\tau_0)-\tau)$，可以看到接收功率还是一样的，接收到的相位延迟和具体时刻（不论是 t_0，还是 $t_0+\tau_0$）是无关的，即同一个相位在发射源的出现时刻和接收机接收到的时刻固定相差时间 τ。

如果接收机以速度 v 从 A 点向 B 点移动，接收机接收到的信号不可能为同一个点的振动轨迹，而是为 A 到 B 一路上的点的振动的某个相位串起来的一个信号。一路上的点与点之间的振动功率不同，接收到的相位和固定静止时也不一样，它不是连续的，那么此时接收到的信号和发射源的信号比较来说，波形将发生变化。简单来说，此时，一路上接收到的振动功率是随时间变化的，相对于发射源的相位延迟也是随时间变化的，即接收到的信号形如 $\alpha(t)x(t-\tau(t))$ 而不像接收机固定情形时的 $\alpha x(t-\tau)$，其中功率和相位延迟都是固定的。

具体地，假设 A 点与发射源相位相差 τ_1。若接收机以速度 v 由 A 点开始移动，那么经过时间 t 后，发射源的相位为 $x(t)$，而接收机将到达 B 点。我们知道此时 A 点的相位为 $\alpha_A x(t-\tau_1)$，而 B 点的相位相对于 A 点相差 vt/C（即电磁波走过 A,B 点距离需要的时间），那么接收机接收到的相位为 $\alpha_B x(t-\tau_1-vt/C)$。其中，速度 v 是带方向的（先只考虑与电磁波传播方向平行），可正可负，正表示由 A 点远离发射源，负表示由 A 点朝发射源运动。整个过程如图 13-4 所示，图中的 τ_2 相当于这里的 $\tau_1+\dfrac{vt}{C}$。这已经说明，接收到的信号单从相位随时间变化上来看，和发射源的波形就不一样了，必然频率发生了变化。

具体地，假设 $x(t)$ 为正余弦波，或者把 $x(t)$（按傅里叶变换）分解成正余弦波来看，每一个频率（分量）的波都发生了频移。例如，假设信号源发射的是 $\cos(2\pi ft)$，那么接收到的是所有不同时刻 t 时接收端所到达的 $B(t)$ 点当前对应的相位串起来组成的信号

$$\sum_{t,B(t)}\alpha_{B(t)}\cos\left[2\pi f\left(t-\tau_1-\frac{vt}{C}\right)\right]=\alpha(t)\cos\left[2\pi f\left(t-\tau_1-\frac{vt}{C}\right)\right] \tag{13-6}$$

$$=\alpha(t)\cos\left[2\pi f\left(1-\frac{v}{C}\right)\left(t-\frac{C\tau_1}{C-v}\right)\right]$$

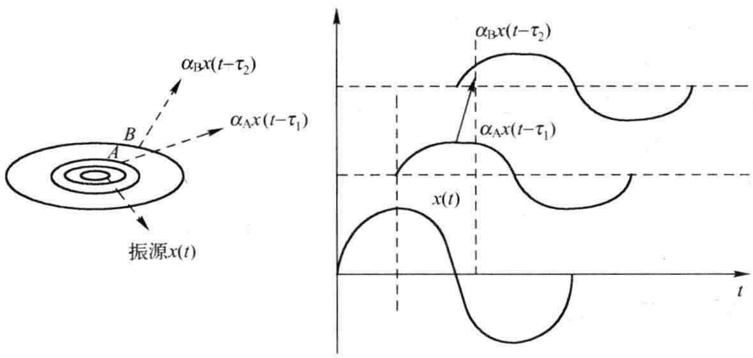


图 13-4　自由空间信号传播与移动接收

也就是说，对于频率为 f 的电磁波来说，频率变化为 fv/C，这就是多普勒频移(Doppler Shift)，如图 13-5 所示。

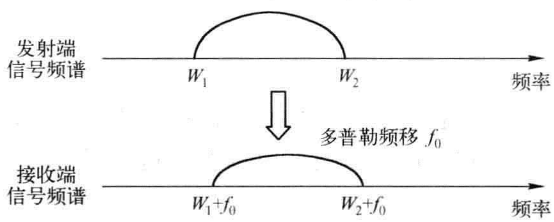


图 13-5　信号发生多普勒频移

现实生活中，你也许有这样的经验，救护车或者警车的警笛在离你很远的地方，你会听着感觉警笛声音周期变得很慢；当离你很近时，你会感觉声音变得很快，这就是多普勒频移的效果。为什么呢？原因不是警笛发生了变化，只是我们听觉重建声音时发生了频率变化。通信系统接收端接收电磁波信号也是一样，不是发射端发出的电磁信号发生了频率变化，而是接收电路重建信号时，接收端由于运动而“错误”地重建了频率。为什么呢？首先我们知道频率反映的是收到信号两个相同相位(比如相邻两个峰值)的快慢，而因为相对运动，接收端收到两个相同相位需要的时间和固定情形不一样，从而表现出的频率发生了变化。

13.2.3　自由空间信道就不变吗

回忆本书第一部分里介绍的时不变系统：如果系统对输入信号 $x(t)$ 的输出信号为 $y(t)$，那么相对于 $x(t)$ 的延迟时间 τ 的信号 $x(t-\tau)$，系统对其的输出信号为 $y(t-\tau)$，即若输入信号仅有时延的差别，那么输出信号也仅有相同时延的差别；否则，为时变系统。

对于自由空间来说，不考虑接收机，不同时刻，发射源发射一个冲激信号，造成周围振动效果是一样的，从而可以认为信道没有发生改变。但若把接收机考虑进来，以接收机看到的情况来说，就得分情况了。

若接收机静止，不同时刻发射一个冲激信号，接收机对分别接收的情况相同，包括功率相同和相位相同，唯独只有时间不同，这个和线性时不变系统是一样的。即从一个的接收情况就能预测出另一个的接收情况，从而可以认为信道没有变化。但若接收机是运动的，对不同时刻

发射的冲激信号,其接收到的信号不同(包括功率和相位),那么从电磁波发射源到接收机出来的信号这个系统来说,信道是变化的,这个变化还和运动速度有关。

那么我们看到,即使是自由空间,即使单径,对(相对)运动的接收机来说,信道是时变的。若不考虑接收机,无线信道是一个带宽无穷大,时间也没有任何限制的系统,你可以认为有一个虚拟的"永动"接收机。但实际的接收机在接收时,有一定的带宽限制,以及接收时间窗限制、处理时间窗限制等,这些概念和思考问题的视角我们在接下来的章节再讨论。

13.3 现实环境无线信道

现实环境与理想情况的主要区别是,某个点的振动功率不只简单地由与发射源的距离决定,和发射源距离相同的点的功率可能也不会相同,接收信号的最后波形很难准确计算,因为波形会随着现实环境的变化而变化。下面我们来研究一下现实环境无线信道的特征。

13.3.1 条条道路通罗马——也谈多径传播

1. 多径传播

现实环境中,发射源和接收机之间有很多物体,包括建筑、汽车、树木等,这些物体都会造成电磁波的反射、散射,因此发射源的电磁波会通过多条路径到达接收端。从而对某点来说,最后呈现出来的振动是多条路径触发的振动的合成,但是每一条路径触发的振动的功率可能不相同,并且振动开始时间也可能不相同,然而每一个都形如

$$\alpha_i x(t-\tau_i)$$

那么,对于某点来说,整体呈现出来的振动为

$$\sum_i \alpha_i x(t-\tau_i)$$

其中,和式表示所有路径触发振动的叠加。如果接收机静止,接收机也将接收到这样一个信号。

接下来,多径其实可以分为两种情况:客观存在的多径和具有时间分辨度的多径。对于客观存在的多径,有可能所有多径的延迟完全一样,但确实是多径,只是从时间上表现出来像一条径一样。比如,发射端发了信号 $x(t)$,有多条路径同时到达接收端,则接收信号为

$$\sum_i a_i x(t-\tau) = \left(\sum_i a_i\right) x(t-\tau) = Ax(t-\tau) \tag{13-7}$$

即本来是多径传播,最后呈现出来的效果和一条径传播的效果一样。

具有时间分辨度意义上的多径,则是指一定包含延迟不同的路径,接收信号为

$$\sum_i a_i x(t-\tau_i)$$

其中,各径延迟 τ_i 两两不等。当然,这里的一个时延分量仍然可能实际上是由多条延迟相同的路径叠加出来的,接下来我们暂时仅考虑具有时间分辨意义上的多径。

当环境发生变化,甚至天气发生变化,或者发生相对运动时,如上面讨论的一样,每条路径接收到的功率和相位都是随时间发生变化的,甚至路径的个数也是发生变化的。当然我们总是可以假设有无穷多条路径,只是有时候某些路径的功率变为 0 而已。那么也就是说,一般情况下,对于多径情形,接收到的信号形如

$$\sum_i \alpha_i(t)x(t-\tau_i(t))$$

2. 相干带宽

在讲相干带宽之前,我们必须先了解信道的频率选择性,频率选择性主要是由无线信道的多径传播特性引起的。频率选择性是说,对不同频点,在无线信道中的衰落情况不一样,有些频点能量衰减小,有些频点能量衰减大。如果只是先体会频率选择性,最简单的情况是看静止情形下时延不一样的多径信道,那我们就先看看吧。

对绝对静止多径信道情形,假设发射端发射的是信号 $x(t)$,其频谱为 $X(\omega)$。接收端接收到的时域信号为

$$\sum_i \alpha_i x(t-\tau_i)$$

看看接收信号的频谱,不同时延对应到频域就是相位旋转,

$$F\left\{\sum_i \alpha_i x(t-\tau_i)\right\} = \sum_i \alpha_i X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau_i} \tag{13-8}$$

我们看相对于发射端信号的频谱 $X(\omega)$,对于频点 ω 的衰落系数为

$$\sum_i \alpha_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau_i}$$

若频点 ω 变化,一般对应的衰落系数跟着变化。可以看到,各径的相位旋转对于不同频点形成不同夹角,再叠加后的整体效果可能相涨或者相消。如果在某一个频带内整体效果近似相等,例如都是相涨或者相消,称该频带处于相干带宽内。

更具体地,直观上就可以想象得到,当两个频点 ω_1 和 ω_2 隔得很近时,它们对应的衰落系数相关性强,即存在 $\Delta\omega'$,使得差值

$$\sum_i \alpha_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2\tau_i} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\omega'}\left(\sum_i \alpha_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1\tau_i}\right)$$

很小。也即两个频点分别对应的衰落系数的模近似相等,只有一个相位差 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\omega'}$,或者说只有一个夹角 $\Delta\omega'$。为了简单,下面我们仅以两径为例来做更深入的讨论。假设接收信号频谱为

$$\alpha_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau_1}X(\omega) + \alpha_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau_2}X(\omega)$$

其中,$\tau_2>\tau_1>0$。对于两个频点 $\omega_2>\omega_1$,ω_2 对应的两个衰落系数 $\alpha_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2\tau_1}$ 和 $\alpha_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2\tau_2}$ 分别是 ω_1 对应的两个衰落系数 $\alpha_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1\tau_1}$ 和 $\alpha_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1\tau_2}$ 的旋转,旋转角度分别是 $\tau_1(\omega_2-\omega_1)$ 和 $\tau_2(\omega_2-\omega_1)$,角度差为 $(\omega_2-\omega_1)(\tau_2-\tau_1)$。因为信道延迟不随频点变化,从而角度差仅由两个频点的间隔确定。显然,当两个旋转角度差很小时,即 $\omega_2-\omega_1$ 很小时,两个频点总的衰落系数近似也只有一个角度旋转的差别(相位差别);而当旋转角度差越来越大时,两个频点总的衰落系数之间的关系越来越没有规律,不论幅度还是相位都是如此。如图 13-6 所示,图中的 t_i 对应于这里说的 τ_i。

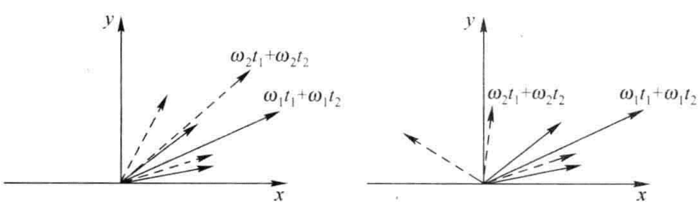


图 13-6　不同旋转角度差别

我们想知道,不同径的角度差别在哪个范围内,即两个频点的差在哪个范围内,能近似保持总的衰落系数仅有相位差别呢?从数学知识,可以了解到,当这个角度差别小于 π/4,甚至更严格点,要求小于 π/16 时(还可以更严格),可以近似保持这种规律。即要求

$$(\omega_2-\omega_1)(\tau_2-\tau_1)<\frac{\pi}{16}\Rightarrow\omega_2-\omega_1<\frac{\pi}{16(\tau_2-\tau_1)}$$

也就是说,任何宽度为$\frac{\pi}{16(\tau_2-\tau_1)}$的一段带宽上的频点都处于相干带宽内。将两径推广到多径类似,不论怎样,相干带宽的量级大概为时延扩展的倒数。

性质 13-1 无线信道相干带宽的量级为该信道时延扩展的倒数的量级。

比如,LTE 里采用的经典城区(TU)信道模型里,时延扩展大概有几微秒(μs),以 1 μs 计算,相干带宽量级为$\frac{1}{1\times10^{-6}}=10^6$ Hz,即 1000 kHz,加上一些系数调整,相干带宽大概为几百 kHz 的样子。

3. 相干带宽无传递性

注意,相干带宽是近似相等的一段频率宽度,只要满足这个宽度就是相干带宽,没有位置的概念。特别重要的是,相干带宽没有传递性。即不能说频率区间$[\omega_0,\omega_0+\Delta\omega]$处于相干带宽,而频率区间$[\omega_0+\Delta\omega_1,\omega_0+\Delta\omega_2]$也处于相干带宽,其中

$$\omega_0<\omega_0+\Delta\omega_1<\omega_0+\Delta\omega<\omega_0+\Delta\omega_2$$

那么就得出$[\omega_0,\omega_0+\Delta\omega_2]$也处于相干带宽。这是不对的,没有这样的逻辑,即没有传递性。

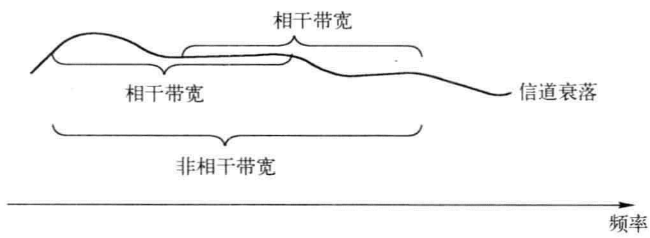


图 13-7 相干带宽无传递性

最后,如果信号带宽小于信道相干带宽,从频域来看,称信号经历的衰落为平衰落;如果信号带宽大于相干带宽,从频域来看,称信号经历的衰落为频率选择性衰落。

13.3.2 信道变化有多快——相干时间来抢答

1. 多普勒扩展

对于发射源发射的一个信号,每一条到达接收端的路径,由于相对运动,都有多普勒频移。而且,发射源到接收端的每一条路径上看到的相对运动可能不一样,从而每一条路径上的多普勒频移大小甚至方向也不一样。对于单径情况来说,不妨假设信号频谱上各频点对应的多普勒频移差别不大,接收端接收信号的频谱所在的位置相对于发射源信号频谱位置有一个平移,但频谱宽度近似是一样的。但对于多径,由于每条路径都有多普勒频移,并且大小和方向还可能不一样,而接收信号频谱是从多条路径接收到的信号的频谱的叠加,那么接收信号的频谱相

对于发射源信号频谱除了有位置变动外,可能比发射源频谱宽度更宽,这个就是多普勒扩展,如图 13-8 所示,其数量为最大多普勒频移与最小多普勒频移的差值。

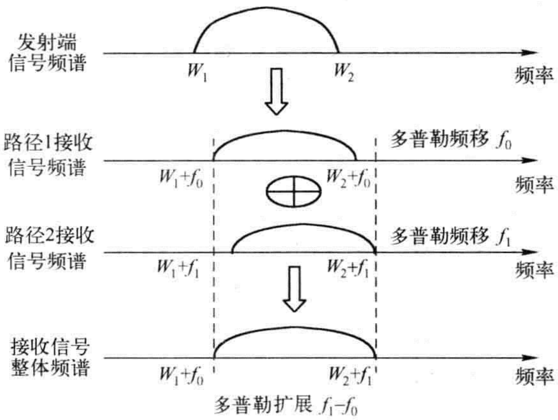


图 13-8　多普勒扩展

2. 相干时间

当电磁波 $x(t)$ 持续时间足够短时,我们有理由相信接收端接收到的一条路径信号 $\alpha_i(t)x(t-\tau_i(t))$ 中,$\alpha_i(t)$、$\tau_i(t)$ 就是基本不变的。例如,$x(t)=\delta(t)$。我们感兴趣的是“足够短”的持续时间最长能有多长?之所以想问这个问题,是因为不管是从实现还是性能等方面考虑,例如后续会讲到的码间串扰,或者频谱利用(注意持续时间越短占的频谱越宽),能长还是长点好。最长的持续时间就是相干时间。从信道的冲激响应来看,发射端处于相干时间里的两个冲激信号,经过信道后的信道响应近似完全一样,包括每条径的功率对应相等,时延也对应相等。如图 13-9 所示,其中实线对应的冲激响应和虚线对应的冲激响应完全一样,只有时延差别。

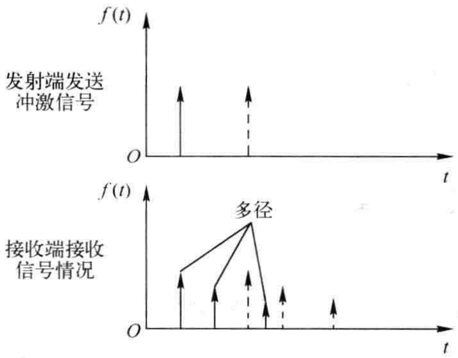


图 13-9　从冲激响应看相干时间

必须指出的是,相干时间是指从每一条路径来看是近似线性时不变系统并且是线性变换(即一条径来看接收信号和发射信号近似只有一个幅度系数差别和延迟),从所有径的叠加整体来看也是近似线性时不变系统,但不是线性变换,即严格意义上不可能存在 k、τ,使得

$$\sum_i \alpha_i x(t-\tau_i) = kx(t-\tau)$$

大多数情况下,我们希望一个信号单元(或者称为码元)是处于相干时间内的,因为这样对接收信号的处理相对简单。

我们开始讨论相干时间有多长。首先,$\alpha_i(t)$就不用考虑了,一般系统的信号带宽都有至少几 kHz 或者几十 kHz,那么信号时间长度最多为毫秒级别。对于毫秒级别,不管环境怎么变化,天气怎么变化,或者超高速移动,也应该没什么多大变化吧。也就是说,保证 $\alpha_i(t)$不变比较容易。接下来,和讨论相干带宽类似的思路,可以知道,相干时间大抵上和多普勒扩展成倒数关系。

性质 13-1 无线信道相干时间的量级为该信道多普勒扩展的倒数的量级。

最后需要说明的是,与相干带宽一样,相干时间是信道衰落近似相等的一段时间长度,只要满足这个长度就是相干时间,没有位置的概念。特别重要的是,相干时间也没有传递性。如果信号持续时间小于信道相干时间,从时域来看,称信号经历的衰落为慢衰落;如果信号持续时间大于相干时间,从时域来看,称信号经历的衰落为快衰落,也称为时间选择性衰落。

13.3.3 时频同步与时频相干性

上面相干时间和相干带宽的讨论关注的是信道本身对信号时间上的波形和频率上的波形的作用效果,而不考虑这一段波形在接收端看来是被放在哪一段时间上或哪一段频率上。假设发射端信号为

$$x(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0+T$$

假设信道的作用为

$$x(t) \Rightarrow \alpha x(t-\tau)$$

即接收信号与发射信号波形一样,但在不同的时间段上,发射端是在$[t_0,t_0+T]$上,而接收端是在$[t_0+\tau,t_0+T+\tau]$上,即有延迟。如果接收端不知道信号到达接收机落在时间段$[t_0+\tau,t_0+T+\tau]$上,接收机偏要在$[t_0,t_0+T]$时间段上接收信号,而其他时间关掉,那把接收到的信号和发射端的信号波形比,怎么也不会是线性衰落关系。也就是说,接收机必须想办法先知道信号到达是什么时候,否则本来是相干时间的都被变成非相干时间效果了。接收机想办法知道信号到达是什么时候的过程就是时间同步。同理,接收机也需要频率同步,否则本来相干带宽都被变成非相干带宽效果了。

13.4 无线传输基带通用模型

13.4.1 频带信号的基带表示——I/Q 调制风云再起

现实中的信号都是实信号,包括发射的是实信号,接收的也是实信号,信道衰落也是实数的,为什么我们经常看到在通信里都是处理复数呢?比如,信号是 QPSK、16QAM 等,衰落系数也是复数,甚至噪声也是复高斯噪声。

根据希尔伯特(Hilbert)变换性质可知,对于任何窄带实信号 $x(t)$,假设其频谱在

$$\left[-f_c-\frac{W}{2},-f_c+\frac{W}{2}\right]\cup\left[f_c-\frac{W}{2},f_c+\frac{W}{2}\right]$$

上,那么 $x(t)$可以写成

$$x(t)=\text{Real}\{x_b(t)e^{j2\pi f_c t}\}=\text{Real}\{x_b(t)\}\cos(2\pi f_c t)-\text{Imag}\{x_b(t)\}\sin(2\pi f_c t) \quad (13\text{-}9)$$

其中 $x_b(t)$ 是复信号，通常称 $x_b(t)$ 为 $x(t)$ 的复基带等价信号，且是唯一的。注意，实际通信系统中，载频只是一个载体，一般情况它并不携带信息，那就是说，我们不可能因为载频不同，而分别设计不同的信号以及系统。式(13-9)引出的复基带表示的好处是，可以把载频的作用分离出来，且变成一个机械的步骤。不管载频 f_c 在哪儿，只要设计好 $x_b(t)$，再发送 $\text{Real}\{x_b(t)e^{j2\pi f_c t}\}$ 就行了。

但是现在的问题是，我们前面讨论无线信道时，信道都是作用在载频实信号 $x(t)$ 上的，那么，我们就想怎么把整个系统都简化成所谓的基带系统，即发射端的基带信号 $x_b(t)$ 和接收到的信号对应的基带信号 $y_b(t)$ 之间是什么关系。

首先，接收端收到的真实信号 $y(t)$ 为

$$y(t)=\sum_i \alpha_i(t)x(t-\tau_i(t))=\sum_i \alpha_i(t)\text{Real}\{x_b[t-\tau_i(t)]e^{j2\pi f_c[t-\tau_i(t)]}\} \quad (13\text{-}10)$$

其对应的基带等价信号为 $y_b(t)$，使得

$$y(t)=\text{Real}\{y_b(t)e^{j2\pi f_c t}\} \quad (13\text{-}11)$$

则有

$$\text{Real}\{y_b(t)e^{j2\pi f_c t}\}=\sum_i \alpha_i(t)\text{Real}\{x_b[t-\tau_i(t)]e^{j2\pi f_c[t-\tau_i(t)]}\} \quad (13\text{-}12)$$

虽然实际并没有发送，但我们假设信号 $\text{Imag}\{x_b(t)e^{j2\pi f_c t}\}$ 也被发送了，因为经历的是同样的信道，和信号 $\text{Real}\{x_b(t)e^{j2\pi f_c t}\}$ 对比知，接收端必然对应收到

$$\sum_i \alpha_i(t)\text{Imag}\{x_b[t-\tau_i(t)]e^{j2\pi f_c[t-\tau_i(t)]}\} \quad (13\text{-}13)$$

可以证明

$$\text{Imag}\{y_b(t)e^{j2\pi f_c t}\}=\sum_i \alpha_i(t)\text{Imag}\{x_b[t-\tau_i(t)]e^{j2\pi f_c[t-\tau_i(t)]}\} \quad (13\text{-}14)$$

将式(13-12)和(13-14)联合起来看，可以知道

$$y_b(t)=\sum_i [\alpha_i(t)e^{-j2\pi f_c \tau_i(t)}]x_b(t-\tau_i(t)) \quad (13\text{-}15)$$

我们从相反的角度把上面的思想利用起来，那么整个流程就是：首先拿两个信号 $x_I(t)$ 和 $x_Q(t)$，即得到所谓的发射端基带信号

$$x_b(t)=x_I(t)+jx_Q(t)$$

然后发送信号

$$x_I(t)\cos(2\pi f_c t)-x_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$$

即采用 I/Q 调制方法调制。假设接收到的信号为 $y(t)$，写出 $y(t)$ 的基带等价信号 $y_b(t)$，其实就是 I/Q 调制的解调过程，解调后分别得到 I 路信号 $y_I(t)$ 和 Q 路信号 $y_Q(t)$，则所谓 $y(t)$ 的基带等价信号就是

$$y_b(t)=y_I(t)+jy_Q(t) \quad (13\text{-}16)$$

从上面的讨论，我们知道 I/Q 调制系统从基带信号来看，接收信号和发射信号满足

$$y_b(t)=\sum_i \alpha_i^{(b)}(t)x_b(t-\tau_i(t)) \quad (13\text{-}17)$$

其中，$\alpha_i^{(b)}(t)=\alpha_i(t)e^{-j2\pi f_c \tau_i(t)}$，为每条路径衰落的基带等价形式。从而，在接下来的计算处理上就可以采用复数相关理论了。

13.4.2 无线信道的基带特征——斩断载频的枷锁

我们现在假设信号 $x(t)$ 在相干时间内来考虑,即 $\alpha_i(t)$ 和 $\tau_i(t)$ 都是常数,则

$$x(t) \Rightarrow \sum_i \alpha_i x(t-\tau_i) = y(t) \tag{13-18}$$

则,复基带等价表示为

$$y_{\mathrm{b}}(t) = \sum_i \alpha_i \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\tau_i f_{\mathrm{c}}} x_{\mathrm{b}}(t-\tau_i) = \sum_i \alpha_i^{(b)} x_{\mathrm{b}}(t-\tau_i) \tag{13-19}$$

可以看到 $\alpha_i^{(b)} = \alpha_i \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\tau_i f_{\mathrm{c}}}$仍然是(复)常数,说明如果实际发送的射频信号(带通信号)在相干时间内,基带来看仍然在相干时间内。相干带宽的讨论类似,如果射频信号在相干带宽内,基带来看也在相干带宽内。这就说明,任何情形,我们不用管实际系统里射频信号是发生在900 MHz还是2.4 GHz,我们都可以统一从基带来讨论信号的发送接收情况,因为基带的特性完全和带通特性保持一致。也就是说,设计一个信号(或信号发送方法),从基带讨论如果具有我们想要的特性,那么把这个信号(或发送方法)先转换成射频,经过信道,接收端把射频再转换成基带,这样绕一圈回来,我们想要的特性还在。这性质太棒了!否则,若基带特性和带通特性不一样,那我们的无线通信研究和设计就麻烦大了,900 MHz 的系统是一套理论,2.4 GHz 的系统是一套理论,不同载频设计出来的系统完全不可参考和重用。

13.4.3 信号追尾如何处理——码间串扰

1. 码间串扰

如果只发一个信号 $x_1(t)$,那么接收机可以一直开着,收到的全是 $x_1(t)$ 相关的信号;但若连续发的多个信号,接收机那边也为接收时间划分成时间窗,每一个窗接收到的信号对应认为是发射端某个信号的接收信号,然后分别独立处理每一个时间窗。假设发射端不间断地发射信号 $x_1(t), x_2(t), \cdots,$,每个信号持续时间长度为 T,会怎么样?

不妨假设接收端和发射信号的第一条到达径同步上了,并按第一到达径作为参考时间来以 T 为长度划分时间窗。则由于多径,我们看到

- 相对于接收机认为的对应于 $x_1(t)$ 的时间窗来说,信号 $x_1(t)$ 有很多没有接收完全,即在接收机认为的时间窗之外。
- 接收机认为的信号 $x_2(t)$ 的时间窗里有信号 $x_1(t)$ 某些路径在 $x_1(t)$ 对应的时间窗里不能接收完的信号。

但是,接收机是独立处理时间窗的,所谓独立处理就是接收机在解调 $x_2(t)$ 时,不会想着 $x_1(t)$ 的影响,所有 $x_2(t)$ 之外的都当干扰噪声处理。这样的话就有先发的信号对后发的信号的干扰,这就是所谓码间干扰(Inter-Symbol Interference,ISI),如图 13-10 所示。再强调一遍,码间干扰是由于无线传播多径引起的,通常也把多径信道称为 ISI 信道。

当然,你可以说,我就要把 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 联合起来解调,比如联合最大似然,这样的话相互干扰会被考虑进去。没问题,你可以这样做。但这种情况就相当于每两个信号划分为一个处理窗了,两个这样的处理窗之间还是有码间干扰。也就是说码间干扰是一个相对的概念,不是绝对的,取决于接收端怎么操作。接收端把每一个独立处理的时间窗划分得越长,码间干扰的影响会被相应减弱一些,但是接收端每一个窗内的处理就会更复杂。最极端的情况就是一

个无穷长的处理窗,因为整体上看就是一个码,当然就没有码间干扰了。当然,在每个窗比较长的情况,每个窗内信号的结构好好设计一下,也许能简化一些处理复杂度,比如 CDMA、OFDMA 等,我们后续再具体讲。

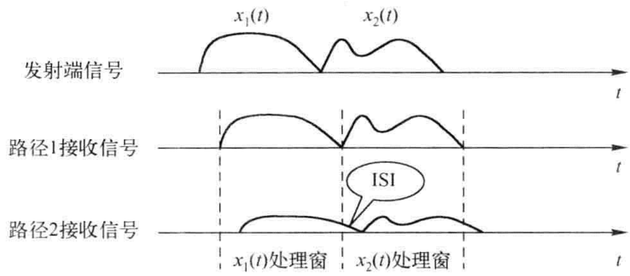


图 13-10　多径造成码间干扰

多径会引起码间干扰,怎么处理码间干扰呢?这里我们先举例讲解一下怎么尽量避免码间干扰,对于码间干扰已经存在的情况下对其处理方法稍后再讲。

2. 处理 ISI 考虑之间断发送

防止车辆追尾最自然的方法就是严格保证前后车辆之间的距离,这里类似,我们先看最自然的方法,即相邻两个信号间断地发,发完 $x_1(t)$,歇一会儿,再发 $x_2(t)$,依次类推,歇多长时间呢?要使得 $x_1(t)$落到 $x_2(t)$的时间窗里的信号足够小,对 $x_2(t)$的解调影响不大。直观估计,至少得歇时延扩展那么长时间吧!但时延扩展是多长呢?严格来说,时延扩展本身可能为无穷大,但是我们只把功率足够大的那些路径形成的时延扩展作为有效的时延扩展。至于歇的那段时间是真的什么都不干,还是可以干点什么,我们后面再讲。

3. 处理 ISI 考虑之码元身材选择

间断发送的方法理论上能完全消除 ISI。除此之外,还有其他办法来尽量减小 ISI 的影响。比如,我们可以设计信号码元的时候选一些“身材”比较好的信号作为码元,这些码元的特征是:能量集中在整个码元时间的中间部分,而两端,特别是尾巴部分能量尽量小,呈衰减状态。例如,信号波形像高斯分布或者滚降信号等。这样的话,即使有 ISI,前一个信号落入后一个信号的部分能量很小,ISI 的影响较小。这就像一辆大卡车追尾一辆小轿车一样,大卡车几乎无损伤。如果选的码元信号“身材”不好,比如,整个码元时间都一样“胖”,甚至两端比中间还“胖”,那 ISI 就明显要大得多。后续实际应用中,我们会把这些想法考虑进去。

13.4.4　基带通用离散系统模型一统江湖

上面几节的讨论我们都是直接用模拟信号来描述的,但在数字化时代,数字通信应用越来越广泛,模拟通信相对应用较少了。从数字通信系统来说,不管你怎么设计,采用什么调制方法,复用思想等,数据的解调都是以采样点为基础的,所以我们只要研究清楚采样点经过信道怎么变化就行了。那也就要求我们先建立基于采样点的离散系统传播模型,下面我们就看看相应的离散系统传播模型是什么样的。

先考虑相干时间里的信号传输模型,直接从基带信号入手说吧:

$$y_{\mathrm{b}}(t)=\sum_{i}\alpha_{i}x_{\mathrm{b}}(t-\tau_{i}) \tag{13-20}$$

其中基带衰落 α_i 一般为复数。不妨设基带信号 $x_{\mathrm{b}}(t)$ 的(角频率)带宽为[$-W, W$],则 $x_{\mathrm{b}}(t)$ 的采样表示为

$$x_{\mathrm{b}}(t)=\sum_{m}x_{\mathrm{b}}\left[\frac{m\pi}{W}\right]\mathrm{sinc}\left(W\left(t-\frac{m\pi}{W}\right)\right) \tag{13-21}$$

代入式(13-20)有

$$y_{\mathrm{b}}(t)=\sum_{i}\alpha_{i}\sum_{m}x_{\mathrm{b}}\left[\frac{m\pi}{W}\right]\mathrm{sinc}\left(W\left(t-\tau_{i}-\frac{m\pi}{W}\right)\right) \tag{13-22}$$

以 π/W 为间隔对 $y_{\mathrm{b}}(t)$ 采样得到采样序列 $y[n]$,那么

$$\begin{aligned}y[n]&=y_{\mathrm{b}}\left[\frac{n\pi}{W}\right]=\sum_{i}\alpha_{i}\sum_{m}x_{\mathrm{b}}\left[\frac{m\pi}{W}\right]\mathrm{sinc}\left(W\left(\frac{n\pi}{W}-\tau_{i}-\frac{m\pi}{W}\right)\right)\\&=\sum_{m}x_{\mathrm{b}}\left[\frac{m\pi}{W}\right]\left\{\sum_{i}\alpha_{i}\mathrm{sinc}\left(W\left(\frac{n\pi}{W}-\tau_{i}-\frac{m\pi}{W}\right)\right)\right\}\\&=\sum_{l}x_{\mathrm{b}}\left[\frac{(n-l)\pi}{W}\right]\left\{\sum_{i}\alpha_{i}\mathrm{sinc}\left(W\left(\frac{l\pi}{W}-\tau_{i}\right)\right)\right\}\end{aligned} \tag{13-23}$$

记发射信号 $x_{\mathrm{b}}\left(\frac{(n-l)\pi}{W}\right)=x[n-l]$,即第 $n-l$ 个采样点的值,再记

$$h[l]=\sum_{i}\alpha_{i}\mathrm{sinc}\left(W\left(\frac{l\pi}{W}-\tau_{i}\right)\right) \tag{13-24}$$

那么,整个离散传播模型为

$$y[n]=\sum x[n-l]h[l] \tag{13-25}$$

该离散传播模型如图 13-11 示意,其中“ * ”或“ * * ”为系数的占位符,具体取值不影响讨论,暂不追究。

从式(13-25)所示的离散模型以及图 13-11,我们可以看到,因为有多径传播,接收端的第 n 个采样点 $y[n]$,除了包含有真正想要的 $x[n]$ 的分量外,还包含比 $x[n]$ 先发送的点的分量,这个也是码间串扰在离散模型下的体现。而对于所有路径,$x[n-l]$ 对 $y[n]$ 贡献的分量为 $h[l]x[n-l]$,其中 $h[l]$ 是所有径合成而来的衰落系数,一般被称为信道抽头(Tap)或者信道的有效径。

实际上,只要发射端发的信号是

$$x(x)=\sum_{i=0}^{N-1}x[i]g(t-iT_{\mathrm{s}}) \tag{13-26}$$

其中,$g(t)$ 可以是任意波形,比如 $\mathrm{sinc}(t)$、$\mathrm{rect}(t)$、$\delta(t)$ 等,接收端相应收到的 N 个值

$$y[0],y[1],\cdots,y[N-1]$$

总是有

$$y[n]=\sum_{l\geqslant 0}x[n-l]h[l] \tag{13-27}$$

不过,对于相同的无线信道(每径延迟和衰落相同),对于固定的符号间隔 T_{s},按不同的信号波形 $g(t)$ 发送 $x[n]$,抽头 $h[l]$ 除了有信道衰落本身的因素外,一般还和波形 $g(t)$ 相关,如式(13-24)中的 sinc 项。又或者图 13-12 中 b_i 或 b'_i 对抽头的贡献,图 13-12a 中每个信道抽头 $h[l]$ 由多径衰落系数 α_i 和波形相关的系数 b_i 确定,图 13-12b 类似。

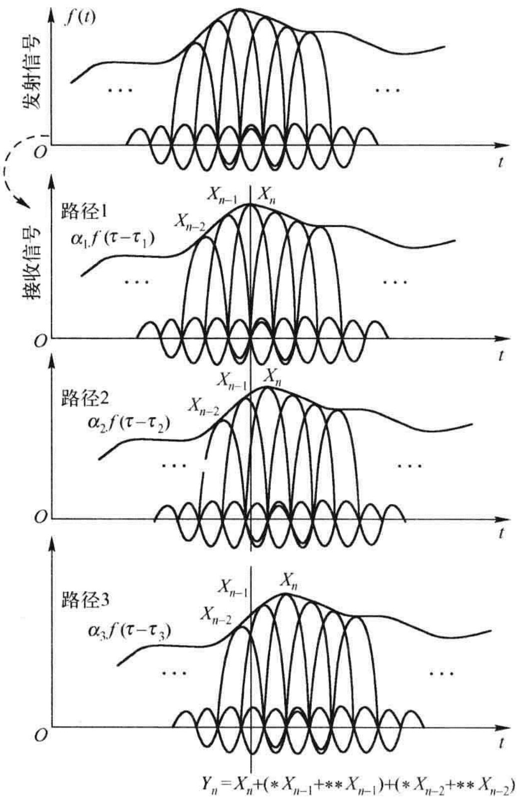


图 13-11　无线信道传播离散模型

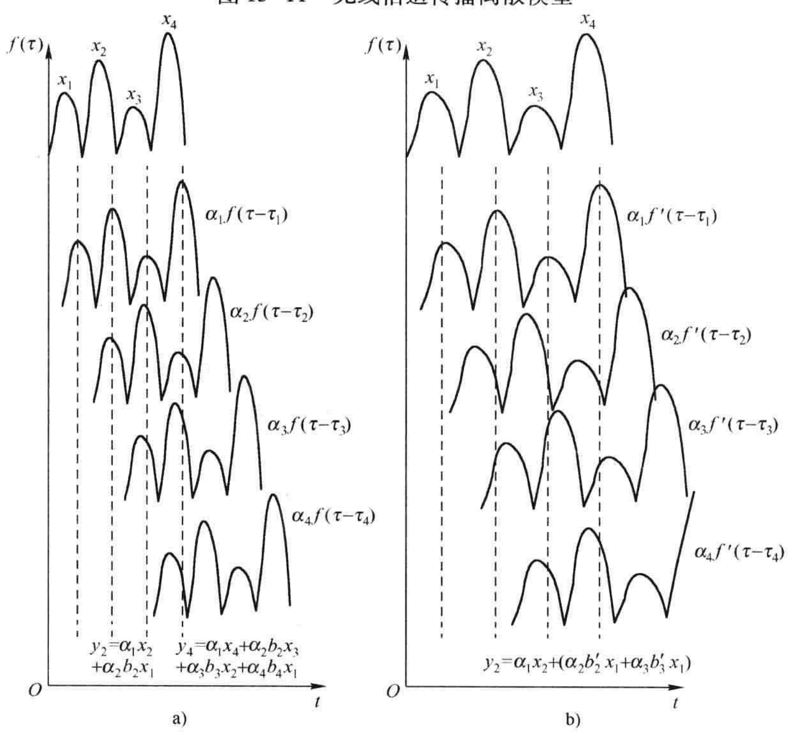


图 13-12　信道抽头与采样间隔

提醒

相同的无线信道(每径延迟和衰落相同)下,对于固定的符号间隔 T_s,按不同的信号波形 $g(t)$ 发送 $x[n]$,相同的采样位置,信道抽头 $h[l]$ 可能不同。

说到波形,从图 13-12 中还可以看到,如果接收端采样点有偏差(图中虚线发生偏移),其实也会改变 b_i 或 b'_i,进而会改变抽头。

提醒

相同的无线信道(每径延迟和衰落相同)下,对于固定的符号间隔 T_s,按波形 $g(t)$ 发送 $x[n]$,采样位置偏移,信道抽头 $h[l]$ 可能不同。

如果要把波形的影响去掉,我们可以考虑那些在符号时间内为常数的波形,比如 Rect(t)、$\delta(t)$ 等。

另一方面,对于相同的无线信道(每径延迟和衰落相同),除了波形对最后表现出来的信道抽头有影响外,符号时间间隔对信道抽头也有影响。比如图 13-12 中,按左边的以较小的符号间隔发送数据 $x[i]$,接收端 $y[i]$ 表达式里的每个抽头只由一条径确定,

$$h_0 = \alpha_1,\ h_1 = \alpha_2 b_2,\ h_2 = \alpha_3 b_3,\ h_3 = \alpha_4 b_4$$

而按右边的以较大的符号间隔发送数据 $x[i]$,接收端 $y[i]$ 表达式里的每个抽头一般由至少两条径确定,

$$h_0 = \alpha_1,\ h_1 = \alpha_2 b'_2 + \alpha_3 b'_3, \cdots$$

通常我们说的符号时间间隔最后都是表现成采样间隔,也就是说采样间隔不同,最后呈现出来的信道抽头 h_l 就不同。

提醒

相同的无线信道(每径延迟和衰落相同)下,符号间隔长度不同或者说采样间隔不同,信道抽头 $h[l]$ 可能不同。

同时,我们还可以看到,信道抽头 h_l 的值和抽头个数与信道的多径个数和每径衰落系数之间的关系。我们假想图 13-12 里的基本波形是方波 Rect(t),即所有的 $b_i = b'_i = 1$ 来说明,如果采样间隔足够小(左图),那么此时每个抽头的值就分别和每条径的衰落系数相等,抽头个数也等于多径的条数;也就是说通过抽头能清楚地知道信道本身真实的多径个数和衰落情况,即对信道多径衰落的分辨率高。如果采样间隔比较大(右图),那么抽头个数会少于多径的条数,并且每个抽头的值是多条径衰落的叠加;此时通过抽头我们并不清楚信道本身真实的多径衰落情况,即对信道多径衰落的分辨率低;显然,采样间隔越大,对多径衰落的分辨率就越低。

我们再看个例子,如图 13-13 里,假设发射端发射的序列 x_i 为

$$[x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots]$$

采用的波形为冲激信号 $\delta(t)$,即发射的信号为

$$\sum_i x_i \delta(t - iT_s) = x_0 \delta(t) + 0 = \delta(t)$$

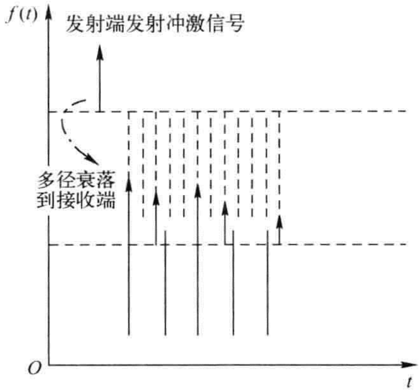


图 13–13　信道冲激响应、信道抽头与采样间隔

接收端收到的信号

$$y(t) = \sum_i \alpha_i \delta(t - \tau_i)$$

其中，α_i 表示延迟为 τ_i 的径的衰落系数。如果间隔 T_s 足够小，对应于图里虚线采样情形，那么接收端按 T_s 间隔对接收信号 $y(t)$ 采样得到的采样点序列 $y[i]$，满足

$$y[i] = h_i x_0 = h_i$$

其中，信道抽头 h_i 要么为 0，要么等于某条径的衰落系数 α_j，并且每条径的衰落系数 α_j 一定能对应到某个信道抽头 h_i。当然对于信道抽头等于 0 的情况，我们也可以想象成对应于某条径，只不过该条径衰落得太狠了，衰落得一点儿都不剩了。很显然，采样间隔足够小的这种情况信道抽头真实地表达了信道多径衰落，即分辨率很高。如果间隔 T_s 太大，对应于图里实线采样情形，那么信道抽头 h_i 要么为 0，要么等于某条径的衰落系数 α_j，但是有很多径被漏掉了。很显然，采样间隔大的这种情况信道抽头不能真实地表达信道多径衰落，即分辨率低。

在相干时间的假设下，虽然在一个信号持续的时间内，我们认为 h_l 是不变的，但在不同信号时间里，一般来说 h_l 是变化的，这个变化到底是按什么规律变化完全取决于周围环境。通常为了方便理论分析，并且实际环境也有很大可能存在的两个变化模型为瑞利衰落和莱斯衰落。

（1）瑞利衰落

如果假设当前无线信道有足够多的径，并且所有径独立分布，根据中心极限定理，那么所有径合成而来的衰落系数 h_l 将收敛于循环复随机变量 $\mathcal{CN}(0,p_l^2)$，即 h_l 的实部和虚部分别按照中心极限定理收敛到正态分布 $\mathcal{N}\left(0,\dfrac{p_l^2}{2}\right)$。那么，该衰落的幅度 $|h_l|^2$ 的概率分布为瑞利（Rayleigh）分布，瑞利分布也即为 2 阶的 χ^2（chi-square）分布。相应地，该信道称为瑞利衰落信道。

（2）莱斯衰落

和瑞利信道不一样，如果存在一条足够强的直射径（视距衰落），同时包含足够多独立的径，那么信道衰落可以建模成两部分

$$h_l = \sqrt{\frac{k}{k+1}} p_l^2 e^{j\theta} + \sqrt{\frac{k}{k+1}} \mathcal{CN}(0,p_l^2)$$

其幅度 $|h_l|^2$ 满足的概率分布称为莱斯（Rician）分布，这样的信道称为莱斯信道。可以看到，若 k 远小于 1，那么第一个分量几乎为 0，从而该衰落退化成瑞利分布；若 k 远大于 1，那么第二

个分量几乎为0,从而该衰落退化成确定不变的衰落。

暂时来看,通信的目的就是想办法从接收序列 $y[n]$ 中得到序列 $x[n]$,当然实际系统中还有噪声和可能的干扰,这个得到 $x[n]$ 的估计值的过程一般也被称为均衡。显然,如果是没有码间串扰,即单抽头情形,均衡比较简单;如果有码间串扰,均衡看起来要复杂得多。具体的均衡方法和我们后续讲的其他模型的均衡也相关,这里暂时把问题提出来,解决方法就暂时不讲了,到时统一讲解。

上一节的讨论,我们是假设信号处于相干时间来讨论的。假设信道有 L 个抽头 $h_l(l=0,\cdots,L-1)$。那么,处于相干时间的信号,其对应的频率带宽上是什么样的情况?

我们前面讲 DFT 时,就讲过,采样点的 DFT 也能反映出采样点对应的真实模拟信号频谱上的情况,只是一个伸缩变化。下面我们就从离散系统看看是否能和相干带宽扯上关系。假设信道只有一个抽头,$L=1$,即

$$x[n]\Rightarrow y[n]=hx[n]$$

那么 DFT 变到频域来看为

$$\mathrm{DFT}\{x[n]\}\Rightarrow h\mathrm{DFT}\{x[n]\}$$

可以看到整个频带上的衰落都为 h,即信号经历的衰落从频域来看是平衰落信道。注意,这并不表示相干带宽为无穷大,因为 h 本身其实可能是多条路径合成的,相干带宽还是有一个量,只是现在时延扩展远小于采样点间隔,即 $1/(2W)$,从而只体现成一条径。而相干带宽是时延扩展的倒数量级,信号带宽又是采样点间隔的倒数量级,所以此时相干带宽远大于信号 $x(t)$ 带宽 W 而已。也就是说,信号既处于相干时间,信号带宽又远小于相干带宽时,信号传播模型最简单。下面考虑哪些情况下,这两个条件容易同时满足呢?

三言两语

信号既处于相干时间,信号带宽又远小于相干带宽时,信号传播模型最简单。

如果时延扩展和一个采样点间隔可比拟,甚至超过一个采样点间隔,那么必存在多个抽头,则传播模型为

$$x[n]\Rightarrow \sum_i h_i x[n-i]$$

那么 DFT 变到频域来看为

$$\mathrm{DFT}\{x[n]\}\Rightarrow \mathrm{DFT}\{\sum_i h_i x[n-i]\}$$

一般来说,右边的接收信号不可能刚好也存在某个 h,使得右边接收信号可以写成

$$h\mathrm{DFT}\{x[n]\}$$

然而,应该可以写成

$$[\cdots,\hat{h}_i\mathrm{DFT}\{x[n]\}_i,\cdots]^{\mathrm{T}}$$

这里,$\mathrm{DFT}\{x[n]\}_i$ 表示序列 $x[n]$ 的 DFT 的第 i 个分量。其中,至少有两个 $\hat{h}_i$ 和 $\hat{h}_j$ 相差比较大,也就使得整个频带不再处于同一个相干带宽中了,即信号经历的衰落从频域来看是频选衰落信道。也就是说,若在时域有码间串扰(抽头多于1个),那么信号带宽必然大于相干带宽;反之,若信号带宽大于相干带宽,那么信号必存在码间串扰。

话说 $\hat{h}_i$ 有什么规律可循吗?比如和 h_i 是什么关系?或者有什么办法把 $\hat{h}_i$ 变得有规律可

循？这些问题稍后再讲。

13.4.5　推广及小结

推广到取消相干时间的限制，仍然考虑当前以采样点为基础的通信，整个模型可以表示如下：

$$y[m] = \sum_{l=0}^{L} h_l[m]x[m-l] \tag{13-28}$$

实际通信中，我们要具体设计整个通信系统，使得上面的表达式变换成我们希望的形式，使实现简单或者性能较好等。就如同我们在讨论信道抽头和采样间隔的关系时一样，同样的信道，有些信号可以经历频域平衰落信道，而有些信号经历的是频选衰落信道。例如，整个采样点序列处于相干时间内，即每条径都是平衰落，则 $h_l[m]$ 与 m 无关。又比如何设计的一个符号的时间足够长，可以把多径信道可能变成了单径(单抽头)信道，即 $L=1$，均衡比较简单。有了这个离散模型，接下来我们会基于这个模型来讨论不同情形的信道容量，如何设计信号发送接收方法以提高信号接收性能等。讨论这些系统指标反过来又会启发我们把思考系统设计成什么样子(信道模型长成什么样子)对通信是有好处的，总之，两个过程相辅相承。

到目前为止，我们讨论的模型都是基于单根发射天线、单根接收天线(单发单收)的系统，该模型也可以简单平移到多根发射天线和多根接收天线系统。对于多根发射天线和多根接收天线系统来说，每一对发射天线和接收天线组成的系统就是一个简单的单发单收系统，只不过同一个接收天线会接收到多根发射天线发射的信号的叠加而已。比如有两根发射天线和一根接收天线的系统，发射天线 1 发射的信号为 $x_1(t)$，对应的采样点序列为 $x_1[n]$，同时发射天线 2 发射的信号为 $x_2(t)$，对应的采样点序列为 $x_2[n]$。逻辑上来看，相对于 $x_1[n]$，接收天线接收到

$$y_1[n] = \sum_{l=0}^{L_1} h_1[l]x_1[n-l]$$

同样，逻辑上来看，相对于 $x_2[n]$，接收天线接收到

$$y_2[n] = \sum_{l=0}^{L_2} h_2[l]x_2[n-l]$$

但实际情况是，同一根接收天线是没有办法单独把这两个东西分离出来的，所以接收到的信号是这两个的叠加，即

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

如何从接收到的 $y[n]$ 中同时得到 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$，是这个两发一收系统需要解决的问题。另一方面，两个发射天线发射的信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 可以是有关系的，也可以是没关系的，到底该不该有关系也是需要考虑的问题，其他多发多收系统类似。

第14章　各类具体信道模型分析

在本书第二、三部分引出 AWGN 信道后,我们已经讨论过 AWGN 信道下的信道容量,非平坦加性噪声下信道容量,以及 AWGN 下的信号检测(判决)方法。现在,我们建立了无线信道传播的基本模型,这个模型里除了有加性噪声外,还有(乘性)衰落,同样我们可以在这个模型下讨论类似的问题。

14.1　信道容量分析及应用

本节主要讨论一些相对简单的各类信道模型下的信道容量。首先回忆 AWGN 信道下的信道容量是什么?信道容量是用来刻画在信道里有不确定因素的情况下,对信号的最大区分能力,也即能无误传输的最高速率。香农容量公式给出了在发射端知道 AWGN 噪声功率情况下,最多能设计并发送多少个信号以使得到达接收端能被两两区分开。在 AWGN 信道下,唯一的不确定因素是瞬时噪声的取值。而在无线信道模型下,除了有不确定的噪声外,还有可能有其他不确定因素,比如信道乘性衰落。那么此时信道容量的定义并不像 AWGN 下一样可以给出一个唯一的标准定义,取决于系统如何处理这些多出来的不确定因素。下面我们就分别具体展开讨论。

14.1.1　固定慢衰落信道——存银行固定收益

首先看固定慢衰落信道的信道容量。固定慢衰落信道表示衰落在所有信号时间内是不变的,且为收发两端都知道的,即收发两端都知道信道传播模型为

$$y = hx + w$$

其中,h 为已知常数(固定收益),信号 x 的平均功率为 P,$w \sim CN(0,\sigma^2)$。首先需要提醒的是,不管发射端以及信道怎么样,最后区分信号还是接收端的事儿。

具体来说,该通信过程可以分为两个阶段,第一个阶段是信号到达接收端但叠加噪声前,此时有

$$x \to y' = hx \tag{14-1}$$

这个阶段是一个无失真通信系统,即发射端不论发什么信号,接收端都能区分出来;也即发射端能区分多少个不同信号 x,接收端就能区分多少个不同信号 $y' = hx$。我们只需要看第二阶段对 y'的区分度,第二个阶段是叠加噪声

$$y' = hx \to y = y' + w \tag{14-2}$$

这是一个最普通的 AWGN 信道的容量问题,其信道容量取决于 y'的功率和噪声 w 的功率,即该第二阶段确定的信道容量是

$$\log_2\left(1 + \frac{P(y')}{\sigma^2}\right) = \log_2\left(1 + \frac{P[hx]}{\sigma^2}\right) = \log_2\left(1 + \frac{|h|^2 P}{\sigma^2}\right) \tag{14-3}$$

把两个阶段串起来看，要达到这个信道容量，只要发射端先按照信号功率为 $|h|^2P$，噪声功率为 σ^2 的复高斯信道把最大个数能区分的信号 y' 全部挑出来，然后再分别乘以系数 $1/h$ 就是最后发射端真正发的信号，即发射端最后发信号 $\frac{1}{h}y'$ 即可。我们把发射端信号的功率和噪声功率的比值称为原始信噪比，这里原始信噪比就是 P/σ^2；把接收端信号的功率和噪声功率的比值称为接收信噪比，这里接收信噪比是 $|h|^2P/\sigma^2$，可以看到乘性衰落使得在收发两端看到的信噪比不一样。

14.1.2 随机慢衰落信道——一锤子买卖

随机慢衰落信道也是慢衰落信道，但是发射端不知道衰落系数，即对于发射端来说，信道衰落系数是随机的。也就是说发射端知道信道是不随时间变化的，其模型为

$$y = hx + w$$

其中，发射端不能提前知道 h 的具体取值。回顾一下，信道容量指的是无误通信的最高速率（最高区分能力）。所以，该信道下可以说信道容量为 0，因为无论发射端按哪个速率来设计，实际的信道都可能不能无误支持该速率。除非发射端刚好有如神助，总能按照实际的 h 来设计的信号，如固定慢衰落信道一样。也就是说，按任何速率 R 来设计的信号传输方式，总是存在一个非 0 概率使得 R 超过了实际信道容量，我们把这个概率定义为溢出概率（Outage Probability），有些书称为中断概率，用 $P_{\text{out}}(R)$ 来表示

$$P_{\text{out}}(R) = \text{prob}\left\{\log_2\left(1 + \frac{P[hx]}{\sigma^2}\right) < R\right\}$$

显然，R 越小，能支持该速率的信道情况越多，则溢出概率越小。也可以反过来思考，假设系统能容忍一定程度的溢出概率 ϵ，即能容忍一定概率信道容量不支持实际设计的速率，那么速率应该设计成多少，才能够保证对应的溢出概率不超过 ϵ 呢？定义这个值为溢出容量 $C(\epsilon)$，有些书称为中断容量，则

$$C(\epsilon) = P_{\text{out}}^{-1}(\epsilon)$$

其中，$P_{\text{out}}^{-1}(x)$ 是溢出函数 $P_{\text{out}}(x)$ 的逆函数。

14.1.3 快衰落信道——长线操作

假设快衰落信道的通信模型为

$$y = hx + w$$

其中，信道衰落系数 h 是每个符号时刻都独立随机变化的。发射端不知道每个时刻具体信道衰落系数是多少，只知道 h 是时时变化的，以及 h 变化满足的概率分布（比如瑞利分布）。注意这和上面随机慢衰落信道的区别在于，随机慢衰落信道就一锤子买卖，虽然是随机的，但一旦确定了则所有时刻都不会发生变化。

我们在第三部分讲了两种获得信道容量的方法。一种是像 AWGN 信道的几何模型一样把整个系统非常直观地建模以看清楚信道容量；另一种是通过互信息计算。利用互信息计算的好处是可以不用关心具体的通信流程，只需要看发射信号，以及发射信号到接收信号的转移概率就可以了，至于这个信道是 AWGN，还是加性噪声和乘性噪声，没什么关系，计算方法都一样。坏处是，这个信道容量和具体达到这个信道容量的系统设计很难像 AWGN 一样清晰浮现出来。

这里我们可以通过计算互信息来得到信道容量，具体计算过程见附录 E，最后得到的容量为

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{P_x:E[\ |x|^2]\leqslant P} I[x;y,h] \\
&= E_h\left\{\log_2\left(1+\frac{|h|^2P}{\sigma^2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{14-4}
$$

那么，可以看到快衰落信道和随机慢衰落信道还是有差别的，快衰落信道能够遍历所有信道衰落情况，最后得到确定的非 0 信道容量，这个信道容量一般称为遍历容量。就像股市长线操作一样，涨涨跌跌都经历过，最后还能有一定的收益。

14.1.4 单发多收(SIMO)之最大比合并

前面的讨论都是基于发射端只有一根天线、接收端只有一根天线(通常称为 SISO)的情形，接下来我们讨论一下简单的多天线模型。首先讨论发射端有一根天线，接收端有 r 根天线的情形。假设发射端发射的是 x，每根接收天线接收到的分别是

$$y_i = h_i x + w_i$$

其中，h_i 为发射天线到第 i 根接收天线的衰落系数，$w_i \sim CN(0,\sigma^2)$ 且相互独立。接下来，SIMO 信道模型下也可以像 SISO 信道模型下一样分为三种情况：固定慢衰落、随机慢衰落和快衰落。

1. 固定慢衰落 SIMO 信道

假设每个信道衰落系数 h_i 是固定的，且为收发两端所知。现在假设各天线中 $|h_0|$ 最大，那么只看 y_0，这就是一个简单的固定慢衰落信道，其容量为

$$\log_2\left(1+\frac{P[h_0 x]}{\sigma^2}\right)$$

能利用其他天线进一步提高容量吗？应该是可以的。这里，我们假设采用线性合并各接收天线的接收数据来看看有什么收获。所谓线性合并，就是各接收天线接收到的数据的加权求和。假设接收天线 i 的加权因子为 $\hat{h}_i$，则合并后得到

$$\sum \hat{h}_i y_i = <\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{h}}^*>x + <\boldsymbol{w},\hat{\boldsymbol{h}}^*,> \tag{14-5}$$

其中，

$$\hat{\boldsymbol{h}} = [\hat{h}_1,\cdots,\hat{h}_r],\ \boldsymbol{h} = [h_1,\cdots,h_r],\ \boldsymbol{w} = [w_1,\cdots,w_r]$$

式中，< * , * >表示向量间最常用内积运算。可以看到合并后等价得到一个 SISO 固定慢衰落信道。对于给定的合并系数 $\hat{h}_i$，合并后信道的接收 SNR 为

$$\mathrm{SNR} = \frac{P\{<\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{h}}^*>x\}}{P\{<\boldsymbol{w},\hat{\boldsymbol{h}}^*>\}} = \frac{|<\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{h}}^*>|^2\mathrm{P}}{|\hat{\boldsymbol{h}}^*|^2\sigma^2} \tag{14-6}$$

那么该合并方式能达到的信道容量就为

$$\log_2\left(1+\frac{|<\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{h}}^*>|^2 P}{|\hat{\boldsymbol{h}}^*|^2\sigma^2}\right)$$

显然，对于不同的合并系数，能确定的信道容量不同。那么请问当合并系数为哪种情况时，确

定的信道容量最大？显然只要合并后 SNR 最大就行了，即要

$$\frac{|<\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{h}}^*>|^2}{|\hat{\boldsymbol{h}}^*|^2}$$

最大化。根据 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\frac{|<\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{h}}^*>|^2}{|\hat{\boldsymbol{h}}^*|^2}\leqslant\frac{|\hat{\boldsymbol{h}}^*|^2|\boldsymbol{h}|^2}{|\hat{\boldsymbol{h}}^*|^2}=|\boldsymbol{h}|^2 \tag{14-7}$$

其中，当且仅当$\hat{\boldsymbol{h}}=k\boldsymbol{h}^*$时，达到最大值。也就是说按$\hat{\boldsymbol{h}}=k\boldsymbol{h}^*$来进行合并，能使得合并后 SNR 最大，这种合并方式称为最大比合并（Maximum Ratio Combining，MRC）。通常取 $k=1/|\boldsymbol{h}|$ 来归一化合并系数，即 $|\hat{\boldsymbol{h}}|=1$。那么可以看到，线性合并能达到的最大信道容量为

$$\log_2\left(1+\frac{|\boldsymbol{h}|^2P}{\sigma^2}\right)$$

把整个过程联系起来看，要达到该最大信道容量，首先发射端按照信号功率为 $|\boldsymbol{h}|^2P$、噪声功率为 σ^2 的 AWGN 把最大个数能相互区分的信号 y'都挑出来，然后实际发送信号 $y'/|\boldsymbol{h}|$ 即可（注意实际发送信号的功率为 $P\{y'\}/|\boldsymbol{h}|^2=P$）。请大家自行跟踪接下来按照归一化的 MRC 合并是什么样子。最后，显然接收天线数 r 越多，能达到的信道容量越大。

2. SIMO 随机慢衰落与快衰落

SIMO 随机慢衰落和 SISO 随机慢衰落类似，各个信道 h_i 也是一锤子买卖，但接收端不知道这“一锤子”砸在哪儿，所以也没有确定的信道容量，能讨论的也就是溢出容量和溢出概率。如果接收端仍然采用 MRC，那么很容易知道溢出概率 prob(R)为

$$\text{prob}(R)=\text{prob}\left\{\log_2\left(1+\frac{|\boldsymbol{h}|^2P}{\sigma^2}\right)<R\right\}$$

溢出容量就是溢出概率的逆函数。由于接收天线数越多，本来能达到的信道容量越大，那么对于给定的概率，接收天线数越多，对应的溢出容量越大。图 14-1 示意了不同接收天线数对应概率为 10% 的溢出容量，可以看到相同原始 SNR 时，接收天线数越多，溢出容量越大。

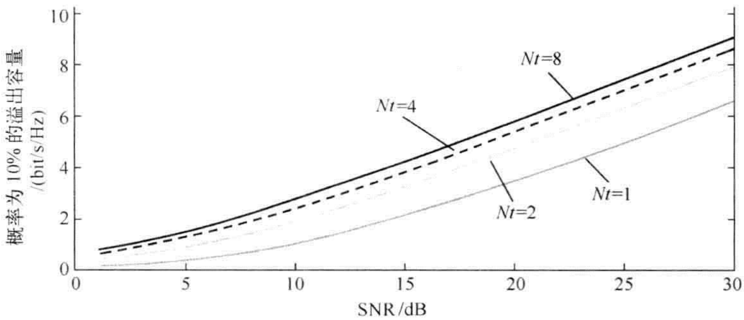


图 14-1　SIMO 场景里概率为 10% 时的溢出容量

同样，SIMO 快衰落和 SISO 快衰落类似，有确定的遍历容量，若接收端采用 MRC 合并，遍历容量具体为

$$E_{\boldsymbol{h}}\left\{\log_2\left(1+\frac{|\boldsymbol{h}|^2P}{\sigma^2}\right)\right\}$$

14.1.5 多发单收(MISO)之波束成型

发射端有 t 根天线,接收端只有1根天线的情形,通常简称为多发单收(MISO)。假设第 i 根发射天线上发的信号为 x_i,所有发射天线信号总功率为 $\sum_i P\{x_i\}=P$,第 i 根发射天线到接收天线的信道衰落系数为 h_i。记

$$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_t],\ \boldsymbol{h}=[h_1,\cdots,h_t]$$

那么,接收端接收到的信号为

$$y=\sum_i h_i x_i+w \tag{14-8}$$

其中,$w\sim CN(0,\sigma^2)$。与SISO、SIMO信道模型下一样,MISO也分为三种情况:固定慢衰落、随机慢衰落和快衰落。

MISO从两阶段模型来看会很清楚,第一阶段为

$$[x_1,x_2,\cdots,x_t]\to y'=h_1x_1+h_2x_2+\cdots+h_tx_t$$

第一个阶段的信号设计需要一一映射。也就是说,可能有多组向量 $[x_1,x_2,\cdots,x_t]$ 经过MISO信道后可以得到同一个 y',我们只取一组作为信号,否则没有办法相互区分。在如此设计下,只要第二阶段能区分出 y',就能唯一还原发射端信号 $[x_1,x_2,\cdots,x_t]$。第二阶段又是一个最简单的AWGN,

$$y'\to y=y'+w$$

这个阶段的容量只取决于 y' 的功率。要使容量最大,就要使 y' 的功率最大。同样,由于Cauchy-Schwarz不等式,

$$y'=h_1x_1+h_2x_2+\cdots+h_tx_t\leqslant\sqrt{\sum_i|h_i^*|^2}\sqrt{\sum_i|x_i|^2} \tag{14-9}$$

当且仅当 $[x_1,x_2,\cdots,x_t]=k[h_1^*,h_2^*,\cdots,h_t^*]$ 时,等号成立,即接收信号达到最大功率 $|\boldsymbol{h}|^2P$。接下来我们需要看看两个阶段是否能完美配合,即是否两个阶段要求的条件都能同时满足。真是天公作美,它们确实能完美配合,因为对于形如 $k[h_1^*,h_2^*,\cdots,h_t^*]$ 的不同 $[x_1,x_2,\cdots,x_t]$,必然在第一阶段得到的 y' 不同。那么整个过程来看,发射端首先按照信号功率为 $|\boldsymbol{h}|^2P$、噪声功率为 σ^2 的AWGN信道把最大个数能区分的信号 y' 全部挑出来,发射端发射天线 i 实际发送信号 $h_i^*y'/|\boldsymbol{h}|^2$ 即可,最后能达到MISO信道最大容量

$$\log_2\left(1+\frac{|\boldsymbol{h}|^2P}{\sigma^2}\right)$$

大家可以看到,天线个数相等的MISO信道的最大信道容量和SIMO信道的最大信道容量在信道衰落对应相等时是一样的。在SIMO里达到最大信道容量的合并方式称为MRC,而在MISO里达到最大信到容量的方式称为最佳波束成型(Beamforming)。关于MISO信道下的随机慢衰落和快衰落,与SIMO类似,不再讨论。

14.2 常用接收算法介绍

本节我们介绍常用的接收算法,即接收端通过接收信号来“猜测”发射端发的信号或其估计值的具体过程。在不考虑编码译码的情况下,通常所说的接收算法一般都可以看成均衡算法。

14.2.1 最大似然接收算法——直观又合理的想法

首先,我们看看两个直观而又合理的判断原则:在接收到的数据的条件下,这个接收数据最有可能是因为发射端发射哪个信号造成的,就认为发射端发射的是哪个信号,这个可能性称为后验概率,这个判断准则就是根据接收到的数据,判断成后验概率最大的发射端可能信号;或者看发射端发射哪个信号,经过信道后出现接收到数据的概率大,这个条件概率称为先验概率,也即选择经过信道最有可能得到当前观察值的候选信号。事实上,我们在本书第二部分已经讲过 AWGN 下的先验判决和后验概率判决,其中的先验概率判决也称为最大似然接收(Maximum Likelihood, ML)。这里我们以 SIMO 信道模型为例,再简单回顾一遍。假设 SIMO 信道模型里有 r 根接收天线,

$$y_i = h_i x + w_i$$

其中,h_i 为发射天线到接收天线 i 的信道衰落系数,各 $\omega_i \sim CN(0,\sigma^2)$ 且相互独立。假设接收端可以准确地知道各信道衰落系数,则根据 ML 准则,判决结果应该为

$$\begin{aligned} x &= \arg\max_{x_i} \mathrm{prob}(y_1,\cdots,y_r \mid x_i) \\ &= \arg\max_{x_i} \mathrm{prob}(y_1 \mid x_i)\cdots\mathrm{prob}(y_r \mid x_i) \\ &= \arg\max_{x_i} \mathrm{prob}(\omega_1 = y_1 - h_1 x_i)\cdots\mathrm{prob}(w_r = y_r - h_r x_i) \\ &= \arg\min_{x_i} \sum_{k=1}^{r} \mid y_k - h_k x_i \mid^2 \end{aligned} \tag{14-10}$$

其中,x_i 遍历所有发射端可能发送的信号。另一方面,把 SIMO 过程还是分成两个阶段来看,第一个阶段是无误传输

$$x \rightarrow h_i x$$

第二阶段分别叠加噪声 w_i,相当于在 AWGN 信道发射了 r 个信号 $h_i x$。那么,我们只需要采取就近判决(向量形式下)就相当于 ML 判决,这个和式(14-10)表示的结果一致。

对于离散信道模型,发射端发送 $\boldsymbol{x}=[x(0),\cdots,x(N-1)]$,接收端接收到 $\boldsymbol{y}$,在相干时间内满足

$$\boldsymbol{y} = [y(0),\cdots,y(N-1)],\ y(n) = \sum_{l=0}^{L-1} x(n-l)h_l + w(n) \tag{14-11}$$

其中,$w(n)$ 为相互独立的噪声。当 $L>1$ 时,我们称之为有码间串扰(ISI)信道模型。对于 ISI 信道模型,假设接收端知道信道抽头 h_l,我们也可以应用 ML 算法,即计算所有候选序列 $\boldsymbol{x}$ 的先验概率,然后选择先验概率最大的作为判决结果 $\hat{\boldsymbol{x}}$。那么,

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\max_{\boldsymbol{x}} \{\mathrm{prob}\{[y(0),\cdots,y(N-1)] \mid [x(0),\cdots,x(N-1)]\}\} \tag{14-12}$$

注意到,当 $x(0),x(1),\cdots,x(N-1)$ 给定时,$y(i)$ 发生的概率仅由 $w(i)$ 决定,即 $y(i)$ 之间相互独立,从而有

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\max_{\boldsymbol{x}} \{\prod_i \mathrm{prob}\{y(i) \mid [x(0),\cdots,x(N-1)]\}\} \tag{14-13}$$

我们取个对数把乘法变成加法吧,则式(14-13)等价于

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} \{-\sum_i \log\ \mathrm{prob}\{\mathrm{y}(\mathrm{i}) \mid [x(0),\cdots,x(N-1)]\}\} \tag{14-14}$$

假设每个数据符号 $x(i)$ 的可能取值个数为 M 个,那么长度为 N 的候选序列 $\boldsymbol{x}$ 共有 M^N 个,对

于每一个 $\boldsymbol{x}$ 取值需要计算 N 个 $y(i)$ 的条件概率，也即总共要计算 NM^N 次概率。当 N 很大时，这个指数增长的计算量会很大。能把计算量降下来吗？继续注意到，其实 $y(i)$ 最多只与 L 个 $x(j)$ 有关，即与 $[x(i-L+1),\cdots,x(i)]$ 有关，而不是和序列 $\boldsymbol{x}$ 的所有 N 个分量相关，那么式(14-14)可进一步化简成

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}}\{-\sum_i \log \text{prob}\{y(i) \mid [x(i-L+1),\cdots,x(i)]\}\} \tag{14-15}$$

仔细观察式(14-15)，我们发现得到 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 等价于两个步骤：第一步，把所有 $y(i)$ 的条件概率

$$-\log \text{prob}\{y(i) \mid [x(i-L+1),\cdots,x(i)]\}$$

计算出来摆在那儿，这个过程共需要计算 M^LN 次条件概率。第二步，就是利用计算出来的条件概率来组合搜索出"和概率"最小的候选信号序列 $\boldsymbol{x}$。我们先定义 N 个步骤，步骤 i 里有 M^L 个状态，即可能的 $[x(i-L+1),\cdots,x(i)]$ 的取值，步骤 $i+1$ 里也有 M^L 个状态，即可能的 $[x(i-L+2),\cdots,x(i+1)]$ 的取值。如果步骤 $i+1$ 里的是一个状态序列的前 $L-1$ 个分量，与步骤 i 里某个状态的后 $L-1$ 个分量相同，称具有这种关系的步骤 $i+1$ 里的这样的状态为相应步骤 i 里的状态能够到达的状态。那么从步骤 0 的一个状态可以到达步骤 1 的一个状态，步骤 1 的这个状态可以到达步骤 2 里的一个状态，依次类推，最后到达步骤 $N-1$ 的某个状态。我们把这些可到达状态的连接称为一条路径，可以看到一条路径其实对应于一个候选序列 $\boldsymbol{x}$。式(14-15)的意思就是从步骤 0 的某个状态 $[x(0),\cdots,x(L-1)]$ 到达步骤 $N-1$ 的某个状态 $[x(N-L),\cdots,x(N-1)]$ 的路径里经过的所有状态，其中第 i 个状态给了一个权重

$$-\log_2 \text{prob}\{y(i) \mid [x(i-L+1),\cdots,x(i)]\}$$

然后计算整条路径上所有状态的权重之和，最后找出重量(权重之和)最小的那条路径。找到这个最短路径的有效方法就是所谓的维特比(Viterbi)算法了。

当然，上面描述了先把所有先验概率(权重)计算出来，然后再搜索重量最小路径。实际算法中可以一边计算权重，一边搜索。当 L 远小于 N 时，其复杂度远小于式(14-14)对应的穷举搜索。当然当 $L\approx N$ 时，该算法就没什么优势了。注意到上面要解决问题的特征，也即 ISI 信道模型的特征，是每一个观察值只与部分原数据相关，从而可以利用 Viterbi 算法进行最大似然算法的化简。另一个应用 Viterbi 算法的例子就是卷积码的译码啦，因为它也很符合这个特征，即每个码字比特只与部分信息比特相关，而非与整个参与编码的信息比特相关，其具体内容请大家查阅资料了解。

14.2.2 线性接收之 MRC 算法——偏心有用信号

在上一节讨论信道容量时，我们已经讨论过 SIMO 信道的最大比合并(MRC)。具体来说，假设同一个信号通过某种手段得到了 r 份，比如通过重复发送，或者多天线等，得到接收信号 $\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_r]$，其中第 i 份发送得到接收信号为

$$y_i = h_i x + w_i$$

其中，h_i 为接收端已知，高斯噪声 w_i 相互独立。MRC 就是采用加权因子 $\hat{h}_i$ 来线性合并各接收信号，合并后得到

$$\sum \hat{h}_i y_i = \langle \boldsymbol{y},\hat{\boldsymbol{h}}^* \rangle = \langle \boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{h}}^* \rangle x + \langle \boldsymbol{w},\hat{\boldsymbol{h}}^* \rangle \tag{14-16}$$

其中，

$$\boldsymbol{h}=[h_1,\cdots,h_r],\ \hat{\boldsymbol{h}}=\left[\frac{h_1^*}{|\boldsymbol{h}|},\cdots,\frac{h_r^*}{|\boldsymbol{h}|}\right]$$

三言两语

从线性空间的角度来看，MRC 实质上就是把接收到的信号投影到某个方向，使得信号部分的投影长度尽量大，噪声部分的投影长度尽量小。这里注意到，相互独立的高斯噪声往任何方向的投影 $\langle \boldsymbol{w},\hat{\boldsymbol{h}}^*\rangle$ 长度都不变，即具有无趋向性（Isotrophic）。所以，只需要信号部分的投影长度最大即可，那么也就只要接收信号往信号方向投影，即完全匹配达到最大值即可，所以说 MRC 是一种偏心有用信号的方法。

如果除了信道衰落外只有 AWGN，这个方法很好；但是，如果除了噪声之外，还有干扰的话，就需要多看一眼了，稍后说明。

首先对于 ISI 信道模型

$$y_i=\sum_{l=0}^{L}x[i-l]h_l+w_i$$

先引入一些记号：

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_{N-1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\\vdots\\y_{N-1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}w_0\\w_1\\\vdots\\w_{N-1}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}h_0&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\h_1&h_0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\h_2&h_1&h_0&\cdots&0&0&\cdots&0\\h_L&h_{L-1}&h_{L-2}&\cdots&h_0&0&\cdots&0\\0&h_L&h_{L-1}&\cdots&h_1&h_0&\cdots&0\\0&0&h_L&\cdots&h_2&h_1&\cdots&0\\\hdashline 0&0&0&\cdots&0&\cdots&h_1&h_0\end{pmatrix}$$

则 ISI 信道写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}\tag{14-17}$$

$$=x_0\begin{pmatrix}h_0\\h_1\\h_2\\\vdots\\h_L\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0\\h_0\\h_1\\\vdots\\h_L\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\0\\h_0\\\vdots\\h_L\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+x_{N-1}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\\h_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_0\\w_1\\w_2\\w_3\\\vdots\\w_{N-2}\\w_{N-1}\end{pmatrix}$$

和 SIMO 信道对比，如果认为信号只有 x_0，那么这也就是一个对于 x_0 的 SIMO 信道，其他

$x_i, i \neq 0$ 的项相当于干扰。那么对于 x_0 的信道我们可以用 MRC 合并得到

$$y_{x_0} = \sum_{l=0}^{L} h_l^* y_l \tag{14-18}$$

单独对其他 x_i 的合并处理类似，最后得到关于所有 x_i 的均衡值。显然，每个 x_i 的均衡值里还是有相互干扰在里面。最后，不管是否有干扰，我们看到 MRC 其实能最大化接收信号与噪声的功率比，即最大化 SNR。

14.2.3 线性接收之 ZF 算法——只管消灭干扰

迫零(Zero Forcing,ZF)算法，可以说和 MRC 相反，也是一种极端的方法，就是把接收信号向干扰正交的方向投影，使得干扰变为 0。考虑 SIMO 信道

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{r-1} \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{r-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{r-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{r-1} \end{pmatrix} \tag{14-19}$$

其中，$\boldsymbol{z} = [z_0, \cdots, z_{r-1}]^{\mathrm{T}}$ 为干扰，$\boldsymbol{w} = [w_0, \cdots, w_{r-1}]$ 为噪声。接下来就是想办法找到一种线性合并方法使得能够消除干扰，即找到合并系数$[c_0, c_1, \cdots, c_{r-1}]$，使得

$$[c_0, \cdots, c_{r-1}] \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{r-1} \end{pmatrix} = [c_0, \cdots, c_{r-1}] \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{r-1} \end{pmatrix} x + 0 + [c_0, \cdots, c_{r-1}] \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{r-1} \end{pmatrix} \tag{14-20}$$

也就是要求

$$[c_0, c_1, \cdots, c_{r-1}] \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{r-1} \end{pmatrix} = 0 \tag{14-21}$$

即在 r 维线性空间中找到一个与$[z_0, \cdots, z_{r-1}]^{\mathrm{T}}$ 正交的向量即可。由线性空间理论或者说线性方程理论，我们知道有无穷多个向量$[c_0, \cdots, c_{r-1}]$都可以办到，这就是 ZF 算法。该算法如果干扰和有用信号不相关，还可以；如果干扰和有用信号强相关，那就有麻烦了，稍后说明。最后，可以看到 ZF 其实能最大化接收信号与干扰的功率比，即最大化信干比(Signal to Interference Ratio, SIR)。

三言两语

从线性空间的角度来看，ZF 算法就是把接收信号往干扰正交的方向投影，使得干扰变为 0，即最大化接收信号与干扰的功率比 SIR。

14.2.4 线性接收之 LMMSE 算法——做一个和事老

假设信号 $\boldsymbol{X}$ 经过信道后,得到

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{HX}+\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{W} \tag{14-22}$$

其中 $\boldsymbol{Z}$ 为干扰,$\boldsymbol{W}$ 为噪声。仍然只考虑线性接收,即仍然考虑把接收信号往某个方向投影。首先说,采用 MRC 还好吗？上面我们讲了噪声 $\boldsymbol{W}$ 往哪个方向投都无所谓,但是干扰 $\boldsymbol{Z}$ 不一定有这么好的性质。采用 MRC 是把接收信号往信号方向投影,虽然信号投影长度能达到最大,但是如果 $\boldsymbol{Z}$ 和信号相关度较高(即方向差不多),$\boldsymbol{Z}$ 的投影可能也很大,所以最后整体性能可能不好。那我们换个思路,干脆把接收信号投到与 $\boldsymbol{Z}$ 正交的方向上,这样即采用 ZF 把 $\boldsymbol{Z}$ 完全消掉(投影为 0),岂不是感觉很好。打住,也许没你想象的好,和上面一样,虽然 $\boldsymbol{Z}$ 投影变为 0 了,可能信号部分的投影也几乎变为 0 了,而还有个家伙噪声 $\boldsymbol{W}$ 没变,最后性能也不会好。

三言两语

这样一想,我们大概知道了思考的方向:存在一个方向,虽然信号投影不像投到信号自己方向上那样大,即有所减少,但 Z 在那个方向上减少得更快,从而整体性能可能还不错。也即存在一个方向,可以最大化信干噪比(Signal to Interference - Noise Ratio,SINR),使得干扰和噪声两者都能照顾到。

上面比较中庸的思想引出线性最小均方误差(Linear Minimum Mean Square Error, LMMSE)算法。长期来看 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W}$ 为随机向量,当然 $\boldsymbol{Y}$ 也是一个随机向量,但 $\boldsymbol{Y}$ 是由随机向量 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W}$ 组合而成的随机向量,即它们的函数。现在要以观察到的随机变量 $\boldsymbol{Y}$ 为基础,找一个随机变量 $\hat{x}_i$,使得该随机变量与真实 x_i 的平均距离长期统计最小,即平均误差最小。也就是说,以时刻 1 观察到的 $\boldsymbol{Y}_1$ 为基础,找一个 $\hat{x}_i$,求该 $\hat{x}_i$ 与时刻 1 本来发送的 x_i 的距离;以时刻 2 观察到的 $\boldsymbol{Y}_2$ 为基础,找一个 $\hat{x}_i$,求该 $\hat{x}_i$ 与时刻 2 本来发送的 x_i 的距离;一直这样考察下去,最后使得找的序列 $\hat{x}_i$ 与实际发送的序列 x_i 的距离平均最小。

上面说了以观察到的随机变量 $\boldsymbol{Y}$ 为基础来找 $\hat{x}_i$,但是没有说应该以什么方法或者规则来使用 $\boldsymbol{Y}$。一个比较简单且常用的规则就是采用 Y 的分量 y_i 的线性表示(注意 y_j 长期看是随机变量),即使得找到的 $\hat{x}_i$ 形如

$$\hat{x}_i = \sum_{j=1}^{r} g_{ij}y_j \tag{14-23}$$

也就是说,要找到一组常数 g_{ij}(注意不是随机变量)使得上面形式的数与实际发送的 x_i 统计距离最小,或者叫统计误差最小。

我们可以按照线性空间的条款验证一下,对所有可能的常数 g_{ij},对应得到的

$$\hat{x}_i = \sum_{j=1}^{r} g_{ij}y_j$$

构成一个线性空间(其中元素是随机变量)。上面的描述,其实是说,在该线性空间中找一个随机变量 $\hat{x}_i$ 使得它与随机变量 x_i 的距离最小,即 $|\hat{x}_i-x_i|^2=\mathrm{E}[(\hat{x}_i-x_i)(\hat{x}_i-x_i)^*]$ 最小,也就是说 $\hat{x}_i$ 是 x_i 的最佳近似。

则根据附录 B 里讲的正交原理(Orthogonal Principle)知,该

$$\hat{x}_i = \sum_{j=1}^{r} g_{ij} y_j$$

必然满足 $\hat{x}_i - x_i$ 与如上考察的线性空间中任何向量正交。因为所有 y_j 也在该线性空间内，所以必然 $\hat{x}_i - x_i$ 与所有 $y_j(1 \leqslant j \leqslant r)$ 正交，即

$$<\hat{x}_i - x_i, y_j> = 0$$

根据随机变量内积定义展开有

$$\mathrm{E}[\hat{x}_i y_j^*] - \mathrm{E}[x_i y_j^*] = 0$$

继续展开可求出所有 g_{ij}的值，这里略去细节。

这里可以有更直接的方式，即把所有 x_i 对应的 $\hat{x}_i$、g_{ij}一起考虑写成矩阵、向量形式：求$\hat{\boldsymbol{X}} = [\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_t]^{\mathrm{T}}$，使得它与 $\boldsymbol{X}$ 的距离最小，其中 $\boldsymbol{G}$ 为所有 g_{ij}组成的矩阵。设

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{Y}$$

则 $<\boldsymbol{GY} - \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}> = 0$ 从而

$$\boldsymbol{G}\mathrm{E}[\boldsymbol{YY}^{\mathrm{H}}] - \mathrm{E}[\boldsymbol{XY}^{\mathrm{H}}] = 0$$

那么，可以得到

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{E}[\boldsymbol{XY}^{\mathrm{H}}]\mathrm{E}[\boldsymbol{YY}^{\mathrm{H}}]^{-1} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{HH}^{\mathrm{H}} + E_{\mathrm{s}}^{-1}\boldsymbol{R} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}^{-1}\sigma^2\boldsymbol{I})^{-1} \tag{14-24}$$

其中，

- $\mathrm{E}[\boldsymbol{XX}^{\mathrm{H}}] = E_{\mathrm{s}}\boldsymbol{I}$，$E_{\mathrm{s}}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 每个分量的功率。
- $\mathrm{E}[\boldsymbol{WW}^{\mathrm{H}}] = \sigma^2\boldsymbol{I}$，$\sigma^2$ 为噪声功率。
- $\mathrm{E}[\boldsymbol{ZZ}^{\mathrm{H}}] = \boldsymbol{R}$ 为干扰协方差矩阵。

因为 ISI 信道传播模型可以写成

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Hx} + \boldsymbol{w}$$

LMMSE 均衡也可直接应用与 ISI 信道，不细讲了。

14.2.5 带循环前缀的频域均衡——简单了，但是有代价的

上面讨论的几种接收算法(均衡算法)都是不去改动信号发射机制，直接实打实地去均衡，并且都可以看成在时域做均衡。有没有办法通过对发射机制改动一下，使得均衡变简单呢？我们看到 ISI 信道

$$y_i = \sum_{l=0}^{L-1} x_{i-l} h_l + w_i$$

形式上基本上快变成循环卷积啦，特别是当 $i \geqslant L$ 时。如果是循环卷积的形式的话，我们知道通过 DFT 变换可以变成乘积形式，乘积总比卷积看起来简单。那我们就想办法先凑个循环卷积形式出来吧。

要想使得从 $0 \leqslant i < L$ 起就是卷积形式，即要

$$y_0 = x_0 h_0 + x_{N-1} h_1 + x_{N-2} h_2 + \cdots + x_{N-L+1} h_{L-1}$$

$$y_i = x_i h_0 + x_{(i-1) \bmod N} h_1 + x_{(i-2) \bmod N} h_2 + \cdots + x_{(i-L+1) \bmod N} h_{L-1}$$

观察知，如果发射端发送的是

$$[x_{N-L+1}, x_{N-L+2}, \cdots, x_{N-1}, x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}]$$

接收到的是$[y_{-L+1}, y_{-L+2}, \cdots, y_0, y_1, \cdots, y_{N-1}]$，则

$$y_i = \sum_{l=0}^{L-1} h_l x_{(i-l) \bmod N} + \omega_i,\ i = 0,1\cdots,N-1$$

从而对于

$$\boldsymbol{y} = [y_0, y_1, \cdots, y_{N-1}],\ \boldsymbol{h} = [h_0, h_1, \cdots, h_{L-1}, 0, \cdots]$$
$$\boldsymbol{x} = [x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}],\ \boldsymbol{w} = [w_0, w_1, \cdots, w_{N-1}]$$

有如下循环卷积关系：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h} \otimes x + \boldsymbol{w} \tag{14-25}$$

这种得到循环卷积的方法里，在 x_0 之前额外发的信号称为循环前缀(Cyclic Prefix,CP)。对式(14-25)采用 DFT 变形，得到

$$\mathrm{DFT}\{\boldsymbol{y}\} = \mathrm{DFT}\{\boldsymbol{h}\}\mathrm{DFT}\{\boldsymbol{x}\} + \mathrm{DFT}\{\boldsymbol{w}\} \tag{14-26}$$

分开写有

$$Y_i = H_i X_i + W_i \tag{14-27}$$

这样，把时域的多径信道变成了频域平行信道，当然要付出 CP 的代价。接收端可以对每个平行信道单独检测，把 X_i 都判决出来后，再用 IDFT 把 x_i 还原出来。

我们在刚开始提到从频域看 ISI 信道时就说过，不管是否加 CP，DFT 变到频域来看为

$$\mathrm{DFT}\{x[n]\} \Rightarrow \mathrm{DFT}\{y[n]\} = \mathrm{DFT}\{\sum_i h_i x[n-i]\}$$

那么总是可以写成

$$\mathrm{DFT}\{y[n]\}_i = \hat{h}_i \mathrm{DFT}\{x[n]\}_i$$

其中，$\mathrm{DFT}\{x[n]\}_i$ 表示序列 $x[n]$的 DFT 对应的第 i 个分量。$\hat{h}_i$ 有什么规律可循吗？如上面讲的，如果加上 CP，那么$\hat{h}_i$ 和 h_i 满足 DFT 关系

$$\hat{h}_i = \mathrm{DFT}\{h_i\}_i \tag{14-28}$$

完全由信道决定，和发的信号 x_i 没有任何关系；而如果不加 CP，虽然从频域看也可以写成平行信道，但是$\hat{h}_i$ 不仅和信道 h_i 有关，还和当前发的信号 x_i 的取值相关，那基本上没办法相干解调了，因为要知道频域信道$\hat{h}_i$，需要先知道时域信道抽头 h_i 和发射的信号 x_i 才能均衡解调 x_i，这就像“鸡生蛋，还是蛋生鸡”问题一样。当然对于不加 CP 的频域均衡也有很多研究成果，但稍微复杂一些，这里就不做介绍了。

14.3　分集思想及应用

分集思想对于提高接收性能，特别是对于降低不确定性风险的影响有很大帮助，本节我们就来介绍一下。

14.3.1　分集思想——别把鸡蛋放同一个篮子里

所谓分集思想，就是对于同一个要考察的量(观察量)，通过多次或者多种相对独立的渠道得到观察值来做出相对更准确的判断。例如，判断北京明天的天气，如果你只看某一个气象台的预测，该气象台预测明天会下雨，你也许有 80% 的把握明天会下雨；如果你看了好几个气象台的预测，并且知道这几个气象台的预测是独立做出的，并且都预测明天会下雨，那么你会

觉得有 95% 的可能性明天会下雨。这个例子里就有分集的效果,简单说就是"不把所有鸡蛋放在同一个篮子里"。所谓的"多次"或者"多种渠道",对于无线通信来说,可以在时域、频域或空域来实现,具体怎么实现要看在哪些纬度方便。

比如,若信道相干时间特别长,你在一段时间内多发几次也没用,因为信道是一样的,要么都好,要么都差,不会有综合的平均效果。而信道在频域可能频选特性比较强,在多个频段同时发送,则可能达到有的频段好,有的差,综合起来达到一个不错的效果。又或者,我们多弄几个发送/接收天线,使得每一对收发天线的信道好坏不一样,综合起来达到一个平均效果。采用分集方法获得的错误概率改善称为分集增益(Diversity Gain)。值得说明的是,如果存在单次或单途径能达到多次或多途径相同的效果,那么这种多次或多途径获得的性能改善不算分集增益。

14.3.2 时间分集及应用举例

如上所述,时间分集就是在多个信道不同的时间上发送信号。我们谈到分集思想,需要明确是对哪个对象应用了分集思想,或者说哪个对象能够获得分集增益,这个必须搞清楚。通常在无线通信里,大致可以分为两种情况来讨论,其他情况思想类似。这两种情况分别是:对单个数据符号应用分集思想和对单个编码块应用分集思想。

先讲对单个数据符号应用分集思想。对单个数据符号应用时间分集,就是在多个信道不同的时间上发送相同的信号。比如,假设信道传播模型是

$$y = hx + w$$

同一个数据符号 X 发送 L 次,其中第 $i(1 \leqslant i \leqslant L)$ 次接收到的是

$$y_i = h_i x + w_i$$

首先说,不论 h_i 之间的关系怎么样,多次发送错误概率一定是降低的。因为多次发送时,只要其中有一次正确就应该认为是正确的;而所谓错误,要所有次数全部错误才算错误。假设每次发送是独立判决的,多次发送的整体错误概率是单次发送错误概率的乘积,显然比单次的错误概率小。但是,我们上面说了有增益并不代表是分集增益。下面我们讨论时间上重复发送在哪些情况获得的增益才是所谓"分集增益"。

1. 多次发送信道衰落完全相同

不论是慢衰落还是快衰落,假设多次信道衰落完全相同,都为 h,采用 MRC 合并后,有

$$y' = \frac{L\,|\,h\,|^2}{\sqrt{L\,|\,h\,|^2}}x + w$$

其接收 SNR 相对于单次发送总是提高 L 倍,不论 h 是多少。也就是说,不论 h 是慢衰落,还是快衰落,多次发送的效果,通过单次发送但发射功率提高 L 倍也能达到。注意到时间多次发送和多天线 SIMD 系统,时间单次发送和 SISO 系统没什么区别。为了简便叙述,我们就用 SIMO 系统和 SISO 系统来分别指代。也就是说,SIMO 系统相对于 SISO 系统有 $10\lg L$(dB)增益。特别地,当 $L=2$ 时,有 $10\lg 2 = 3$ dB 增益。但是这种情况如我们前面的讨论,既然单次也能达到相同的性能,这个增益并不是"分集"增益,这个增益一般称为"功率合并增益"或者"阵列增益"。

2. 多次发送信道是独立快衰落

假设多次信道衰落是相互独立的,并且假设每一次都是快衰落,分别为 h_i,采用 MRC 合并后,有

$$y' = \frac{\sum_i |h_i|^2}{\sqrt{\sum_i |h_i|^2}} x + w \tag{14-29}$$

则对于每一组信道取值$[h_1,\cdots,h_l]$,采用 MRC 后信号的接收 SNR 为

$$\sum_i |h_i|^2 \mathrm{SNR}_0$$

其中,原始信噪比 $\mathrm{SNR}_0 = \frac{P(x)}{P(w)}$。以信号取值 $x=a$ 或 $x=-a$ 且等概率出现为例,以式(14-29)为基础,通过先验概率计算得条件误码率为 $Q(\sqrt{2\sum_i |h_i|^2 \mathrm{SNR}_0})$。其中,

$$Q(\alpha) = \int_\alpha^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

且注意,所有满足 $\sum_i |h_i|^2$ 相等的信道 MRC 后,接收 SNR 相等,从而该条件误码率相等,都为 $Q(\sqrt{2\sum_i |h_i|^2 \mathrm{SNR}_0})$。现在,假设随机变量 $Y=\sum_i |h_i|^2$ 的概率密度函数为 $f(y)$。那么,可以得到该 SIMO 系统 MRC 下的平均误码率为

$$p_e = \int_0^\infty Q(\sqrt{2y\mathrm{SNR}_0}) f(y) dy$$

从性能上来说,每次发送时信道相互独立的 SIMO 系统采用 MRC 能够同时提供功率合并增益和分集增益。图 14-2 示意了不同接收天线个数的 SIMO 系统采用 MRC 的平均误码率。

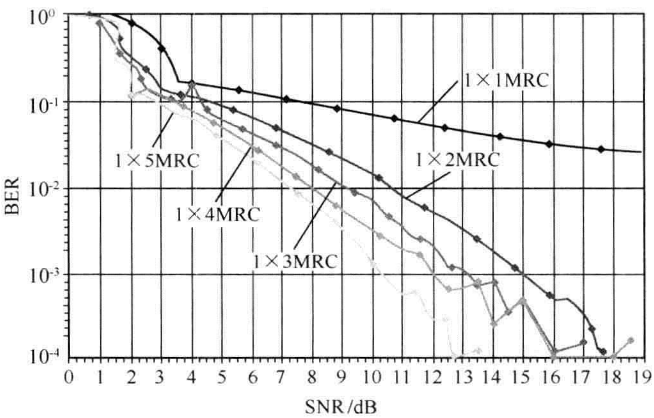


图 14-2　不同发送次数时 MRC 接收

从图中我们看到,1 发 2 收的 SIMO 系统大概在 SNR 为 4.5 dB 时达到 10% 的误比特率(BER),而 SISO 系统大概在 SNR 为 8 dB 时达到 10% 的误比特率,即 1 发 2 收 SIMO 系统 MRC 相对于 SISO 有 3 ~4 dB 增益。而如果两次发送信道完全相同,前面讲过理论上只有 3 dB 增益。另一方面,我们知道多次发送的平均信号接收功率为

$$\mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{L} |h_i|^2 P\right\} = L\mathrm{E}\{|h_1|^2\} P$$

即统计平均来看,每次发送信道独立时,MRC 合并也使得合并后 SNR 只平均增大 L 倍。但我们却看到增益更大,这个多出来的增益就是分集的功劳。

另一方面,从错误概率(瀑布)曲线来说,一个方案的分集增益体现为对应曲线随着原

始 SNR 的斜率变化情况。但从图 14-2 可以发现,随着发送次数的增多,每增多发送次数时带来的增益也逐渐减小,并且 BER 曲线随着天线数的增多越来越趋近于平移(平行)关系,其陡峭程度(斜率)不再变化,这又是为什么呢? 原因是,分集增益的实质是改变了接收功率的概率密度分布。例如,如果每根接收天线的信道衰落都是相互独立的瑞利衰落,当有 L 根接收天线时,接收信号功率 $\sum_i |h_i|^2$ 满足 $2L$ 阶 χ^2 分布。图 14-3 给出了不同阶数 k 时的 χ^2 分布。

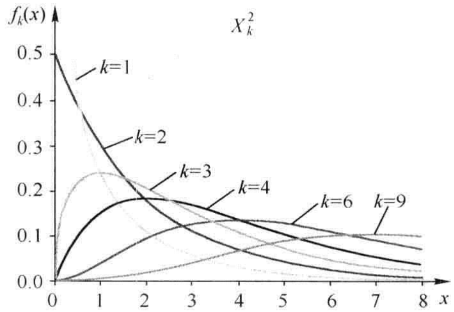


图 14-3　不同阶数的 χ^2 分布概率密度

但是,当独立的信道个数 N 足够大时,根据中心极限定理,其(归一化)接收信号功率

$$\sum_{i=1}^{N} |h_i|^2 = \sqrt{N}\,\frac{\sum |h_i|^2}{\sqrt{N}}$$

将趋近于高斯分布(正态分布),如图 14-3 中,当 $k=9$ 时,分布曲线已经开始像高斯分布了,那么仅仅只剩下分布的方差会随着天线个数增加而变化。所以,当信道大于一定个数时,即接收天线个数达到一定数量时,不再有增加的分集增益,仅剩下功率合并增益,表现为 BER 曲线越来越平行。

再者,有可能存在 k,使得功率提高 k 倍但采用单次发送来达到相同平均误码率吗? 没这个可能! 因为 $\sum_i |h_i|^2$ 满足 $2L$ 阶 χ^2 分布,而对于任意 k,$k|h_1|^2$ 满足 2 阶 χ^2 分布,错误概率变化趋势不会一样。因此,按照我们对分集的认识,多天线信道独立时一定有分集增益。

上面讲了对单个数据符号应用分集思想,下面介绍对一个编码块应用分集思想。假设一个编码块包含数据符号 $[x_1,\cdots,x_N]$。如果这些数据符号经历的信道衰落完全相同,比如在相干时间内,如果信道好则所有数据符号都好,信道如果差则所有数据符号都差。然而,如果这些数据符号经历的信道衰落独立同分布,虽然从单个数据符号来看,每个符号反正只发了一次,无所谓是否有分集增益,但是从整个编码块来看,每个符号经历的信道是独立的,有些好有些坏,最后长期来看会获得平均的效果,从而提升性能。也就是把整个编码块当成一个整体来看,获得了分集增益。因此,我们谈到分集增益,先要看讨论的对象是谁。

14.3.3　频率分集及应用举例

1. 多径信道与频率分集

我们知道无线信道一般来说是多径信道,其模型可以写成

$$y[m]=\sum_{l=0}^{L-1}h_l[m]x[m-l]+w[m],\ m=0,\cdots,N-1$$

其中,$x[n]$、$y[n]$分别为发送的第 n 个数据和接收到的第 n 个数据;$h_l[n]$为第 l 条有效径在第 n 个点的信道衰落;$w[n]$为第 n 个数据接收时叠加的噪声。一般情况下,我们考虑的序列处于相干时间内,主要体现在 $h_l[n]$与 n 无关,则上面模型化简为

$$y[m]=\sum_{l=0}^{L-1}h_lx[m-l]+w[m]$$

我们先看一个简单情况,假设信道共有 L 个抽头,每 L 个采样点只有一个点发了数据 x,其他点发射的数据为 0,那么有

$$y[m]=h_mx+w[m],\ m=0,\cdots,L-1$$

当 $L>1$ 时,这和 SIMO 模型等价,若 h_m 相互独立且已知,我们已经能利用分集效果了。关于这个分集效果,有些人把它称为多径分集。但也有人坚决不承认这种说法,他们可能认为多径与时间、频域这些已经固化的非常确定存在的资源不同,它是不同意提前分配,或者操作的。而当 $L>1$ 时,我们前面讨论无线信道模型的时候已经说了,此时信号处于频选信道,那么这个分集效果也体现了一些频率分集效果在里面。

上面的简单情况虽然有分集效果,但是效率很低,每 L 个采样点才携带一个有效符号信息。现在,我们考虑每个采样点都发送一个符号的情形。对于下面这个模型:

$$y[m]=\sum_{l}h_lx[m-l]+w[m]$$

14.2 节我们讲接收均衡算法时,不论采用哪一种接收算法,对每个 x_i 来说,只是合并 SNR 不一样,分集增益本身都在,就是看如何方便地把这个效果体现出来。这个特别是采用 MRC 以及带 CP 的频域均衡时,大家可能看得更清楚一些。接下来我们以加上 CP,然后 DFT 到频域均衡为例进一步说明。

信号发送时加入 CP 后 DFT 变换到频域,得到平行信道

$$Y_i=H_iX_i+W_i$$

接收端可以每个平行信道单独检测,把 X_i 都判决出来后,再用 IDFT 把 x_i 还原出来。但是注意到通过 DFT 操作得到的每个 X_i 都包含所有 x_j 的一点分量,即所有 x_i 都对 X_i 有贡献,而不同 X_i 经历的信道是有差异的(假设为频选信道),那么就相当于每个 x_i 经历了不同的信道,所以有分集增益。

还有一个更直接的体现方法,即把最终信号就直接放在频域里,这样检测后不用再 IDFT 回去。怎么做呢? 可以这样:先把要发送的信号 X_i 用 IDFT 预编码生成 x_i,然后发射端在时间上发送的是 x_i 以及其 CP。接收端在接收到 y_i 后,去掉 CP 并直接做 DFT 得到 Y_i,其中必然有 $Y_i=H_iX_i+W_i$ 的形式。此时和时间分集增益一样,每单个数据符号 X_i 从频域最后表现出来的形式来看,并没有分集增益,但从所有 X_i 组成的整个码块来看,不同 X_i 经历了不同信道 H_i,获得了分集效果。当然,如果总是把同一个符号重复地分布在 X_i 里,那么显然从每一个符号来看,也能获得频率分集增益。

2. 循环延迟分集

回过头来想,我们说要获得频率分集,首先要处于频率选择性较强的信道,也就是多径时延扩展较大的信道。但是如果实际信道环境时延扩展较小,甚至单径,而我们又想获得频率分

集增益怎么办？答案是可以人为制造多径，人为制造时延扩展。怎么人为制造多径呢？发射端采用多根发射天线发射相同的信号就能办到！多根天线发射相同的信号，并且多根天线的发射时间相互有一定时延间隔，那么即使每个发射天线通过单径到达接收端，接收端接收到的信号看起来仍然是多径信号。如果每根发射天线发射的信号加了 CP，只要多根发射天线之间的最大时延间隔仍小于这个 CP，那么接收端仍然可以 DFT 到频域得到平行信道来均衡。而只要对于接收端来说是多径，那么就能获得频率分集增益，接收端才不管这个“多径”是怎么来的。事实上，接收端想管也可能管不到，因为只要不告诉接收端发射端采用了多根天线，接收端就区分不出来这个“多径”是怎么来的。这个获得频率分集的方法有时也被称为延迟分集。

上面讲的延迟分集在人为制造出多径的同时，需要加上相当的 CP 来方便频域均衡。从时间上来看，本来信道可能是单径的，是没有码间串扰的，而人为多径带来了串扰，虽然因为通过加 CP 的关系把这个串扰的影响去掉了，但造成了时间资源的浪费，即 CP 占用的时间被浪费了。仔细观察我们想要的效果，其实还可以做得更好。考虑一下正常信道带来的多径环境，加 CP 后发送。在接收端处理时，以某条径（不妨认为是第一条到达径）为参考，会把 CP 和尾巴（延伸到下一个处理窗的部分）去掉，剩下的那一段，各多径信号之间是什么关系呢？没错，是循环延迟关系！即一个径的信号相对另一个来说，是先延迟，然后再把和延迟等长的尾巴砍掉，平移到前面接上，如图 14-4 所示。按照这个思路我们只要想办法使接收端的效果是相互之间循环延迟就好，而实际传播过程中是否真的延迟也不重要了。大家很容易想到，多根发射天线发射时间可以对齐，不用加 CP，只要发的信号相互之间是循环延迟就可以了，那么即使多个发射天线通过单径同时到达接收端，接收端接收到的信号，看起来仍然是带 CP 而接收端去掉 CP 后的延迟信号，从而可以 DFT 到频域得到平行信道均衡。

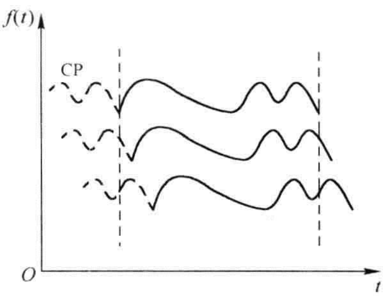


图 14-4　带 CP 多径延迟的接收端信号

如果信道本来是有延迟的，只是延迟不够大，那么也可以用这种方法制造人为大延迟，只不过该有的和信道本身延迟相当的 CP 还是需要的。首先，加 CP 之前各天线的信号是相互循环延迟的关系，接着每根天线各自加上所发信号对应的 CP，CP 长度和单天线时一样，即理论上应该和信道本身真实的延迟相当。图 14-5 示意了这个处理过程，这种延迟分集也被称为循环延迟分集（Cyclic Delay Diversity，CDD）。从图 14-5 中可以看到，只有一根发射天线时，信号经过 3 条径到达接收天线；而采用 CDD，每一根发射天线发射的信号都经过 3 条径到达接收天线叠加起来（6 条径），从而对比可以知道时延扩展相对于一根发射天线时要大，并且并没有改变 CP 的长度，还是和只有一根发射天线时一样。由于不带来额外的开销（不需要在本来的 CP 上继续增加 CP 长度），这种方式比普通延迟分集应用更广。

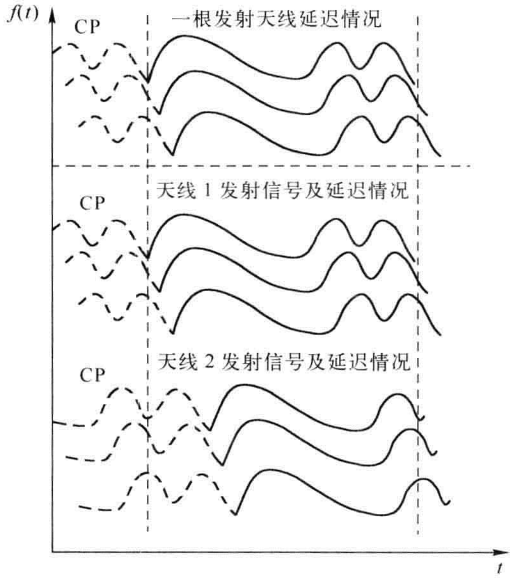


图 14-5　增加天线人为制造不同程度延迟

14.3.4　空间分集及应用举例

空间分集就是采用多根接收天线接收,或者多根天线发送,或者同时多根天线发送和接收,来获得分集效果。当然经过一定的处理还可以获得合并功率增益。分集思想和时间分集也是大同小异,只是具体实现形态上会有所差别。比如,多根天线接收,就和时间上多次发送没什么区别。时间上多次发送能获得的分集增益,SIMO 都可以获得;时间上能采用的合并方法,SIMO 也都可以采用。

从本章所有关于分集方法的讨论,我们知道不管在哪个纬度实现,分集的基本思想都差不多,有时候甚至很难将频率分集和空间分集区分开来。比如 14.3.3 节讲的延迟分集或循环延迟分集,虽然我们说是为了获得频率分集增益,但感觉似乎叫空间分集也不是太离谱,毕竟是借助空间这个纬度才实现分集效果的。所以,多体会分集的基本思想,灵活应用就好,不要固定地只知道哪个具体时间分集方法或频率/空间分集方法。

第 15 章　OFDM 技术进阶

正交频分复用(Orthogonal Frequency DivisionMultiplexing,OFDM)是现在比较主流的信号调制方式及复用方式,目前一些新无线通信标准都采用 OFDM 作为基本调制及复用方式,如 IEEE 802.11n/ac、WiMAX、LTE/LTE-A 等。我们在第一部分已经讲过 OFDM 的最基本原理,本章更进一步地讲解在无线信道以及实际系统中应用 OFDM 技术的一些问题。

15.1　再回首

通过第一部分的介绍,我们知道 OFDM 技术把数据符号调制在不同的子载波上,例如把数据符号序列$[a_0, a_1, \cdots, a_N]$分别承载在子载波

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\Delta ft}, n = 0, \cdots, N$$

并且并列地发送出去,即发送出去的信号为

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\Delta ft}, t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{1}{\Delta f} \tag{15-1}$$

现在的问题是,接收端收到这个整体信号后,怎么把数据符号 a_n 抽出来呢?提醒一点,接收端当然知道整体信号是上面的和形式,它只是不知道和式中 a_n 具体是多少。大家想一想,如果存在两个不同的序列$[a_0, a_1, \cdots, a_N]$,$[b_0, b_1, \cdots, b_N]$,将其带入式(15-1)得到的信号相同会怎么样?这当然不行,接收端怎么判断到底是发的哪个序列呢?所以式(15-1)和序列一定要一一对应才行,即任何一个信号,只能唯一地表示成式(15-1)的形式。怎么判断式(15-1)一定是唯一的呢?这个原因前面我们已经讲过,因为截断的幂指数函数

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\Delta ft}, t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{1}{\Delta f}$$

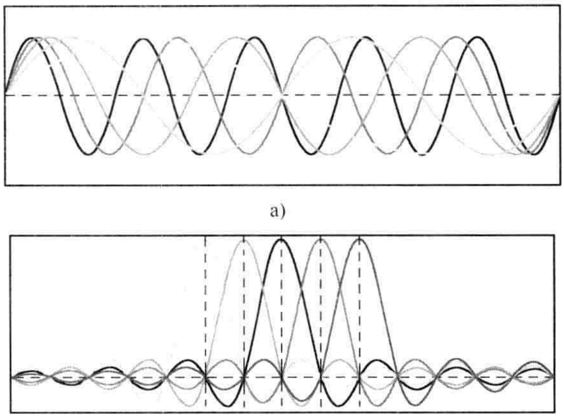
是一组正交基,即

$$\int \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m\Delta ft} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\Delta ft} \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{1}{\Delta f} & m = n \end{cases} \tag{15-2}$$

因此,如果一个信号能由它们线性组合表示出来,那么每个基前面的系数(坐标)必然是唯一的。好,现在知道正交了,接收端就好办了,想拿出 a_n,只需求每个基下坐标即可

$$a_n = \frac{\int s(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\Delta ft} \mathrm{d}t}{\int \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\Delta ft} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\Delta ft} \mathrm{d}t} = \frac{1}{\Delta f} \int s(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\Delta ft} \mathrm{d}t \tag{15-3}$$

OFDM 信号 $s(t)$的时域和频域如图 15-1 所示,除了时域信号的正交性由积分表示出来之外,其正交性还可以从频域体现出来。



a)

b)

图 15-1 OFDM 时域与频域信号

a) 信号时域 b) 信号频域

从上面我们可以看出,数据符号即使是给不同用户的也可以,只要分别告知用户他们的数据在哪些子载波上即可。换言之,OFDM 还可以被用来作为一种不同用户的复用多址技术,即 OFDMA。

进一步研究,我们发现发射端信号的生成可以借助对待发射序列[$a_0,\cdots,a_N$]应用 IDFT 变换来先生成采样点,再通过数/模转换得到;而接收端可以通过对接收信号采样再做 DFT 变换来得到发射的序列。这样大大简化了 OFDM 技术的实现,从而获得广泛的应用。

三言两语

通常我们认为一些经典知识都是很早就有的,比如牛顿时期。不过告诉大家,DFT 简化的推导看起来很简单,实际上这个技巧在 1971 年左右才被发现,牛顿也许并不知道。

相应地,OFDM 技术也被这样描述:把要传输的数据先串并变换,然后 IDFT,接着经过信道,再 DFT,最后解调。

这样描述其实有那么一丁点误导之闲,给人感觉发射端和接收端就是一对 IDFT/DFT 互逆操作,真的是吗?如果真的是,这和映射到正交的子载波上有什么关系?似乎没什么关系。我只要把 IDFT 出来的数据当成一个个脉冲发送出去就行了,即使不是 OFDM 系统,我也可以这样做。似乎没什么不对?确实也没什么不对,原理上也是绝对正确的。那 OFDM 技术的意义是什么呢?

下面,我们看看 OFDM 技术有意义的地方。上面的分析中,我们只从时间纬度,逻辑上来看待这个问题了,确实逻辑理论上完全没发现 OFDM 的特别之处。其实,OFDM 的初衷是有比较高的频谱利用效率。我们在研究无失真传输的时候就已经讲过,有很多信号的采样序列可能是一样的,但是这些信号本身的频谱可能千差万别,有些频谱宽,有些频谱窄。这里也是一样。确实只要想办法把 IDFT 得到的数据发送出去,接收端能得到这个序列即可。关键是选一个什么样的信号把这串序列携带出去呢?这才是 OFDM 技术能发挥作用的关键。对于 OFDM 技术,不管怎么选,最后发送出去的信号要尽量像下面这个信号:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{j2\pi n\Delta f t},\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{1}{\Delta f} \tag{15-4}$$

这样可以保证频谱利用率较高。

通常在通信系统基带表示中,喜欢把 OFDM 的子载波摆成正/负频率基本对称的形式,即

$$s(t) = \sum_{i=-\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} a_{i+\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} e^{j2\pi i\Delta f t}$$

在这个形式下讨论发射端 IDFT 和接收端 DFT 时,有一点小区别,请大家注意。对这种形式基带信号采样,其 N 个采样点为

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{i=-\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} a_{i+\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} e^{j2\pi i\Delta f \frac{n}{N\Delta f}} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{j2\pi i\Delta f \frac{n}{N\Delta f}}\right) e^{-j2\pi \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \Delta f \frac{n}{N\Delta f}} \\ &= \mathrm{IDFT}\{a_i\}_n e^{-j2\pi \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \frac{n}{N}} \end{aligned} \tag{15-5}$$

即相对于序列 $a_i(0 \leqslant i \leqslant N-1)$ 的 IDFT 有一个相位旋转。同样,接收端在用接收到的采样点做 DFT 还原 a_i 时,可以先把所有点上的相位旋转去掉然后再做 DFT;或者,由于时域相位旋转对应到频域循环移位,那么接收端可以直接做 DFT,然后循环移位还原也可以得到 a_i。

总之,有一点小区别,但都不是大问题,后续讨论时,如果没有特别需求,我们还是采用比较正常的形式方便点。

15.2 如何对付多径环境

15.1 节关于 OFDM 原理的讨论,没有考虑实际无线信道的衰落、多径等。在无线信道环境中,由于多径衰落,我们知道会产生 ISI。如果只是为了解决 ISI,相邻符号间留足保护间隔就好了。更麻烦的是,多径会破坏正交性,因为在接收窗内,各个子载波延迟径落到接收窗内的信号不是整数个周期。那又怎么对付多径造成的子载波间正交性破坏呢?

注意到两个子载波即使不同相也能保持正交,但要求两个子载波在积分区间都刚好是整数个周期,即在 $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\Delta f}$ 区间内

$$\int e^{-j2\pi m\Delta f t} e^{j2\pi n\Delta f(t-\tau)} dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{1}{\Delta f} e^{j2\pi n\Delta f(-\tau)}, & m = n \end{cases}$$

如果多径时延扩展最大为 τ_{max},我们给发射信号加上长度大于 τ_{max} 的循环前缀(CP),即把一个 OFDM 符号的末尾长度长于 τ_{max} 的部分平移接到整个符号的头上后再发送,则符号间的干扰只影响到 CP 对应的时间段。如果接收端积分区间仍然认定为最初的长度,即去掉 CP 后再积分,那积分区间内不会受到码间干扰,故码间干扰也不怕了。如图 15-2 所示,积分区间内不同径贡献的信号仅有相位差别,不改变正交性,那第一条径的子载波 A 和其他不论来自哪条径的子载波 B 都正交,则在接收端仍能无误地还原出各个子载波承载的数据。另外,同样告诉大家这个技巧其实离大家很近,在 1980 年才被发现,80 后啊!

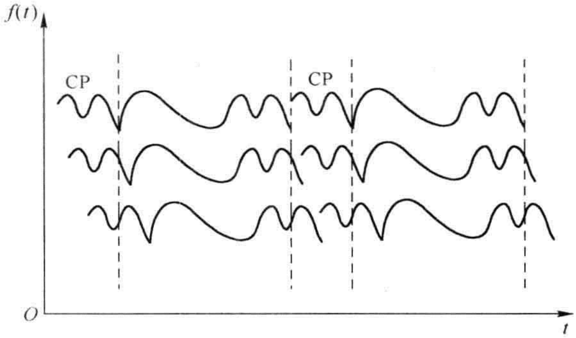


图 15-2　插入 CP 保证多径传播中的正交性

下面,我们再看看上述正交性保持对于采用 IDFT/DFT 发送接收方法时,又是怎么体现的呢？假设现在有有限个抽头,上面提到的循环前缀这里相当于把后面部分采样点放到了头上。这个我们已经讲过很多遍了,最后 DFT 到频域可得到平行信道

$$y_n = H_n a_n$$

说明什么？说明 y_n 只与相应子载波上发射端数据 a_n 相关,与其他完全无关,这如果还不能认为正交,什么情况才叫正交呢！如果接收端通过导频已知各个子载波的信道衰落系数 H_n,那么还原发送的数据就简单了。如果信道除了衰落,还有噪声,在上面式子中加上噪声讨论即可,前面讲过的接收方法都可以使用。

15.3　时频偏移的影响

本节讨论时间偏移和频率偏移对 OFDM 系统接收的影响,同时强调时频同步的重要性,具体讨论是基于已经有 CP 的 OFDM 系统。

15.3.1　对迟到/早退的容忍度

OFDM 信号在接收的时候,最理想情况是假设接收端能和一个 OFDM 符号的第一条到达径精确同步上,然后以第一条径的时间为参考(把接收信号划分成 CP 部分和有用信号部分),丢掉 CP 部分,然后把一个 OFDM 符号除掉 CP 外的部分拿出来处理或者说从 CP 结束的地方(有用信号部分开始的地方)开始等间隔采样。所谓时间偏移,主要指 CP 外部分拿得不准确,或者说采样点采得不准确,相对于上述最理想情况有偏移。从带来的影响来看,我们大致分为两种情况讨论：

- 情况 A：相对于最理想情况偏移整数个采样点间隔。
- 情况 B：相对于最理想情况偏移分数个采样点间隔。

而对于其中每一种情况,又可以继续分为三种小情况讨论：

- 情况一：第一个采样点比 CP 结束位置提前。
- 情况二：第一个采样点在 CP 结束位置之后,误差不超过一个采样点。
- 情况三：第一个采样点在 CP 结束位置之后,误差超过一个采样点。

接下来,我们先以整数个采样点偏移(情况 A)来讨论其对应的三种情况。

1. 情况一

对于情况一,如果 CP 的长度比时延扩展长,我们再定义一个分界点来讨论,这个分界点是时延扩展最大的结束位置。如果第一个采样点比 CP 结束位置提前,但仍然落后于时延扩展最大结束位置,我们可以看到每个时延路径上每个子载波的信号仍然是完整的周期,那么正交性没有任何问题。并且对于偏移为整数个采样点来说,得到的采样点是最理想情况采样点的循环移位。比如,最理想情况接收端采样点为$[y_0,y_1,\cdots,y_{N-1}]$,满足

$$y_n = \sum_{l=0}^{L-1} x_{n-l}h_l + w_n \tag{15-6}$$

其中,x_n 为发射端信号;h_1 为信道抽头。那么,情况一里偏移 k 个采样点间隔得到的采样点为

$$[y'_0 = y_{N-k}, y'_1 = y_{N-k+1}, \cdots, y'_{k-1} = y_{N-1}, y'_k = y_0, \cdots, y'_{N-1} = y_{N-k-1}]$$

记 x'_n为$[x'_0 = x_{N-k}, x_{N-k+1}, \cdots, x_{N-1}, x_0, \cdots, x_{N-k-1}]$,仍然有

$$y'_n = \sum_{l=0}^{L-1} x'_{n-l}h_l + w_n \tag{15-7}$$

假设最理想情况,DFT 到频域得到的平行信道为

$$Y_n = H_nX_n \tag{15-8}$$

那么,由 DFT 的"时域循环移位,频域相位旋转"性质知道,这里偏移情况 DFT 到频域得到的平行信道为

$$Y'_n = H_nX_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}} \tag{15-9}$$

我们看到,从偏移采样点做 DFT 出来的对应于每个子载波上的数据除了信道衰落外,每个子载波上还有相位旋转,旋转角度与采样点时间偏移 k 和每个子载波的频率 n 有关。

当然,如果接收端仅知道信道衰落系数 H_n,但不知道有采样点偏差,即不知道每个子载波上数据有相位旋转,那么解调出来的信号会出错。比如,本来发的是第一象限的 QPSK 符号,由于相位旋转,解调出来的可能是第二象限的 QPSK 符号。相反,如果接收端既知道信道衰落系数,又知道各子载波上的相位旋转,那么和采样完全准确时的最理想情况解调没有任何区别。但是这种情况存在吗?或者说合理吗?这种情况要求接收端知道采样偏差是多少,既然知道,那为什么不纠正回去按准确采样点采样处理?既然讨论采样偏差,当然是假设接收端并不知道有采样偏差这回事儿,接收端还乐呵呵地认为采样挺准确的。

然而,如果每个子载波有导频(或称为参考信号)来估计信道衰落,即使接收端不知道有采样偏差这回事儿,但由于对包含导频的 OFDM 符号来说,它也是有采样偏差的,当然这个偏差接收端也不知道。接收端仍然按正常情况去估计信道衰落系数,估计出的信道衰落系数里,天然会隐含把每个子载波的相位旋转当成信道衰落的一部分,即理想情况下估计出来的信道衰落就是 $H'_n = H_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}}$。用这个信道衰落系数去解调数据符号,理论上一点问题没有,和正常采样情况效果完全一样,虽然整个过程中接收端仍然不知道有采样偏差这回事儿,但不产生什么问题。不过,有个现实问题可以稍微提一下:现实情况的导频设计可能不是每个子载波上都有,比如 LTE 里的下行参考信号,它是隔几个子载波插入一个参考信号,这样就不能从参考信号得到每个子载波上的信道衰落系数。一般还需要通过从参考信号得到的衰落系数经过插值方法把其他没有对应导频的子载波的信道衰落系数给估计出来。而当初在设计导频间隔的时候,可能并没有考虑采样时间偏差(或者考虑了一部分范围的偏差),是假设采样准确的情况下来设计的。认为采样

准确时,导频足以保证性能。但现在由于采样偏差(或偏差超出预计范围),实际上相当于改变了信道的特征,比如频率选择性增强了,也许还是有些影响,得具体场景具体评估。

如果第一个采样点比最大时延截止位置还提前,显然正交性被破坏。这种情况,只能说理论上一定有影响,但影响到底有多大,纯粹的理论分析不方便给出准确结果。比如,若最大时延路径的功率很微弱,虽然这条径,客观存在,但影响几乎可以忽略不记,也即变相地可以认为最大时延提前了,从而仍然等价于采样点在最大时延截止位置之后,那就属于上一段落讨论的情况;相反,影响就较大了。总之,需要实际情况实际分析。

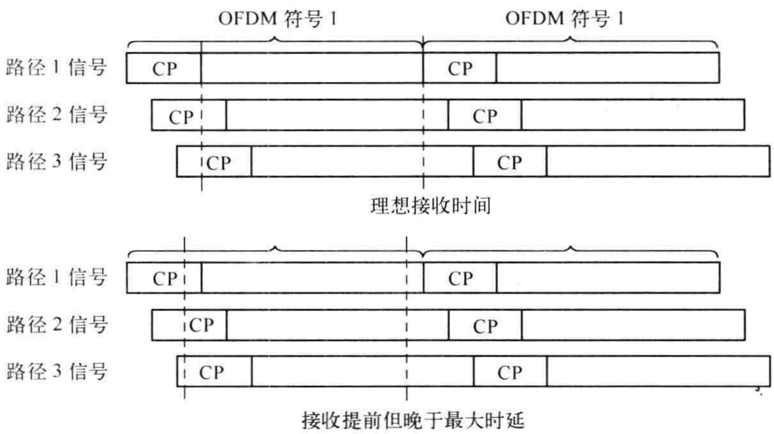


图 15-3　时间偏移情况一

2. 情况二

对于第二种情况,相对于 CP 结束位置后有一个采样点偏差。看起来如果按照常规积分解调来说,是应该有正交性破坏的,积分区间都伸到下一个 OFDM 符号去了。但是,从采样点的 DFT 来看,对系统的影响仍然只是每个子载波的数据有一个相位旋转而已。因为偏差一个采样点间隔得到的采样点为$[y_1,\cdots,y_{N-1},y_0]$,仍然是最理想情况的循环移位。其他讨论和情况一差不多。并且,因为误差很短,不超过一个采样点间隔,相位旋转角度很小。即使参考信号的估计有误差,误差也很小,一般对系统的影响很小。

3. 情况三

对于第三种情况,就比较直观了,不论从常规积分还是 DFT/IDFT 来看,正交性遭到破坏,总之性能有影响,影响多大要看误差有多大,实际结果需要根据具体场景评估。

经过上面的讨论分析,从整数个采样点时间偏移情况(情况 A)来看,情况一和情况二都不会有什么问题。同理,对于分数个采样点间隔偏移(情况 B)情况一和情况二也不会有什么问题。下面我们仅看看相对于最理想情况,整数个采样点偏移和分数个采样点偏移的差别。

假设时间偏移为 $k+\tau$ 个采样点,其中 $0<\tau<1$。回忆我们在无线信道离散模型里讨论信道抽头的影响因素,知道如果有采样偏移,是会改变信道抽头的。那么,记 x'_N 为$[x'_0=x_{N-k},x_{N-k+1},\cdots,x_{N-1},x_0,\cdots,x_{N-k-1}]$,此时采样点离散传播模型为

$$y'_n=\sum_{l=0}^{L-1}x'_{n-l}h'_l+w_n \tag{15-10}$$

但对于 OFDM 系统,做 DFT 到频域,仍然能得到平行信道

$$Y' = H'_n X_n$$

并且 H'_n 和 H_n 之间仍然仅是相位旋转关系,具体地

$$\begin{aligned} H'_n &= H_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\Delta f\frac{(k+\tau)T}{N}} \\ &= H_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi n(k+\tau)}{N}} \end{aligned}$$

信道抽头 h'_l 不再和最理想情况一样。类似地,如果有导频估计信道,那么估计出来的直接就是 H'_n,根本不用去考虑和 H_n 的关系,照样能正确解调。

最后,现实系统中,一般同步过程不可能达到最理想情况,但从我们的分析可以知道,只要时间偏移最后满足情况一或情况二的要求,理论上就不会有问题。

15.3.2 决不容忍频率偏移

频率偏移主要是指接收端的基带信号频谱与发射端的基带信号频谱发生了偏移,主要由硬件(晶振)误差和多普勒频移引起。

我们假设发射端的载频是绝对准确的,比如理论上需要载波 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}$ 或 $\cos(\omega_c t)$,那么发射端硬件就能准确地产生 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}$ 或 $\cos(\omega_c t)$。而接收端的载频是有误差的,即理论上需要载波 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}$ 或 $\cos(\omega_c t)$,但接收端硬件产生的是 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_c+\Delta\omega)t}$ 或 $\cos[(\omega_c+\Delta\omega)t]$,当然接收端并不知道它产生了这个误差。

发射端把 OFDM 基带信号用载频 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}$ 发送给接收端,先不考虑 Doppler 频移和扩展。理想情况是,接收端用准确的 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c t}$ 把接收到的信号再搬回基带处理。但是,接收端硬件也想产生一个 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c t}$,但事与愿违,产生的信号客观上是 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_c+\Delta\omega)t}$。那么用这个有误差的信号将接收到的信号搬到基带去,从基带来看,接收端基带信号频谱和发射端信号频谱相互之间是频移关系。接收端对基带信号解调(例如采样和 DFT),从影响上可以分两种情况讨论:

- 频移偏差整数个子载波间隔。
- 频移偏差非整数个子载波间隔。

1. 频移偏差整数个子载波间隔

我们从两个角度来讨论这个问题:从积分解调角度和从采样后 DFT 解调角度。

从积分解调角度,我们拿本来对应每个子载波的正确子载波来积分解调,会发现一部分子载波上没有数据,即为 0;另一部分子载波上的数据完全错了位,本来第 m 个子载波上的数据,现在被认为是第 n 个子载波上的数据。但接收端并不知道这个错位关系,因此发生错误。如图 15-4 中,接收端拿数据 a_i 对应的子载波来和接收信号积分,实际只会得到 a_{i-1},但接收端因为不知道发生了频率偏差,还傻傻地认为积分解调出来的就是 a_i。当然,你可以说,对于积分解调来说,接收端也需要产生各子载波,既然产生载波都能偏移,产生子载波也可能产生同样的偏移,如果真这样,那么解调又没有任何问题了,皆大欢喜。

从采样再 DFT 角度来看又怎么样呢?我们先看采样得到的数据是什么。假设发射端本来发的基带信号是

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi i\Delta ft}$$

记其采样点序列为 $A_0,\cdots,A_{N-1}$。而接收端接收到的基带信号假设偏差 k 个子载波,为

$$s'(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{j2\pi(i+k)\Delta ft} = s(t)e^{j2\pi k\Delta ft}$$

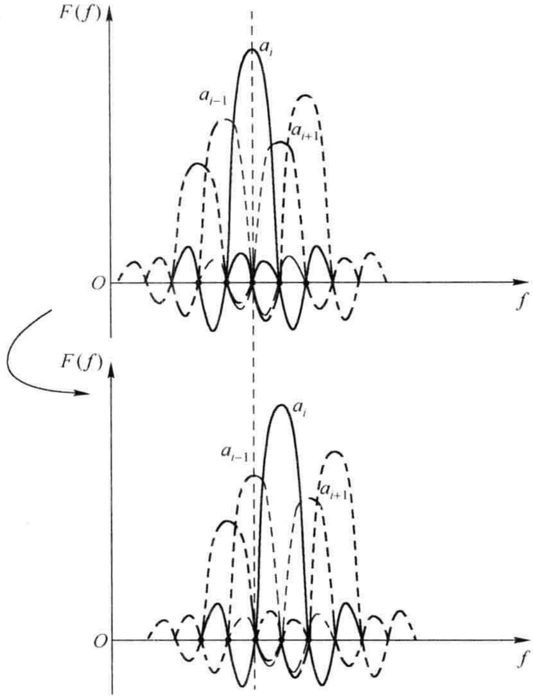


图 15-4　频移偏差整数个子载波间隔

其采样点序列为

$$\left[A_0 e^{j2\pi\frac{0\times k}{N}},\ A_1 e^{j2\pi\frac{k\times 1}{N}},\cdots,A_{N-1}e^{j2\pi\frac{k\times(N-1)}{N}}\right]$$

根据 DFT/IDFT 性质“时域相位旋转,频域循环移位”知,对这个接收采样点序列做 DFT 后,得到的序列为

$$[a_{N-k},\cdots,a_{N-1},a_0,a_1,\cdots,a_{N-k-1}]$$

即和发射的序列$[a_0,\cdots,a_{N-1}]$完全错了位,但是接收端并不知道。

可以看到,不论是从积分解调来看,还是从采样再 DFT 来看,结果是一样的,对于整数倍频移偏差,子载波间正交性没有被破坏,但发生了数据错位。

2. 频移偏差非整数个子载波间隔

对于非整数个子载波间隔偏移来说,就不仅仅是数据发生错位那么简单了,并且还有子载波间干扰,因为正交性遭到破坏,如图 15-5 所示。

如果偏差在一个子载波间隔内,并且偏差足够小(比如只有百分之几子载波间隔)的话,最后的误差只有小部分子载波间干扰,也许影响不大。

从讨论情况来看,不论是整数还是非整数倍子载波间隔偏差,一般都会带来很大影响。这就要求实际系统中,要能保证几乎没有频偏。一方面通过采用更精确的硬件,一方面采用频偏纠正的信号处理技术。

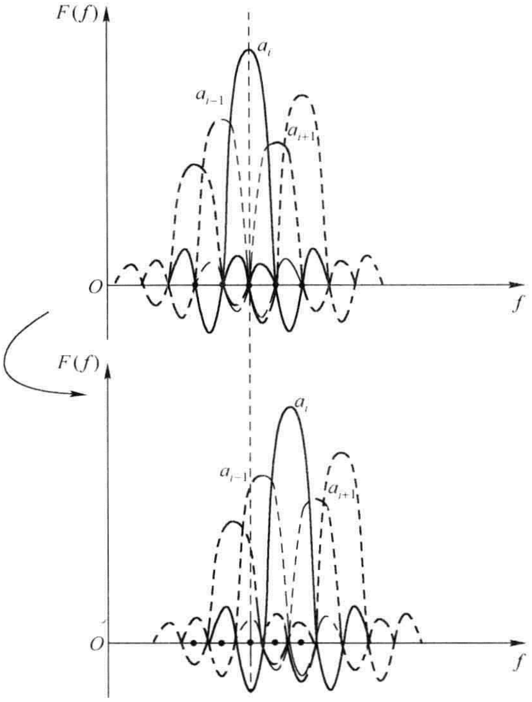


图 15-5　频移偏差非整数个子载波间隔

15.4　OFDM 技术实际系统参数选择

实际 OFDM 系统中,有如下参数需要确定:子载波的频率宽度或者说子载波间隔,一个 OFDM 符号时间长度以及 CP 长度。从 OFDM 基本原理知道,理想情况下,即没有 ISI,也就不需要 CP 的时候,子载波间隔与 OFDM 符号时间长度成倒数关系。从而不管子载波间隔设为多少,单位时间内可用的时频资源是一定的。实际系统中,加入 CP 以后,单位时间内可用的有效资源将减少,有一部分被 CP 占了。很显然,CP 在单位时间内的比重越小越好。但是,记住 CP 的目的是为了消除 ISI,而能否消除 ISI 取决于 CP 是否和有效时延扩展相当或更长。也就是说,CP 取决于环境,而不是我们先设计好 CP,再把整个系统放到一个该 CP 长度能消除 ISI 的环境中。那说明什么呢? 说明环境一定,CP 的长度就定了,不以我们的意志为转移。注意到一个 OFDM 符号需要一个 CP,那么,如果在单位时间内想塞的 OFDM 符号个数越多,CP 在单位时间内的比重越大,这不是我们想要的。那就在单位时间内尽量少塞几个 OFDM 符号,也就是每一个 OFDM 符号尽量长,但是又碰到如下两个问题:

- 为了保证子载波间正交性,每一个 OFDM 符号可以尽量长,但不能超过相干时间。
- 每个 OFDM 符号时间越长,子载波间隔越窄。越窄的话,如果接收端频率同步不好,稍微偏差一点,可能就到下一个子载波上去了,对性能影响很大。

有了这些考虑,在实际系统中,你就去统计时延扩展、相干时间等吧,统计好后在满足上面基本条件的取值下,再借助一些仿真来决定最优的或相对较优的参数。具体过程大家可以参

考 LTE 系统 OFDM 参数确定的讨论过程。

15.5 信号 PAPR 特性——被功放看中的品质

15.5.1 功率放大器效率问题

我们理论考虑的时候，都是以某个标准形式讨论的，比如调制方式星座点的标准形式是按功率为单位功率 1 设计的。功率放大器（Power Amplifier，PA）简称功放，其作用是把逻辑理论上设计好的信号调整到满足发射功率要求的信号。一般情况下，你可以认为是整个设计信号的幅度调整（放大或缩小）。但是我们知道同样功率的信号，其波形可能千差万别，有些整个时间上都很平稳，有些可能大起大落。不巧，现实功放器件，能实际准确发射的是所有这些波形中的一部分。哪一部分呢？别大起大落的那些，或者说现实功放只能正常发射信号瞬时取值在某个区间的信号。如果某个信号幅度调整到某个功率时，其信号上某些瞬时值超过功放允许的幅度界限（动态范围），那么这些地方将被强制截断了，后果就是信号的波形失真了，这个界限可以称为线性区域临界点。你可能会想到，那我把信号幅度降一些，使得所有瞬时值都在功放能支持的区间内。是的，这样没问题。但是，这个时候信号的功率就不是本来想要发射的功率了，可能不能满足接收端的性能要求。另一方面，单从功率来说，功放本来可以支持信号想要发射的功率，只是信号自己长得不好，使得功放没有发挥它最大的作用。所以，不要怪功放，要怪就怪你自己没有让信号长得好一点。怎样让信号长得好呢？

首先怎么刻画信号（在功放眼中）是否长得好呢？其中一个刻画的特征量就是峰值平均功率比（Peak to Average Power Ratio，PAPR），简称峰均比。一个信号 $f(t)$ 的 PAPR 定义为

$$\mathrm{PAPR} = \frac{\max_t |f(t)|^2}{P\{f(t)\}} \tag{15-11}$$

因为

$$P\{f(t)\} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \max_t |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \max_t |f(t)|^2 \tag{15-12}$$

显然有 PAPR$\geqslant$1，当 $f(t)$ 取值为常数时取得等号。如果采用对数形式的话，PAPR$\geqslant$0 dB。很容易看到，PAPR 越低的信号起伏越平稳，PAPR 越高的信号起伏越大。从而 PAPR 越低的信号，使得功放效率越高，如图 15-6 所示；PAPR 越高的信号，使得功放效率越低，如图 15-7所示。图 15-7 中，因为信号 PAPR 过高，要放大到要求的功率（想要的信号）时，部分信号取值超出功放能支持的动态范围，这部分将被截断，造成实得信号相对于想要的信号波形失真；而为了保证波形不失真，就不能功放到想要的信号，即实得信号的功率达不到真正要求的功率，没有最大限度利用好功放。

在实际应用中，除了式（15-11）定义的 PAPR 外，如果我们得到信号 $f(t)$ 足够密（比如至少满足采样定理）的采样点序列 $[\cdots, f_n, \cdots]$，那么也可以用采样点序列的 PAPR 来近似看待信号的 PAPR。采样点序列的 PAPR 为

$$\mathrm{PAPR} = \frac{\max_n |f_n|^2}{\mathrm{E}\{|f_n|^2\}} \tag{15-13}$$

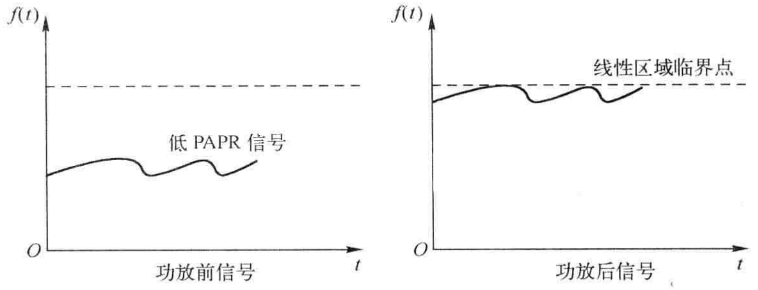


图 15-6　低 PAPR 信号使功率利用率高

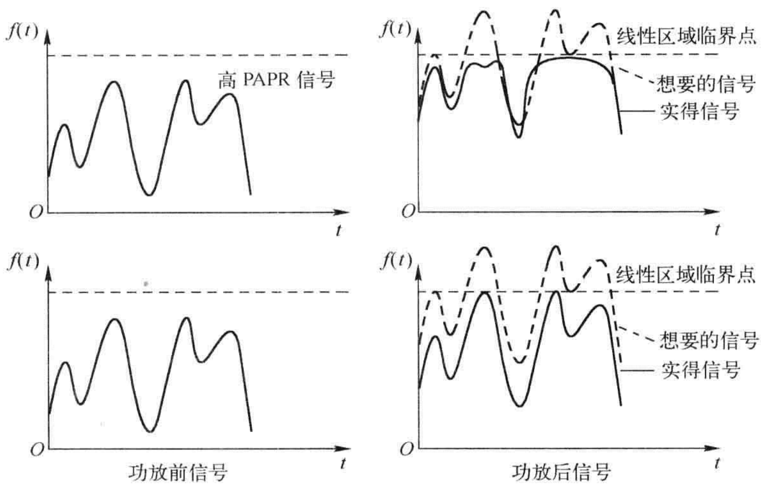


图 15-7　高 PAPR 信号使功率利用率低

依据如下:不妨设满足采样定理,那么首先我们知道信号的平均功率是可以由采样点序列来表示的。而信号本身可以由采样点用 sinc 信号插值出来,可以想象这个插值过程,最后信号的起伏就是采样点的起伏,因此信号本身的峰值和采样点最大值也不会相差太大。因此,信号采样序列的 PAPR 可以反映信号本身的 PAPR。

除了 PAPR 以外,还有其他特征量来描述信号相对于功放的特性,比如立方度量(Cubic Metric,CM)特性。注意核心还是描述瞬时功率的一个分布情况,对实现来说,最好比较平稳一点。PARP/CM 都是不同程度来定量描述这个所谓"平稳"性的数学模型而已。所以,我们这里暂时不纠结于它们之间的差别。

15.5.2　单载波信号的 PAPR 特性

单载波信号有什么特性?单载波系统就是类似大家经常在通信教材上看到的调制部分内容。比如,把 1 用取值为 1 的矩形波发射出去,把 0 用取值为 -1 的矩形波发射出去;或者把 1 用余弦波 $\cos(\omega_c x)$ 发射出去,把 0 用正弦波 $\sin(\omega_c x)$ 发射出去;或者要传输数据 a_n 就直接发送 $a_n\cos(\omega_c x)$,等等。你会看到什么呢?会看到波形很简单,很可控。不管要发的比特序列是什么,我们知道信号可能出现的峰值是多少,平均功率是多少。我们随便考虑一下就可以选择一个比较平稳的码元,使得信号的 PAPR 很低,使得能最好地利用功放效率。从而,单载波

特性也成了信号低 PAPR 的代名词。

15.5.3 OFDM 信号的 PAPR 特性

在 OFDM 系统中，对所有可能的比特序列对应的 OFDM 信号，判断其 PAPR 特性有单载波系统这么简单吗？没有，一点都没有。你单看一个子载波，也很简单，是满足单载波特性的。但是当多个载波携带随机变动的数据的时候，叠加起来你不知道会叠出个什么波形的信号来。简单来说，可能性太多，和子载波个数，各子载波上采用的调制阶数相关，信号波形不可控。从而，有些叠出来的波形会大起大落，不能和功放（线性区域）兼容。那我们就得想想，怎么修改一下，使得 OFDM 系统最后出来的信号也具有单载波特性。

另一方面，每个信号都会有自己的一个 PAPR 值，有些高有些低。对于 PAPR 低的那些情形，对功放效率没什么影响或者影响甚微。我们主要需要担心 PAPR 高的情形占多大比例。假设对于某个 PAPR 分界点 δ，若信号的 PAPR $>\delta$ 被认为是不可接受的，但是 PAPR $>\delta$ 的情形只占到万分之一，或者说 PAPR $>\delta$ 出现的概率为万分之一，那基本上我们也可以认为没什么好担心的，概率这么小，可以不用去管 PAPR 这个指标；相反，如果 PAPR $>\delta$ 的概率为十分之一，那就有点严重了，必须得把这个问题解决了。因此，在讨论 PAPR 时，其实不能简单地说某个系统的 PAPR 是大或是小，而是看 PAPR 的概率分布情况，比如看 CDF 曲线。如图 15-8 所示，其中给出了不同子载波个数时，OFDM 信号 PAPR 大于一定值的概率。可以看到，给定一个 PAPR 取值，比如 6 dB，子载波个数越少，PAPR 超过 6 dB 的概率越小。因此，如果认为 PAPR 超过 6 dB 是不可接受的，那么子载波个数越多，就越应该想办法把 PAPR 降下来。

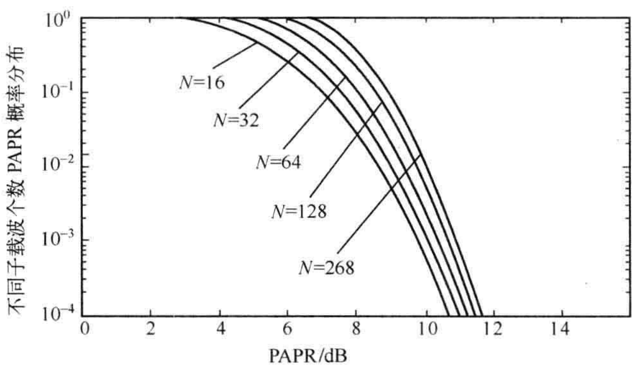


图 15-8 不同子载波个数 OFDM 信号的 PAPR 概率分布

15.5.4 如何得到 PAPR 合适的信号

在 OFDM 系统中，我们关心的是如何改善信号的 PAPR 特性，如何得到 PAPR 合适的信号，也即想让基于 OFDM 的系统也具有单载波特性。具有单载波特性的 OFDM 系统也称为 SC-FDMA，我们这里介绍一些简单的处理方法。

1. 调整数据顺序

对于一个调制符号序列，如果改变调制符号往子载波上映射的顺序，那么可以想象出来的信号的 PAPR 是有差别的。如果先把所有可能的映射顺序得到的 PAPR 都计算出来，然后找

到其中 PAPR 最小的,最后就按 PAPR 最小的顺序把要发送的调制符号序列映射到子载波上发送出去,显然能改善 PAPR 特性。

但是,对于不同的调制符号序列,达到 PAPR 最小的映射顺序并没有什么规律性,即可能都不一样。那么,每发一个序列,都要以 PAPR 最小的顺序映射,接收端怎么知道发射端当前是按哪个顺序映射的呢?如果接收端搞错了这个顺序,接下来的译码以及校验就会出错。要保证不出错,发射端需要在确定好映射顺序的同时,把用到的映射顺序通知给接收端。所谓"通知"也是一种信号,它也需要花费通信资源(比如时频资源)来传输的,这个花费在系统设计时也是需要评估的,要看值不值得。比如,假设每次要发送的调制符号序列长度为 100 个调制符号,那么总共可能的映射顺序为 $100! = 100 \times 99 \times 98 \cdots \times 1$ 种。要表示这么多个可能顺序中的一个,如果以二进制比特表示,需要 $\log_2 100!$ 比特,大家可以算一算,这个数字有多大。也就是说,当调制符号序列较长时,想从所有可能顺序中来选是不现实的。

那我们就不从所有调制符号序列中选,先预先规定几个映射顺序,然后只允许在规定的几个映射顺序中找 PAPR 最小的。比如预先规定 16 个映射顺序,找到 16 个中最小的后,只需要用 4 比特可以把确定的顺序告诉接收端。虽然,这 16 个中 PAPR 最小的相对于所有可能顺序中 PAPR 最小的不是最优的,但总会比不做任何顺序调整要好,也许已经满足 PAPR 的要求。总之,调整数据顺序是一个可以优化 PAPR 的方法,但是实际应用时,需要考虑额外开销与 PAPR 优化的程度之间的一个折中考虑。

当然这里是假设把码字比特调制成调制符号后来变换调制符号的顺序,实际上也可以变换码字比特的顺序后再调制,最后直接映射到子载波,来看哪一种码字比特顺序下信号 PAPR 较小,就以对应的那个顺序来发送,效果差不多。

2. 采用 DFT 预编码

LTE 里上行采用 SC-FDMA 作为接入技术,用以优化发射信号的 PAPR 特性。LTE 里上行采用的 SC-FDMA 实质就是在 OFDM 基础上,当发射序列往子载波映射之前,对发射序列做了一个 DFT 预编码,因此也称为 DFT-Spread OFDM(DFT-S-OFDM)或 DFT-Precoded OFDM。为什么 DFT 预编码能获得单载波特性呢?可以这样考虑:假设要发送的调制符号序列有 M 个调制符号,先对这 M 个调制符号进行 M 点 DFT 变换,得到另一串 M 点序列。把这另一串 M 点序列映射到连续 M 个子载波得到的信号的 PAPR 可以由该信号时域采样点的 PAPR 刻画。注意对 OFDM 信号进行采样等价于做 IDFT,最直观的情况就是对该 OFDM 信号还采 M 个点,即再做 M 点 IDFT,得到的 M 个采样点还是最开始的 M 长(调制符号)序列。很明显,单看这 M 点采样点的 PAPR,是可以看清楚的。只要调制阶数不要太高,PAPR 就不会太高,比如 BPSK/QPSK。

另一方面,和单载波系统比较一下,假设单载波系统要发这 M 个调制符号。是否可以找个基本码元,然后用这 M 个调制符号作为幅度按时间顺序发送出去,比如你可以想象单载波系统为只有一个子载波的 OFDM 系统,M 个调制符号携带在同一个子载波上顺序发送出去。这里一样,得到 OFDM 信号的采样点后,接下来通过 sinc 信号或者升余弦信号等数模转换,其实可以认为找到的基本码元为 sinc 信号或升余弦信号。从而,基本可以控制信号的 PAPR 特性。

当然,上面通过和单载波类比,是为了解释"单载波"几个字的出处。实际上,可以严格地按 PAPR 的定义来推导 DFT 预编码后的 PAPR,来看看 PAPR 是否有改善,这里就不细讲了。

第16章　多天线技术原理及应用

16.1　先尝尝多天线能带来的甜头

我们在讨论信道容量以及分集思想的时候，已经多次讨论到多根发射天线 MISO 和多根接收天线 SIMO 带来的性能提升，包括信道容量提升、MISO 波束成型或延迟分集能带来的功率合并增益以及分集增益、SIMO 系统 MRC 带来的功率合并增益以及分集增益等。可以看到，哪怕只有发射端有多天线，或者接收端有多天线，对无线通信都是很有益处的，相信多天线技术还有更值得期待的地方。

我们再稍微谈谈 SIMO 与 MISO。到目前为止，这两者在理论上而言，是完全对称的系统。MISO 有波束成型，而 SIMO 有 MRC，都是为了 SNR 最大。差别在于，MISO 系统里，信号经过信道天然合并在一起，而 SIMO 需要人为合并。也就是说，SIMO 可以看成是人为的 MISO 信道，如图 16-1 所示，这就是这两个系统对称的原因。

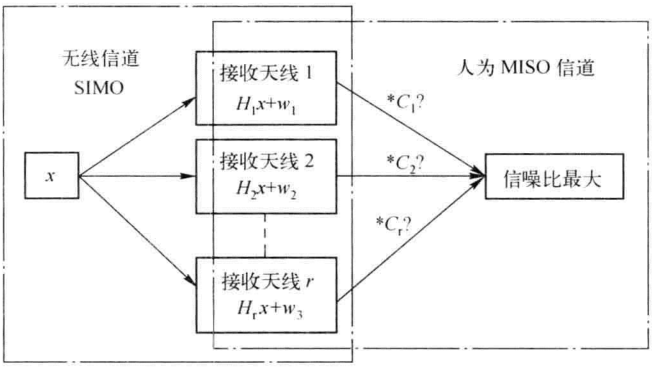


图 16-1　MISO 与 SIMO 的差别与联系

虽然理论上 MISO 和 SIMO 等价，但在实际系统中还是有些区别的。比如，MISO 系统需要提前知道数据将要经过什么信道，发射端怎么提前知道呢？相反，SIMO 系统需要在接收端知道信道，一般来说，这比 MISO 容易一些，因为接收端可以（通过导频或者叫参考信号）测量信道。

16.2　值得单独呈现的 Alamouti 发射分集方案

16.2.1　发射端信息不灵通怎么办

我们现在假设只有接收端能知道信道，而发射端不能知道信道。首先，这种情形对于 SIMO 当然没有什么影响，那对于 MISO 呢？

我们先看看两根发射天线一根接收天线的 MISO 系统。假设每次只发一个数据 X,若要两根天线都用上,则如前面讨论,需要加权发送(注意,什么都不做,两根天线都直接发 X 也是一种特殊加权[1,1])。而现在发射端不知道信道,所以不知道如何加权,若加一个和信道不匹配的,性能会很糟糕。既然这样,我们每次只用上一根天线吧。比如,只用天线 1,则接收端接收到 $h_{11}X+w_1$。但天线 1 到接收天线的信道可能很差,为了保险起见,让数据 X 也经历一下天线 2 的信道 h_{12}。因为,总体来说,两根天线信道都很差的概率较低。这样,都经历一下至少能获得一个中等的性能,从而保证了分集效果,我们再发送一次 X,但这次用天线 2 发送,接收端收到 $h_{12}X+w_2$。把两次联合起来看,这就相当于 1 发 2 收的 SIMO 了。因为接收端知道信道,那么就可以用 MRC 合并。

上面的结果看上去还不错,但问题又来了:摆了两根发射天线,只用一根,并且发射两次才传一个数据,这就造成了浪费。如何避免浪费?方法之一:两根天线每次都用上,且两次共传输两个数据。

16.2.2 Alamouti 的精明之处

在继续之前,我们先看一个小问题:你能很快给出一个向量和$[h_{11},h_{12}]^{\mathrm{T}}$正交吗?假设该向量为$[u_1,u_2]^{\mathrm{T}}$,则要求

$$h_{11}u_1^*+h_{12}u_2^*=0\Rightarrow\frac{h_{11}}{h_{12}}=\frac{u_2^*}{-u_1^*}$$

似乎使$[u_1,u_2]^{\mathrm{T}}=[-h_{12}^*,\ h_{11}^*]^{\mathrm{T}}$就行,并且和$[h_{11},h_{12}]^{\mathrm{T}}$长得还很像。其实,因为只有两个数,多观察一下,还可以发现$[h_{11},-h_{12}^*]^{\mathrm{T}}$和$[h_{12},h_{11}^*]^{\mathrm{T}}$也是正交的。

这样的话,接收端若接收到

$$X_1\begin{pmatrix}h_{11}\\h_{12}\end{pmatrix}+X_2\begin{pmatrix}-h_{12}^*\\h_{11}^*\end{pmatrix},$$

或者

$$X_1\begin{pmatrix}h_{11}\\-h_{12}^*\end{pmatrix}+X_2\begin{pmatrix}h_{12}\\h_{11}^*\end{pmatrix}$$

就能很好地解出两个数据。又或者,收到的数据并不是上面的形式,但经过简单变形就变成一样了。比如,先收到 $h_{11}X_1+h_{12}X_2$,再收到 $h_{12}(-X_1^*)+h_{11}X_2^*$,虽然看起来不一样,但第二个数取个共轭,就变成了 $-h_{12}^*X_1+h_{11}^*X_2$,也可写成上面想要的第二个接收数据形式。

这就是 Alamouti 一战成名的发射分集方式:第一次发送的时候,天线 1 发 X_1,天线 2 发 X_2;第二次发送的时候,天线 1 发 X_2^*,天线 2 发 $-X_1^*$,这样就很完美了。是不是觉得要是早几年,发现这个方法的可能就是你而不是 Alamouti 了。呵,很多时候都是这样,各个学科的发展也都是这样。

16.2.3 Alamouti 发射分集的性能

下面把噪声考虑进来,看看如何解调以及性能如何。接收端两次接收最后得到的形式为

$$X_1\begin{pmatrix}h_{11}\\-h_{12}^*\end{pmatrix}+X_2\begin{pmatrix}h_{12}\\h_{11}^*\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\tag{16-1}$$

分别对 X_1、X_2 用 MRC 得

$$(|h_{11}|^2+|h_{12}|^2)X_1+(h_{11}^*w_1-h_{12}\omega_2)$$

$$(|h_{11}|^2+|h_{12}|^2)X_2+(h_{12}^*w_1+h_{11}\omega_2)$$

可以看到，对 X_1、X_2 来说，接收信噪比分别为

$$\frac{(|h_{11}|^2+|h_{12}|^2)P(X_1)}{\sigma^2},\quad \frac{(|h_{11}|^2+|h_{12}|^2)P(X_2)}{\sigma^2}$$

我们和 1 发 2 收且信道衰落对应相等的 SIMO 系统比较性能看看，假设两个系统发射总功率相同。SIMO 系统第一次以全功率发送 X_1，第二次以全功率发送 X_2。而对于 MISO 系统的 Alamouti 方法，因为总功率要和 SIMO 相同，所以每次发送 X_1、X_2 的功率分别只有全功率的一半。那么，在信道和噪声相同的情况下，对 X_1、X_2 的接收 SNR 只有 $P(X_1)$、$P(X_2)$ 的不同带来的差异。可以知道这里 Alamouti 方法中每个信号的合并 SNR 只有 SIMO 的一半，即理论上等价于功率减半的 1 发 2 收 SIMO 系统。

如果接收端不只一根接收天线，只要将多根接收天线一起合并即可。例如，假设接收端还有第二根接收天线，发射端到第二根接收天线的信道分别为 h_{21} 和 h_{22}。则第二根天线两次接收的数据为

$$X_1\begin{pmatrix} h_{21} \\ -h_{22}^* \end{pmatrix}+X_2\begin{pmatrix} h_{22} \\ h_{21}^* \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} \tag{16-2}$$

结合式(16-1)中第一根接收天线的数据一起用 MRC 合并，最后的效果理论上等价于功率减半的 1 发 4 收 SIMO 系统。更多接收天线类似。图 16-2 示意了 SISO、SIMO 系统 MRC 与 Alamouti 方法的性能比较。从图中可以看到，SISO 系统的性能最差，这很自然；1 发 2 收 SIMO 系统 MRC 和 2 发 1 收 Alamouti 方案的性能曲线平行，表明它们的分集增益一样，差别只有功率增益，而我们知道 2 发 1 收 Alamouti 方案等价于功率减半的 1 发 2 收 SIMO 系统，所以功率增益方面的差距在 3dB 左右；而 2 发 2 收 Alamouti 方案等价于功率减半的 1 发 4 收 SIMO 系统，其平均接收功率已经和满功率 1 发 2 收 SIMO 系统的接收功率相等了，但是我们看到其性能要比满功率 1 发 2 收 SIMO 系统的性能好，这又很好地体现出了固为接收天线更多(4:2)带来更大分集增益的贡献。

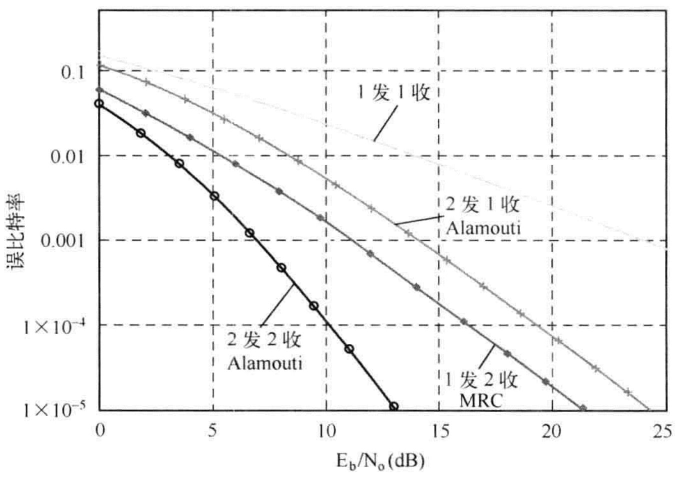


图 16-2　SISO，SIMO 采用 MRC 与 Alamouti 性能比较

回到2发1收的MISO系统，这里MISO系统的Alamouti方法要想达到SIMO系统MRC一样的性能，发送总功率需要提高一倍。既然还要多消耗一倍功率才能达到相同的性能，何苦这样呢，用SIMO系统不就挺好的吗？是的，理论上是这样。但从其他现实方面来说，MISO Alamouti也还是有好处的。不深入挖掘了，简单感觉一下：就目前的无线通信系统来说，发射端和接收端是不对称的。总体来说，主要的发射端一般是个大家伙，比如基站，而接收端是个小玩意儿，比如手机。你是想在大家伙上多摆两根天线，还是在小玩意儿上多摆两根天线呢？好像摆在大家伙上容易点。

16.2.4 基于Alamouti思想的推广

上面讲的Alamouti发射分集方案，只涉及发射端有两根天线的处理方式，这个方式能在两个符号时间里发送两个数据符号，平均一个符号时间发送了一个数据符号，即所谓的满速率发送，并且每个符号还获得了分集增益，真是鱼与熊掌兼得也。很自然就会想到，如果天线个数不是两个，有类似的发射分集方案吗？如果有，平均一个符号时间发送多少个数据符号呢？还是满速率吗？

这个研究涉及非常数学的东西——正交设计(Orthogonal Design)。实际上，除了Alamouti发射分集方案之外，对于多于两天线情况，再也找不到第二个(复数意义上的)满速率方案。即使对于稍微大点儿的四天线情况，目前也只能找到速率为3/4的发射分集方案，具体发射方案如下：

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} X_1 & 0 & X_2 & -X_3^* \\ 0 & X_1 & X_3^* & X_2^* \\ -X_2^* & -X_3 & X_1^* & 0 \\ X_3^* & -X_2 & 0 & X_1^* \end{pmatrix}$$

其中，每一列表示每个符号时间往四根天线上映射的数据。

而对于所有天线情况，一般都能找到速率为1/2的发射分集方案，比如3或4天线发送4个数据符号，速率为1/2的方案如下：

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 \\ -x_3 & x_4 & x_1 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 \\ x_1^* & x_2^* & x_3^* \\ -x_2^* & x_1^* & x_3^* \\ -x_3^* & x_4^* & x_1^* \\ -x_4^* & -x_3^* & x_2^* \end{pmatrix},\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1^* & x_2^* & x_3^* & x_4^* \\ -x_2^* & x_1^* & -x_4^* & x_3^* \\ -x_3^* & x_4^* & x_1^* & -x_2^* \\ -x_4^* & -x_3^* & x_2^* & x_1^* \end{pmatrix}$$

其中，每一行表示每个符号时间往3或4根天线上映射的数据。更多的内容，请大家自行参考资料了解。

16.3 更大的惊喜——空间复用能力

前面几节，我们都在集中讲多天线系统能够带来功率合并增益以及分集增益，除了这些好

处外,多天线系统还能带来其他增益吗?答案是肯定的。接下来我们就讲讲多天线能带来的更大惊喜——空间复用能力,即同时传输多路信号。

从实现复杂度上讲,基于线性发射和接收处理的 MIMO 系统是最容易实现的,这也是目前真正广泛应用的 MIMO 形式,所以本书主要讨论基于线性发射接收处理的 MIMO 系统原理和应用。从发射算法和接收算法来说,MIMO 就是方程组理论,是好理解的。MIMO 难的是实际 MIMO 信道的研究,比如城市环境与郊区环境信道有何不同,又如发射天线和接收天线的布放对信道有哪些影响等等。需要大量的实地测量、统计研究,本书暂不考虑 MIMO 信道在不同环境具体是怎么样,为什么会那样。我们的讨论都是假设 MIMO 信道已经是什么样子,如何设计发射端处理以及接收端处理。

16.3.1　空分复用原理呈现一

假设 MIMO 系统有 t 根发射天线,r 根接收天线。发射天线 $j(Tx_j)$ 到接收天线 $i(Rx_i)$ 的信道在每个符号时间内为慢衰落信道,衰落系数为 h_{ij},如图 16-3 所示,并令

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1t} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{r1} & h_{r2} & \cdots & h_{rt} \end{pmatrix}$$

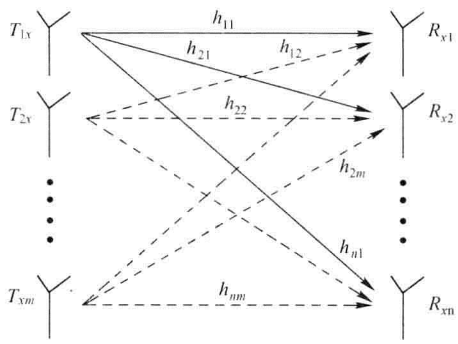


图 16-3　MIMO 收发信道

首先讲 MIMO 信道能支持的数据流数。所谓能支持几个数据流,理想模型就是说在不考虑噪声、干扰等情况下,接收端根据接收到的数据能唯一正确地确定的发射的数据符号的个数。假设系统里有 t 根发射天线,r 根接收天线,并行发射的数据符号有 L 个。注意一共有 t 根天线,每根天线总得发射点东西,那就是最后从发射天线出去的一共有 t 个数据,但实际真正想传递的数据符号只有 L 个,那么就需要先把 L 个数据符号变成 t 个数据。如前面所说,我们主要讨论线性处理,把 L 个数据符号变成 t 个数据的线性处理就是这 L 个符号先乘以一个矩阵然后发射,这个矩阵一般称为预编码矩阵。具体地,假设各天线发射的数据为 z_i,有

$$\boldsymbol{Z}=[z_1,z_2,\cdots,z_t]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{WL} \tag{16-3}$$

其中,$\boldsymbol{W}$ 为 t 行 L 列预编码矩阵;$\boldsymbol{L}=[x_1,x_2,\cdots,x_L]^{\mathrm{T}}$,这 L 个数才是真正想传输的。再记

$$\boldsymbol{HW}=[V_1,\cdots,V_L] \tag{16-4}$$

其中,$\boldsymbol{V}_i$ 是 r 维的列向量 $\boldsymbol{V}_i=[v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{ir}]^{\mathrm{T}}$。

这样,$\boldsymbol{Z}$ 经过信道后,在接收天线 1 上接收到的数据为

$$y_1 = h_{11}z_1 + h_{12}z_2 + \cdots + h_{1t}z_t$$

在接收天线 2 上接收到的数据为

$$y_2 = h_{21}z_1 + h_{22}z_2 + \cdots + h_{2t}z_t$$

依次类推,在接收天线 r 上接收到的数据为

$$y_r = h_{r1}z_1 + h_{r2}z_2 + \cdots + h_{rt}z_t$$

写成矩阵或向量形式为

$$\boldsymbol{Y} = [y_1, y_2, \cdots, y_r]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{HZ} = \boldsymbol{HWL} = x_1\boldsymbol{V}_1 + x_2\boldsymbol{V}_2 + \cdots + x_L\boldsymbol{V}_L \tag{16-5}$$

当接收端知道 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 时,从而就知道 $\boldsymbol{V}_i$。接收端想知道发射端真正想传输的数据 x_i,就相当于解方程,当然该方程必须有唯一解,否则达不到通信目的。而该方程要想有唯一解,必须满足向量组 $\{\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \cdots, \boldsymbol{V}_L\}$ 是无关的这一条件。也就是说要想使矩阵 $\boldsymbol{HW}$ 的秩为 L,就要求 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 的秩都大于等于 L。

综上所述,一个 MIMO 信道若想支持 L 层数据传输,则理论上信道矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的秩(Rank)必须大于等于 L。另一方面,因为预编码矩阵 $\boldsymbol{W}$ 是 $t \times L$ 的矩阵,它的秩要大于等于 L,只能是列满秩的。特别地,若能使得 $\boldsymbol{V}_i$ 是两两相互正交的,那解调数据就更方便了。

16.3.2 空分复用原理呈现二

为了把空间复用原理理解透,我们再换个角度来描述。假设 t 行 L 列预编码矩阵为

$$\boldsymbol{W} = [W_1, W_2, \cdots, W_L] = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1L} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2L} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{t1} & W_{t2} & \cdots & W_{tL} \end{pmatrix}$$

经过预编码后,发射端发射的向量为

$$\boldsymbol{WL} = x_1\boldsymbol{W}_1 + x_2\boldsymbol{W}_2 + \cdots + x_L\boldsymbol{W}_L \tag{16-6}$$

经过信道后接收到的向量是

$$\boldsymbol{HWL} = x_1[\boldsymbol{HW}_1] + x_2[\boldsymbol{HW}_2] + \cdots + x_L[\boldsymbol{HW}_L] \tag{16-7}$$

只要式(16-7)中,向量 $\boldsymbol{HW}_i$ 是无关向量组,那么就可以唯一确定 x_i 了。图 16-4 示意了只发送 $x[\omega_1, \cdots, \omega_t]^{\mathrm{T}}$ 情况下的 MIMO 系统。

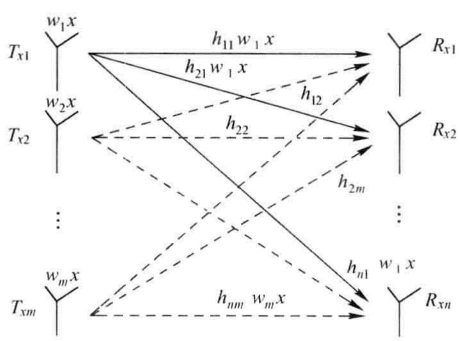


图 16-4 MIMO 线性处理收发系统

那么,从发射端信号(式(16-6))到接收端信号(式(16-7))的转变,我们看到信道的效果就是把一个 t 维空间的一个向量(如 $x_i\boldsymbol{W}_i$)变换(映射)到 r 维空间的一个向量(如 $x_i\boldsymbol{HW}_i$);如果发射端是把几个向量叠加后发射出去,那么接收端就是相应向量分别被信道作用后得到的向量的叠加。而形式上发射端发射的数据流是携带在发射的各个向量($\boldsymbol{W}_i$)上的,那么经过信道后,数据流仍然依附在各向量被信道作用后得到的向量($\boldsymbol{HW}_i$)上。因此,我们要从接收到的合成向量中唯一分解出来发射的数据流,那被信道作用后得到的向量必须无关。

知识扩展　上面讲 MIMO 空分复用流数时,$\boldsymbol{L}=[x_1,\cdots,x_L]^{\mathrm{T}}$ 经过 $\boldsymbol{W}$ 预编码得到 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{WL}=[y_1,\cdots,y_t]^{\mathrm{T}}$,然后发射出去,接收端收到 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{HY}$。会不会有人想:只要 $\boldsymbol{Y}$ 能被唯一解出来,而 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{WL}$,所以 $\boldsymbol{L}$ 就能被唯一解出来。所以,对于多重预编码

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{HABCD}\cdots\ \boldsymbol{WL}$$

要想唯一解出 $\boldsymbol{L}$,应该要求每一重预编码都是唯一解的,对吗?例如 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{HY}$,$\boldsymbol{Y}$ 必须唯一,而 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AU}$,$\boldsymbol{U}$ 必须唯一。

事实上,多重预编码的每一重都能唯一解仅是最后一重能唯一解的充分条件,而非必要条件。最简单的例子就是 MISO 系统,利用预编码向量 $\boldsymbol{W}$ 发射 x,接收端收到 $z=\boldsymbol{HW}x$。想通过 $\boldsymbol{Hy}=z$ 先解出 y 再解 x 是没有办法唯一得到 $\boldsymbol{y}$ 的。理论原因如下:$\boldsymbol{Hy}=z$ 关于 $\boldsymbol{y}$ 可能有多个解,然而 $\boldsymbol{W}x$ 当 x 遍历所有可能值后,可能只会碰到 $\boldsymbol{y}$ 的多个解中的一个。所以,虽然单看 $\boldsymbol{y}$ 有多个解,但把 $\boldsymbol{W}x$ 的可能取值情况联合起来看,满足 $\boldsymbol{HW}x=z$ 的 x 仍然只有唯一一个。

有兴趣的朋友,也可以考虑一个相关的纯数学问题:线性方程组

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$$

关于 $\boldsymbol{X}$ 有解时,有唯一解的充要条件是什么?其中 $\boldsymbol{A}_i$ 的维数不一定相同,仅要求满足矩阵乘法,即 $\boldsymbol{A}_{i+1}$ 的行数等于 $\boldsymbol{A}_i$ 的列数。根据上面的讨论,显然所有 $\boldsymbol{A}_i$ 都列满秩不是充要条件。

三言两语

这里我们没有讨论任何干扰和噪声,各个数据流 x_i 在目前为止还是平等的地位,没有孰优孰劣。接下来我们加入干扰和噪声等,它们的地位会有一些微妙的变化,注意慢慢体会。

16.4　信道矩阵的 SVD 分解及快速应用

16.4.1　信道矩阵的 SVD 分解及性质

1. SVD 分解

矩阵奇异值分解(Singular Value Decomposition,SVD)是说,任何一个矩阵 $\boldsymbol{H}_{r\times t}=[h_{ij}]$,$h_{ij}\in\mathbb{C}$ 都可以分解成如下形式:

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{U}\sum\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$$

其中,

$$\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{U}_1,\cdots,\boldsymbol{U}_r]=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1r} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{r1} & U_{r2} & \cdots & U_{rr} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}=[V_1,\cdots,V_t]=\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1t} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{t1} & V_{t2} & \cdots & V_{tt} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{U}$,$\boldsymbol{V}$ 都是酉阵(复数域上的标准正交方阵)。矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是 $r\times t$ 的对角阵,记为

$$\Sigma_{r\times t}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}_{r\times t}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \end{pmatrix}_{r\times t}$$

该分解形式中,对角阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 中若要求其 $\min(t,r)$ 个对角元素 λ_i 按从大到小排列 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{\min(r,t)}\geqslant 0$,那么 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是唯一的,但 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$ 不一定唯一。其中,λ_i 称为矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的奇异值,矩阵 $\boldsymbol{U}$ 中的列向量 $\boldsymbol{U}_i$ 称为矩阵的左奇异向量,矩阵 $\boldsymbol{V}$ 中的列向量 $\boldsymbol{V}_i$ 称为矩阵的右奇异向量。假设一个 4 发 4 收的信道 $\boldsymbol{H}_{4\times4}$,信道矩阵中每个元素 h_{ij} 是独立的瑞利衰落时,其奇异值的分布如图 16-5 所示,其中 λ_1 表示最大奇异值的概率密度分布情况,λ_4 表示最小奇异值的概率密度分布情况。

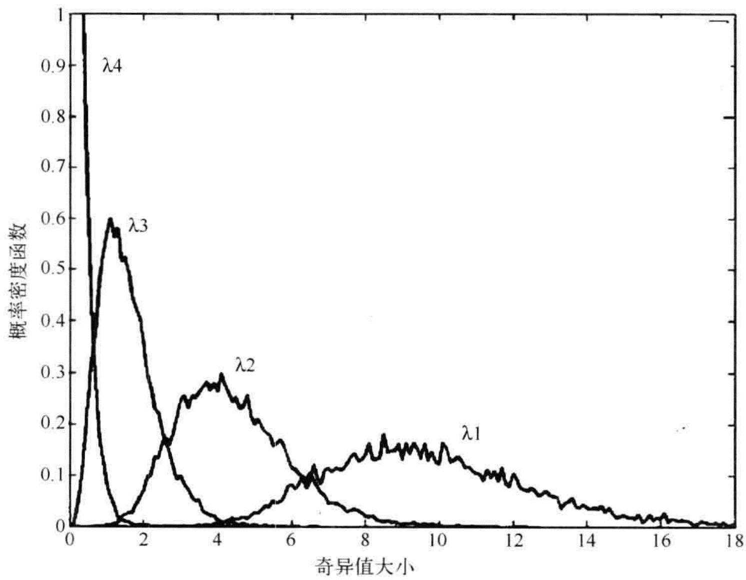


图 16-5 4×4 信道矩阵各奇异值的概率分布函数

2. SVD 分解性质

接下来,我们介绍一些从 SVD 分解能推导出来的性质,其对应证明见附录 E。

性质 16-1　对于有 t 根发射天线，r 根接收天线的 MIMO 信道，记所有 t 根天线到第 i 根接收天线的信道衰落系数为 $\boldsymbol{h}_i=[h_{i1},h_{i2},\cdots,h_{it}]$，信道矩阵

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{h}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{h}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{h}_r^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{H}}$$

那么，所有 t 根天线到第 i 根接收天线的信道衰落系数为

$$\boldsymbol{h}_i=\sum_{j=1}^{\min\{r,t\}}U_{ij}\lambda_j\boldsymbol{V}_j^{\mathrm{H}} \tag{16-8}$$

进而有

$$|\boldsymbol{h}_i|^2=\sum_{j=1}^{\min\{r,t\}}|U_{ij}|^2\lambda_j^2 \tag{16-9}$$

性质 16-2　信道矩阵 $\boldsymbol{H}$ 所有元素的模与其奇异值之间满足

$$\sum_{i,j}|h_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{\min\{r,t\}}\lambda_i^2 \tag{16-10}$$

即信道矩阵的相关矩阵 $\boldsymbol{HH}^{\mathrm{H}}$ 的迹 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{HH}^{\mathrm{H}})$）满足

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{HH}^{\mathrm{H}})=\sum_i\lambda_i^2 \tag{16-11}$$

性质 16-3　给定矩阵 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{H}}$，其奇异值与奇异向量的关系为

$$\boldsymbol{HV}_j=(\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{H}})\boldsymbol{V}_j=\begin{cases}\lambda_j\boldsymbol{U}_j, & j\leqslant\min(r,t)\\ 0, & j>\min(r,t)\end{cases} \tag{16-12}$$

证明　注意 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$ 都是酉阵，展开即得。

3. EVD 分解

除了 SVD 分解外，矩阵的特征值分解（Eigenvalue Decomposition，EVD）也能派上用场。EVD 分解是说，可以把一个方阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 分解成如下形式：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U\Sigma U}^{\mathrm{H}} \tag{16-13}$$

其中，$\boldsymbol{U}$ 为 $n\times n$ 酉阵，$\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$。记 $\boldsymbol{U}$ 的列向量表示为

$$\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\cdots,\boldsymbol{U}_n]$$

那么有

$$\boldsymbol{AU}_i=(\boldsymbol{U\Sigma U}^{\mathrm{H}})\boldsymbol{U}_i=\lambda_i\boldsymbol{U}_i \tag{16-14}$$

因此，根据矩阵特征值的定义知，λ_i 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，其对应特征向量为 $\boldsymbol{U}_i$。

性质 16-4　假设信道矩阵 $\boldsymbol{H}_{r\times t}$ 的 SVD 分解为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{H}}$$

其中，$\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_{\min\{r,t\}}\}_{r\times t}$。那么，信道矩阵的相关矩阵 $\boldsymbol{HH}^{\mathrm{H}}$ 的 EVD 分解为

$$\boldsymbol{HH}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{U\Sigma}'\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \tag{16-15}$$

其中，$\boldsymbol{\Sigma}'=\boldsymbol{\Sigma\Sigma}^{\mathrm{H}}=\mathrm{diag}\{\lambda_1^2,\cdots,\lambda_{\min\{r,t\}}^2,0\cdots,0\}_{r\times r}$，表达式中最后连续 0 的个数为 $r-\min\{r,t\}$。

因为这个性质，在实际应用中，有时 SVD 分解和 EVD 分解可以相互转化。比如，当需要信道矩阵的奇异值时，既可以通过对信道矩阵 $\boldsymbol{H}$ 做 SVD 分解获得，也可以通过对信道相关矩阵 $\boldsymbol{HH}^{\mathrm{H}}$ 做 EVD 分解获得。

16.4.2　从 SVD 另眼相看 MISO 之波束成型

对 MISO 信道矩阵 $\boldsymbol{H}=[h_1,\cdots,h_t]$ 做 SVD 分解，得

$$H=[1]\left(\sqrt{\sum|h_i|^2}\quad 0\quad \cdots\quad 0\right)\begin{pmatrix}\frac{h_1^*}{\sqrt{\sum|h_i|^2}} & V_{12} & \cdots & V_{1t}\\ \frac{\{h_2^*\}}{\sqrt{\sum|h_i|^2}} & V_{22} & \cdots & V_{2t}\\ & & \vdots & \\ \frac{h_t^*}{\sqrt{\sum|h_i|^2}} & V_{t2} & \cdots & V_{tt}\end{pmatrix}^{\mathrm{H}}$$

因为 SVD 分解中 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$ 都是酉阵，其行向量和列向量分别构成 r 维向量空间和 t 维向量空间的正交基。假设发射的信号是 $x\boldsymbol{W}$，那么一定可以写成

$$x\boldsymbol{W}=x\left(\sum_i\alpha_i\boldsymbol{V}_i\right)\tag{16-16}$$

其中

$$\boldsymbol{V}_1=\left(\frac{h_1^*}{\sqrt{\sum|h_i|^2}},\cdots,\frac{h_t^*}{\sqrt{\sum|h_i|^2}}\right)^{\mathrm{T}},\ |\boldsymbol{W}|=1$$

经过上述 MISO 信道，由式(16-12)知接收到的信号是

$$x\left(\alpha_1\times\sqrt{\sum|h_i|^2}\times 1\ +0+\cdots\right)$$

则此时接收到的信号功率为 $|\alpha_1|^2\times\sum|h_i|^2\times P\{x\}$。由于 $\sum\alpha_i^2=1$，故

$$|\alpha_1|^2\leqslant 1\Rightarrow|\alpha_1|^2\times\sum|h_i|^2\leqslant\sum|h_i|^2$$

当且仅当 $\alpha_1=1,\alpha_i=0,\ i>1$ 时，达到最大信号接收功率，即采用预编码

$$\boldsymbol{W}=\left(\frac{h_1^*}{\sqrt{\sum|h_i|^2}},\cdots,\frac{h_t^*}{\sqrt{\sum|h_i|^2}}\right)^{\mathrm{T}}$$

时能达到最大信号接收功率，这就是 MISO 之波束成型，和前面利用 Cauchy-Schwarz 不等式推导的结果一致。

16.4.3 趁热打铁谈 MIMO 之波束成型

如果用 MIMO 信道只发射单流数据，怎么样的预编码是性能最优的呢？假设信道矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的 SVD 分解

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{H}}$$

$$\boldsymbol{V}=[V_1,V_2,\cdots,V_t]$$

单流数据预编码向量为 $\boldsymbol{W}=[\omega_1,\cdots,\omega_t]^{\mathrm{T}}$，$|\boldsymbol{W}|=1$，发射的是 $\boldsymbol{W}x$，信号 x 功率为 $P(x)$。前面我们已经说过，$\boldsymbol{V}$ 的所有列向量或行向量是 t 维空间的一组标准正交基。那么，$\boldsymbol{W}$ 总可以写成如下形式：

$$\boldsymbol{W}=\sum\alpha_i\boldsymbol{V}_i$$

其中，$\sum\alpha_i^2=1$。则 $\boldsymbol{W}x$ 经过信道后，接收端收到

$$\boldsymbol{HW}x+\boldsymbol{N}=\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{H}}\left(\sum_i\alpha_i\boldsymbol{V}_i\right)x+N=\left(\sum\lambda_i\alpha_i\boldsymbol{U}_i\right)x+\boldsymbol{N}\tag{16-17}$$

其中，$\boldsymbol{N}=[N_1,\cdots,N_r]^{\mathrm{T}}$ 为各天线叠加的噪声向量，$N_i\sim\mathcal{CN}(0,\sigma^2)$。采用 MRC 合并后，接收 SNR 为

$$\sum \lambda_i^2 \alpha_i^2 \frac{P(x)}{\sigma^2} \tag{16-18}$$

显然,选取一组 α_i 使得 $\sum \lambda_i^2 \alpha_i^2$ 达到最大时,就是最优的。又显然

$$\sum \alpha_i^2 \lambda_i^2 \leqslant \boldsymbol{\Sigma} \alpha_i^2 \max_i \{\lambda_i^2\} = \max_i \{\lambda_i^2\} = \lambda_1^2 \tag{16-19}$$

当且仅当 $\alpha_1 = 1, \alpha_i = 0\ (i > 1)$ 时,达到最大值。也就是选择最大那个 λ_i 对应的 $\boldsymbol{V}_i$ 作为预编码向量时达到最优。一般情况下,我们在 $\boldsymbol{H}$ 的 SVD 分解中都把对角阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 中的对角元素按从大到小排列,那么也就有

$$\max_i \{\lambda_i^2\} = \lambda_1^2$$

也就是发射 $x\boldsymbol{V}_1$ 达到最优,其接收 SNR 为

$$\lambda_1^2 \frac{P(x)}{\sigma^2}$$

后续对 MIMO 发射单流情况,我们也称其为 MIMO 之波束成型。

上面我们讲了 MIMO 时也可以只发射单流,并且也知道该单流应该怎么预编码达到最好的性能。那么,我们先撇开 MIMO 能提供多流并行发射这个特性不管,就只比较一下,MIMO 之波束成型与 MISO 之波束成型有何差别? MIMO 会好于 MISO 吗?

假设系统里最开始只有一根接收天线 1,有 t 根发射天线,这个 MISO 系统里 t 根发射天线到接收天线 1 的信道为

$$\boldsymbol{h}_1 = [h_{11}, h_{12}, \cdots, h_{1t}]$$

此时最佳发射方法是发射

$$x\left(\frac{h_{11}^*}{|h_1|}, \frac{h_{12}^*}{|\boldsymbol{h}_1|}, \cdots, \frac{h_{1t}^*}{|\boldsymbol{h}_1|}\right)^{\mathrm{T}}$$

接收天线 1 接收到信号 $|\boldsymbol{h}_1| x + \mathrm{w}_1, w_1 \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$,其接收 SNR 为

$$|\boldsymbol{h}_1|^2 \frac{P(x)}{\sigma^2}$$

好,现在在系统里多摆 $r-1$ 根接收天线,变成 t 发 r 收的 MIMO 系统,发射端 t 根天线到第 i 根接收天线的信道为

$$\boldsymbol{h}_i = [h_{i1}, h_{i2}, \cdots, h_{it}]$$

先不考虑如何优化这个 MIMO 系统的信号发送方法,仍然按 MISO 系统的最佳发射方法来发射

$$x\left(\frac{h_{11}^*}{|\boldsymbol{h}_1|}, \frac{h_{12}^*}{|\boldsymbol{h}_1|}, \cdots, \frac{h_{1t}^*}{|\boldsymbol{h}_1|}\right)^{\mathrm{T}}$$

定性地看,r 根接收天线接收到的信号分别为 $q_i x + w_i$ 的形式,其中 $q_1 = |\boldsymbol{h}_1|$。这等价于一个 SIMO 系统的接收信号,我们知道相对于 q_i 采用 MRC 合并能达到最大接收 SNR。并且合并后的 SNR 一定大于合并前任意一根接收天线上的 SNR,也就是说一定大于接收天线 1 的 SNR。因此,MIMO 一定有机会比 MISO 系统获得更高接收 SNR,从而有性能提升。

上面讨论了没有优化的 MIMO 系统,我们看优化后又怎么样。对 MIMO 信道矩阵 $\boldsymbol{H}$ 做 SVD 分解

$$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{h}_1^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{h}_r^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{H}}$$

采用 MIMO 之波束成型最佳发射的是 $x\boldsymbol{V}_1$，其接收 SNR 为 $\lambda_1^2 P(x)/\sigma^2$。由 SVD 推导的性质式(16-9)有

$$|\boldsymbol{h}_1|^2 = \sum_j \lambda_j^2 |U_{1j}|^2$$

因为 λ_1 最大，从而有

$$\lambda_1^2 = \sum_j \lambda_1^2 |U_{1j}|^2 \geqslant \sum_j \lambda_j^2 |U_{1j}|^2 = |\boldsymbol{h}_1|^2$$

从而，MIMO 之波束成型的接收 SNR 大于 MISO 之波束成型的接收 SNR。那么，可以看到即使发射单流数据，MIMO 之波束成型也要比 MISO 之波束成型好，所以看起来多些天线总是有好处的。

16.4.4 还有惊喜吗——透过 SVD 再看空分复用能力

从信道矩阵的 SVD 分解可以看出，信道矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的秩等于 SVD 分解中对角矩阵中的对角元素 λ_i 中非 0 元素个数。

前面我们已经提到每个数据流在映射到天线时是乘以一个向量，也就是说发射端发射了一个 t 维向量，而经过信道以后，接收端接收到了一个 r 维向量。因为 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$ 是酉阵，所以它们各自的行向量或者列向量构成其对应维数的向量空间的基，那么其他任何一个同维数(同一空间)的向量都可以由它们线性表示出来。

例如，发射端发射的 $x_j\boldsymbol{W}_j$ 可以表示成

$$x_j\boldsymbol{W}_j = x_j\left(\sum_i \alpha_{ji}\boldsymbol{V}_i\right)$$

若 $|\boldsymbol{W}_j| = 1$，那么有 $\sum_i \alpha_{ji}^2 = 1$，则经过信道后，接收端接收到

$$\begin{aligned} x_j[\boldsymbol{H}\boldsymbol{W}_j] &= x_j\left[\boldsymbol{H}\left(\sum_i \alpha_{ji}\boldsymbol{V}_i\right)\right] = x_j\left[\left(\sum_i \alpha_{ji}\boldsymbol{H}\boldsymbol{V}_i\right)\right] \\ &= x_j[(\alpha_{j1}\lambda_1)\boldsymbol{U}_1 + (\alpha_{j2}\lambda_2)\boldsymbol{U}_2 + \cdots] \end{aligned}$$

自然地，若发射端发射了数据流为

$$\sum_j x_j\boldsymbol{W}_j$$

接收端收到的信号为

$$\sum_j x_j[(\alpha_{j1}\lambda_1)\boldsymbol{U}_1 + (\alpha_{j2}\lambda_2)\boldsymbol{U}_2 + \cdots]$$

理想情况下，只要 x_j 对应的向量组 $[(\alpha_{j1}\lambda_1)\boldsymbol{U}_1 + (\alpha_{j2}\lambda_2)\boldsymbol{U}_2 + \cdots]$ 是无关向量组，就可以还原 x_j 了。注意到，若信道矩阵的秩为 $L \leqslant \min\{t, r\}$，即当 $i > L$ 时 $\lambda_i = 0$，那么向量组 $[(\alpha_{j1}\lambda_1)\boldsymbol{U}_1 + (\alpha_{j2}\lambda_2)\boldsymbol{U}_2 + \cdots]$ 实际形如 $[(\alpha_{j1}\lambda_1)\boldsymbol{U}_1 + (\alpha_{j2}\lambda_2)\boldsymbol{U}_2 + \cdots + (\alpha_{jL}\lambda_L)\boldsymbol{U}_L]$。也就是说，所有 x_j 对应的向量是向量组 $\{\boldsymbol{U}_1, \cdots, \boldsymbol{U}_L\}$ 生成的空间里的向量，显然这个空间里最多能找到 L 个无关向量。因此，该信道最多能分离 L 个数据流 x_j。

如果发射端把数据 x_1 携带在向量 $\boldsymbol{V}_j$ 上，且 $j > \min\{r, t\}$ 或者不幸对应的 $\lambda_j = 0, j \leqslant \min\{r, t\}$，此时会有接收信号

$$\boldsymbol{H}(x_1\boldsymbol{V}_j) = 0$$

这样的话，接收端能得知 x_1 是多少吗？如果发射端把数据 $\boldsymbol{L} = [x_1, x_2, \cdots, x_L]$，用预编码矩阵 $\boldsymbol{W} = [\boldsymbol{V}_j, \boldsymbol{V}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{V}_{j+L-1}]$ 进行预编码后发射，其中 $\boldsymbol{V}_j, \cdots, \boldsymbol{V}_{j+L-1}$ 对应的 $\lambda_j, \cdots, \lambda_{j+L-1}$ 都等于 0，则会有

$$\boldsymbol{HWL}=0$$

理论上，接收端什么都解不出来。可以看到，即使 $\boldsymbol{H}$ 的秩为 $\boldsymbol{L}$，预编码矩阵 $\boldsymbol{W}$ 也是列满秩的，有时也不能支持 L 层数据流的传输，需要选择合适的预编码 $\boldsymbol{W}$ 才行。

如何确定预编码 $\boldsymbol{W}$ 呢？MIMO 系统里，一种较简单的预编码方法就是把要传输的数据流携带在相互正交的向量上发射出去，我们把这样的发射系统称为正交系统。这样做的好处是，接收端处理比较简单，因为信道（矩阵）作为线性映射会把发射端正交向量变成接收端正交向量，从而从接收端来看数据流也是被携带在相互正交的向量上。

我们先看例子：假设信道的秩为 L，把 $k \leqslant L$ 层数据流 $[x_1,\cdots,x_k]^{\mathrm{T}}$ 分别携带在信道矩阵 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{H}}$ 中 V 的列向量 $\boldsymbol{V}_1,\cdots,\boldsymbol{V}_k$ 上，则发射出去的是

$$x_1\boldsymbol{V}_1+\cdots+x_k\boldsymbol{V}_k$$

我们把用信道（右）奇异向量（如 $\boldsymbol{V}_i$）携带数据的系统称为奇异向量系统。发射端信号经过信道，接收端收到的信号是

$$\boldsymbol{\lambda}_1 x_1\boldsymbol{U}_1+\cdots+\boldsymbol{\lambda}_k x_k\boldsymbol{U}_k+\boldsymbol{N}$$

其中，N 为噪声，那么，解调 x_i 很简单，不用管其他 x_j，就像 SIMO 系统里发射了 x_i，到接收天线经过的信道衰落为 $\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{U}_i$ 一样，在没有额外干扰时用 MRC 就是不错的接收方法。以解 x_1 为例，应用 MRC，有

$$\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\left(\sum_i \boldsymbol{\lambda}_i x_i\boldsymbol{U}_i+\boldsymbol{N}\right)=\lambda_1 x_1+0+\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{N}$$

注意到，其他 $x_i(i\neq 1)$ 的项都被变成 0 了，是不是很简单？就像并行独立的 k 个 SISO 信道一样，x_i 相互之间没什么牵连。从这里，我们还可以清晰看到，如果信道矩阵有 L 个非 0 奇异值，那么确实可以并行传输 L 个数据；并且如果发射端知道信道矩阵 $\boldsymbol{H}$，我们也看到了采用怎么样的预编码实际能完成 L 流数据传输，比如采用 L 个非 0 奇异值对应的（右）奇异向量。

对于一般的正交系统 $\boldsymbol{Q}$，发射端发射 Qx，接收端收到 $\boldsymbol{HQ}x$，应用 MRC 合并得

$$x'=(\boldsymbol{HQ})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{HQ}x=[\lambda_1' x_1,\cdots,\lambda_k' x_k]^{\mathrm{T}}$$

也就是说，一般正交系统 $\boldsymbol{Q}$ 也是平行信道，但不一定有 $\lambda_i'=\lambda_i$。甚至如上面讨论，有可能某些 $\lambda_i'=0$，那么 x_i 就白传了，解不出来。

实际系统中，发射端可能并不知道信道 $\boldsymbol{H}$ 是什么样子，也就不知道 $\boldsymbol{V}$ 是什么样子。没关系，随便确定一个正交系统，即随便给定 k 个相互正交向量就好，但是有可能不巧的是，你给定的正交向量中，有些携带信号经过信道后可能会被变成 0，那这些向量上携带的数据就遭殃了。这个问题，可能需要接收端反馈或其他手段来解决，这些内容以后再讲。

16.5　MIMO 系统信道容量

碰到新的信道或新的系统，在没有给定具体的调制编码等方法时，讨论容量是必须的，它能让我们了解信道的极限能力。这一节，我们就讨论一下 MIMO 系统的信道容量。

16.5.1　信道奇异向量系统的信道容量

假设信道是不变的，即信道矩阵 $\boldsymbol{H}_{r\times t}$ 是固定的，且为发射端所知，其秩为 L。发射端采用信道奇

异向量系统进行数据发射且发射了 $k \leqslant L$ 个数据流,各个数据流独立编码,那么该系统的信道容量是多少？我们知道奇异向量系统在接收端来看就等价于 k 个并行的 SISO 信道(MRC 合并前为 k 个并行的 SIMO 信道),而各个数据流独立编码,那么信道容量为 k 个并行信道容量之和。

假设发射端总功率为 P,第 i 个数据流经历的等价 SISO 信道为 $\lambda_i x_i + N_i$,其中 λ_i为第 i 个奇异值,第 i 路分得的信号功率为 P_i,$\sum_i P_i = P$,$N_i \sim \mathcal{CN}(0,\sigma^2)$。那么,第 i 个信道的信道容量为

$$\log_2\left(1+\frac{\lambda_i^2 P_i}{\sigma^2}\right) \tag{16-20}$$

从而该 MIMO 系统信道容量为

$$\sum_{i=1}^{k} \log_2\left(1+\frac{\lambda_i^2 P_i}{\sigma^2}\right) \tag{16-21}$$

达到该容量的编码方式为各数据流像在 AWGN 下各自达到信道容量一样即可。

上面的讨论是把发射的数据流个数和每个流的功率分配固定下来讨论信道容量,如果保持数据流个数不变,放开每个数据流的功率限制,即功率在保持总功率的情况下可以灵活分配。那么,当遍历所有功率分配可能性时,信道容量最大的情况是什么呢?

这个优化问题已经不是新问题了,答案就是注水定理:λ_i^2 越大,对应的数据流分配的功率越多,反之越少,甚至没有。最佳分配功率为

$$P_i = \max\left\{\frac{1}{\lambda}-\frac{\sigma^2}{\lambda_i^2},0\right\}, i=1,\cdots,k \tag{16-22}$$

其中,λ 的取值要满足

$$\sum_{i=1}^{k} P_i = P$$

注意到,根据注水定理分配功率,有可能某个数据流的分配功率为 0,那么实际上这个对应的数据流相当于不传输数据,也就是说,此时真正传输的数据流个数不是 k 个,从而该优化问题的前提条件准确说应该写成"当最大数据流个数不超过 k 个时的最大容量问题"。从另一个角度来说,其实 k 没必要限制到 $k \leqslant L$,而是可以限制到 $k \leqslant \min\{t,r\}$。因为对于那些奇异值为 0 的数据流,按注水定理是不会给它们分配功率的。也就是说,即使把 k 的限制放宽,放宽出来的对应于奇异值为 0 的数据流是不会用来传输数据的,实质上不会产生影响。

当允许的最大数据流个数 k 增大,其遍历功率分配情况的信道容量一定不会减小,因为最大数据流个数小的优化问题是最大数据流个数大的一个功率分配情况的子集,即多出来的那些功率总是为 0。那我们接下来就以信道允许的最大数据流个数 L 来继续讨论信道容量,当然最优功率分配还是满足注水定理,就不赘述了。

三言两语

本章前面开始讲空分复用原理的时候,各数据流地位是平等的。现在我们看到,在有噪声的实际信道中,各数据流的地位慢慢变得不平等了,比如这里的最优功率分配就使得各数据流信号功率不一样。

特别地,当各个流功率分配相等时,即 $P_i = \frac{P}{L}$,信道容量

$$C = \sum_{l=1}^{L} \log_2\left(1+\frac{|\lambda_i|^2 P}{L\sigma^2}\right) = \log_2 \det\left(I+\frac{\mathrm{SNR}}{L}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) \tag{16-23}$$

其中，det 为行列式运算符。那么，我们看到平均分配功率时，信道容量只取决于信道相关矩阵 $\boldsymbol{HH}^{\mathrm{H}}$，即取决于各收发天线间信道的相关性。当 $\mathrm{SNR}=\frac{P}{\sigma^2}$较高时，有

$$\log_2\left(1+\frac{|\lambda_i|^2P}{L\sigma^2}\right)\approx\log_2\left(\frac{|\lambda_i|^2P}{L\sigma^2}\right) \tag{16-24}$$

从而

$$C\approx L\log_2\mathrm{SNR}+\sum_{i=1}^{L}\log_2\left(\frac{\lambda_i^2}{L}\right) \tag{16-25}$$

注意到这个容量后半部分是由信道本身确定的，是不能被人为改变的，前面部分和功率使用情况相关。我们知道如果是 SNR 较高的 SISO 系统，其最大信道容量为 $\log(1+\mathrm{SNR})\approx\log\mathrm{SNR}$。也即是说，当 SNR 高时，式(16-25)所示的多天线系统的信道容量相对于相同 SNR 的单天线系统来说，呈 L 倍线性增长。前面，我们在讨论香农容量公式的时候也讲过，当 SNR 很高时，信道容量其实对信号功率是不敏感的；即功率上的一点差别，并不会带来多大的信道容量差别。所以，当 SNR 很高时，虽然按照注水定理得到的最佳功率分配仍然一般各不相同，但是平均功率分配和最佳功率分配得到的信道容量差别不大。因此，在 SNR 很高时，平均功率分配的信道容量几乎趋近于最佳容量。

再者，平均功率分配时的信道容量

$$C=\sum_{i=1}^{L}\log_2\left(1+\frac{|\lambda_i|^2P}{L\sigma^2}\right)\leqslant L\log_2\left(1+\frac{P}{L\sigma^2}\sum_{i=1}^{L}\frac{\lambda_i^2}{L}\right)\approx L\log_2\mathrm{SNR}+\log\frac{\sum_i\lambda_i^2}{L^2} \tag{16-26}$$

其中，不等式≤利用了 $\log(1+x)$ 凸函数性质詹森(Jensen)不等式

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log_2(1+x_i)\leqslant\log_2\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{k}\right) \tag{16-27}$$

当且仅当 x_i 相等时取得等号，即式(16-26)所示的容量公式中当且仅当所有 λ_i 相等时，取得等号。也就是说，$\max_i\{\lambda_i\}=\min_i\{\lambda_i\}$ 时，信道容量达到最大值。事实上，理论分析可以证明，$\frac{\max_i\{\lambda_i\}}{\min_i\{\lambda_i\}}$越趋近于 1，信道容量越大。通常也把比值$\frac{\max_i\{\lambda_i\}}{\min_i\{\lambda_i\}}$定义为信道矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的条件数(Condition Number)。

另一方面，从信道矩阵的 SVD 可以知道

$$\sum_{i=1}^{L}\lambda_i^2=\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{HH}^{\mathrm{H}}\}=\sum_{i,j}|h_{ij}|^2$$

那么，在高 SNR 区域，信道容量 C 满足

$$C\leqslant L\log_2\mathrm{SNR}+\log_2\frac{\sum_{i=1}^{L}\lambda_i^2}{L^2}=L\log_2\mathrm{SNR}+\log_2\frac{\sum_{ij}|h_{ij}|^2}{L^2}$$

也就是说，在高 SNR 且等功率分配时，所有信道总增益 $\sum|h_{ij}|^2$ 相同的信道，信道容量上限差不多，就看哪个信道的条件数低了。条件数越低，就越接近这个信道容量上限。

而当 SNR 较低时，任何功率分配

$$C = \sum_{i=1}^{L} \log_2\left(1 + \frac{|\lambda_i|^2 P_i}{\sigma^2}\right) \approx \sum_{i=1}^{L} \frac{P_i \lambda_i^2}{\sigma^2} \log_2 \mathrm{e}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{L} \frac{P_i \max_i\{\lambda_i^2\}}{\sigma^2} \log_2 \mathrm{e} = \frac{P\log_2 \mathrm{e}}{\sigma^2} \max_i \{\lambda_i^2\}$$

当把所有功率分配给奇异值最大的数据流时,信道容量最大。注意,这里并不是说注水定理的最后结果一定是所有功率都分配给奇异值最大的数据流,其他流功率为0。这要求首先要在第一步的近似"≈"非常准确时,这两个才完全一致。通常情况下,各个数据流理论上可能还是分别有点功率的,并不会真正为0。

16.5.2 一般 MIMO 系统的极限传输能力

1. 一般系统的信道容量

讨论一般 MIMO 系统的信道容量,仍然可以根据推广的互信息来计算。假设一共有 t 个发射天线,有 r 根接收天线,信道矩阵 $\boldsymbol{H}_{r\times t}$ 为接收端所知,各天线发射数据为 $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_t]$,其中各天线信号功率为 $\mathrm{E}\{|x_i|^2\} = P_i$,信号总功率为

$$\mathrm{E}\{|\boldsymbol{x}|^2\} = P$$

并记各天线发射数据的相关矩阵

$$\boldsymbol{K}_x = [x_1, \cdots, x_t]^{\mathrm{H}}[x_1, \cdots, x_t]$$

那么,显然相关矩阵 $\boldsymbol{K}_x$ 的迹有 $\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{K}_x\} = P$。则,接收到的信号为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{w}$$

该 MIMO 系统信道容量表示成互信息为

$$C = \max_{P_{\boldsymbol{x}}; \mathrm{E}\{|x_i|^2\} = P_i} I[\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{H}]$$
$$= \max_{P_{\boldsymbol{x}}; \mathrm{E}\{|x_i|^2\} = P_i} \mathrm{E}_H\{I[(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{H}]\}$$

首先对于给定信道矩阵 $\boldsymbol{H}$,条件互信息

$$I[(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{H}] = H(\boldsymbol{y}) - H(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x})$$
$$= H(\boldsymbol{y}) - H(\boldsymbol{w})$$
$$\leqslant \log_2\left(\det\left(I + \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)\right)$$

其中,当且仅当发射的数据 $\boldsymbol{x}$ 是循环对称(Cyclic Symmetric)高斯随机向量时取得等号。从而此时的信道容量满足

$$C \leqslant \mathrm{E}_{\mathrm{H}}\left\{\log_2 \det\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)\right\} \tag{16-28}$$

其中,当且仅当发射的数据 $\boldsymbol{x}$ 是循环对称随机向量时取得等号。当遍历所有功率分配情形时,也即遍历满足 $\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{K}_x\} = P$ 的所有循环对称随机向量,找到最大值就可得到该系统的信道容量为

$$C = \max_{\substack{\boldsymbol{x} \sim \mathcal{CN}(0, K_x) \\ \mathrm{Tr}\{K_x\} = P}} \mathrm{E}_{\mathrm{H}}\left\{\log_2 \det\left(I + \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)\right\}$$

固定信道作为一种特殊情形,假设信道固定为 $\boldsymbol{H}$,该信道容量为

$$C = \max_{\substack{\boldsymbol{x} \sim \mathcal{CN}(0, K_x) \\ \mathrm{Tr}\{K_x\} = P}} \log_2 \det\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)$$

和 SISO 系统类似,MIMO 信道也可以讨论随机慢衰落信道的溢出容量和溢出概率等,这里不做深入讨论了。

2. 一般正交系统的信道容量

对于有 t 根发射天线,r 根接收天线的 MIMO 系统,基于该 MIMO 系统的正交系统如下:给定一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_{t\times t}$,信号携带在矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量上发射出去,携带在各列向量上信号相互独立(没有联合编码)。该通信系统模型为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}$$

其中,$\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_t]^{\mathrm{T}}$,且 $\mathrm{E}\{|x_i|^2\} = P_i$。当某个 $P_i = 0$ 时,表示实际上没发信号 x_i。又因为假设 x_i 相互独立,那么相关矩阵 $\boldsymbol{K}_x = \mathrm{diag}\{P_1, \cdots, P_t\}$ 为对角阵。根据上一节讲的信道容量可知,该正交系统的信道容量为

$$C = \mathrm{E}_{\mathrm{H}}\left\{\log_2 \det\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)\right\}$$

当且仅当每个 $x_i \sim \mathcal{CN}(0, P_i)$ 即可达到该信道容量。特别地,若是所有 x_i 等功率分配,即 $\boldsymbol{K}_x = \mathrm{diag}\left\{\frac{P}{t}, \cdots, \frac{P}{t}\right\}$,那么信道容量为

$$C = \mathrm{E}_{\mathrm{H}}\left\{\log_2 \det\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)\right\} = \mathrm{E}_{\mathrm{H}}\sum_i \log_2\left(1 + \frac{\lambda_i^2 P}{\sigma^2 t}\right)$$

可以看到,对于平均分配功率,信道容量和正交系统 $\boldsymbol{Q}$ 无关,即任何正交系统的信道容量相等,只取决于信道本身。再特别地,当 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{V}$ 时,且 $\boldsymbol{V}$ 随 $\boldsymbol{H}$ 变化而相应变化,信道容量为

$$\begin{aligned} C &= \mathrm{E}_{\mathrm{H}}\left\{\log_2 \det\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)\right\} \\ &= \mathrm{E}_{\mathrm{H}}\left\{\log_2 \det\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\right)\right\} \\ &= \mathrm{E}_{\mathrm{H}}\sum_i \log_2\left(1 + \frac{\lambda_i^2 P_i}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

当且仅当每个 $x_i \sim \mathcal{CN}(0, P_i)$ 即可达到该信道容量,和矩阵奇异向量系统的结果一致。并且上面式子里若是等功率分配 $P_i = P/t$,显然也能说明任何正交系统的信道容量相等,因为连奇异向量系统也是一样的信道容量。最后,进一步,若发射端知道信道,可以采用注水定理进行功率分配达到最优。

上面讲了一些基本的发射接收算法思想,更多具体发射接收算法,比如贝尔实验室提出的 BLAST 系列算法等,本书就不具体详细讨论了,请读者朋友自行查阅资料。

16.5.3　博弈——分集能力和复用能力

对于一个多发多收的 MIMO 系统,我们已经看到既可以只发一个数据流,比如波束成型,仅用来获取分集增益,也可以发射多于一个数据流来获得复用增益,当然仍然有分集增益,只不过相对就要下降一些。那么,到底该发射几个数据流,从复用增益和分集增益两方面来看是

一个比较好的折中呢？首先，如上一节所讲，在低 SNR 情况下只发射对应于最大奇异值的一个数据流基本上达到信道容量，所以根本谈不上复用能力，也就不存在什么联合讨论复用能力和分集能力了，没得讨论。所以，我们只在高 SNR 区域联合讨论复用能力和分集能力。要讨论这两个能力，首先要量化这两个能力，这个工作由 David Tse 和 Lizhong Zheng 在 2003 年左右完成。他们提出了复用增益阶数和分集增益阶数的概念，其定义如下：

定义 16-1 如果一个方案在信噪比为 SNR 时能支持的速率 $R(\mathrm{SNR})$ 满足

$$\lim_{\mathrm{SNR}\to\infty}\frac{R(\mathrm{SNR})}{\log \mathrm{SNR}}=r$$

那么，称该方案的复用增益阶数为 r；如果一个方案在信噪比为 SNR 时能支持的平均误码率 $P_e(\mathrm{SNR})$ 满足

$$\lim_{\mathrm{SNR}\to\infty}\frac{P_e(\mathrm{SNR})}{\log \mathrm{SNR}}=-d$$

那么，称该方案的分集增益阶数为 d。

显然，任意给定一个方案，总是对应一个复用增益 r 和一个分集增益 d，这两者是相互制约的，不是可以随便取值的。我们说了，通信的性能指标就两个："速率"和"质量"。如果其中一个固定，那么很容易就可以比较出另一个。但是，如果没有把这两者之一限制住，那么该如何比较两个方案呢？这也是定义复用增益和分集增益的意义所在。具体内容本书暂时不深入讨论了，建议有兴趣的读者可参考 David Tse 等的论文。

16.6 信号发射和接收算法讨论

16.6.1 信号发射算法——到哪个山头唱哪支歌

前面讲了 MIMO 原理的一些特殊模型（MISO，SIMO）、理想情况（SVD，注水定理）以及一些极限性能（信道容量）。但在实际系统中，到底怎么把 MIMO 的性能发挥出来呢？该采用多少个数据流发射，各个数据流采用什么调制编码方式，该采用什么预编码？这些关于实际信号发射方法的问题还有待讨论。总体来说，信号发射方法的确定很难泛泛地讲全面，需要结合很多具体的细节才能讲得清楚，这个工作我们就留到下一部分，结合 LTE 的一些实际情况继续讨论，这里仅概括描述一些基本想法。

如果发射端直接能获得信道信息，比如利用 TDD 系统的信道互易性，A 到 B 的信道可以通过测量 B 到 A 的信道来获得。那么发射端可以结合其他系统限制，比如系统能支持的最大数据流个数、功率分配限制等，发射端通过计算选择一个合适的信号调制编码方式和预编码，然后发射信号，比如 LTE TDD 系统里波束成型模式。

如果发射端不能知道真实的信道信息 $\boldsymbol{H}$，而一般接收端知道信道 $\boldsymbol{H}$，在信道变化相对较慢时，接收端可以根据当前信道情况，计算推荐一个调制编码方式和预编码给发射端，发射端采用推荐的信息来应用到接下来的信号发射，比如 LTE 里闭环空分复用模式。

而如果信道变化很快，即使接收端知道当前的信道 $\boldsymbol{H}$，它推荐的东西也可能没用。因为，接下来发射端打算应用推荐信息时，信道可能已经不再是 $\boldsymbol{H}$ 了。这个时候就需要采用一些分集的思想来处理了，比如 LTE 里基于 Alamouti 的发射分集方法或者开环空分复用模式。

总体来说,需要根据具体的应用场景来对应考虑,到哪个山头唱哪支歌!

16.6.2　信号接收算法——接替发射端操心

当发射端确定好要发多少个数据流,采用的是什么预编码后,剩下的就该接收端操心了。假设发射端发射的信号为 $\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_L]^{\mathrm{T}}$,采用的预编码为 $\boldsymbol{W}=[\boldsymbol{W}_1,\cdots,\boldsymbol{W}_L]$。经过信道后,接收端收到信号

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{HWx} + z + n = \sum_i x_i \boldsymbol{HW}_i + \boldsymbol{z} + \boldsymbol{n} \tag{16-29}$$

其中,$\boldsymbol{z}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 分别是干扰和噪声。讲原理的时候也提到,一般系统采用相干解调,也即接收端需要知道 $\boldsymbol{HW}$。而得到 $\boldsymbol{HW}$ 一般有两种方法,一种是通过没有被处理过(被污染过)的参考信号(如 LTE 公共参考信号 CRS)来估计得到信道 $\boldsymbol{H}$,同时发射端指示接收端用到的预编码 $\boldsymbol{W}$,然后合成 $\boldsymbol{HW}$;另一种是通过用 $\boldsymbol{W}$ 处理过的参考信号(如 LTE 专用参考信号 DRS)来直接估计得到等效信道 $\boldsymbol{HW}$。这两种方法的具体实现例子,我们在下一部分讲 LTE 内容时再详细讲。

回忆一下我们讲过的常用接收算法或者叫均衡算法,对比发现那些接收算法都可以用在这里,比如:

- 可以采用最大似然接收。接收端在计算先验概率时,需要知道可能的信号集合;而实际系统中发射的信号 x_i,一般是某种调制星座点,接收端知道具体是哪种调制方式,因此可以采用最大似然接收。当然实际系统中,需要考虑复杂度。比如,每个 x_i 采用的调制阶数可能很高,比如 64QAM,每个 x_i 的可能性就是 64 种,每次信号 $\boldsymbol{x}$ 就有 64^L 种可能性,要计算 64^L 个概率;再加上实际不可能每次只发一个信号 $\boldsymbol{x}$,而是一个数据包,包含很多个 $\boldsymbol{x}$,那计算量就更大了。所以,最大似然接收在很多情况下虽然性能相对较好,但有可能不适用。
- 可以对每个 x_i 采用对应的$(\boldsymbol{HW}_i)^{\mathrm{H}}$ 进行 MRC 合并。相对于每个 x_i 来说,除了有真正的干扰 $\boldsymbol{z}$ 外,还有其他 x_j 带来的干扰,其性能取决于整体干扰是否和信号 $x_i\boldsymbol{HW}_i$ 相关。
- 如果接收端知道真正的干扰 $\boldsymbol{z}$,接收端知道每个 $\boldsymbol{HW}_i$,因此对于每个 x_i 可以采用 ZF 把其他 x_j 的干扰和干扰 $\boldsymbol{z}$ 消除。其性能也取决于干扰是否和信号 $x_i\boldsymbol{HW}_i$ 相关。
- 最后可以采用折中的方法 LMMSE,如果接收端知道外部干扰 $\boldsymbol{z}$ 的统计情况比较适用,比如干扰 $\boldsymbol{z}$ 相关矩阵 $\boldsymbol{R}_z = E\{\boldsymbol{zz}^{\mathrm{H}}\}$。

总之,具体采用哪种接收算法也要考虑真实的系统模型,要根据接收端能获得的辅助信息、能承受的计算复杂度等统一考虑抉择。

16.7　MIMO 原理在不同场景下的具体应用

我们前面讲过的 MIMO 原理其实是点对点的 MIMO 原理,也是最基本的形式。回忆一下,前面我们讲点对点 MIMO 原理时说:假设发射端发射的向量为

$$\boldsymbol{WL} = x_1\boldsymbol{W}_1 + x_2\boldsymbol{W}_2 + \cdots + x_L\boldsymbol{W}_L \tag{16-30}$$

经过信道 $\boldsymbol{H}$ 后接收到的向量是

$$\boldsymbol{HWL} = x_1[\boldsymbol{HW}_1] + x_2[\boldsymbol{HW}_2] + \cdots + x_L[\boldsymbol{HW}_L] \tag{16-31}$$

只要 $\boldsymbol{HW}_i$ 之间无关就行了,对吧?大家觉察到什么没有?OK,注意实质是要求 $\boldsymbol{HW}_i$ 作为一

个整体出现的向量之间是无关的，至于这个整体向量是不是可以写成同一个 $\boldsymbol{H}$ 再乘以另外一个向量，这不是关键。所以，假如接收端接收到的是

$$x_1[\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{W}_1]+x_2[\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{W}_2]+\cdots+x_L[\boldsymbol{H}_L\boldsymbol{W}_L] \tag{16-32}$$

而 $\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{W}_i$ 之间是无关的，接收端理论上也能够解调出 x_i 了。

基于这个原理推广，在实际应用中，根据实际的条件或者说物理形式衍生出所谓的上行多用户 MU－MIMO、下行多用户 MU－MIMO、透明 MU－MIMO、非透明 MU－MIMO，甚至 CoMP 等细分概念或细分技术。这些细分技术的原理和点对点最基本情形没什么区别，更多的区别在于怎么处理物理形式上的差异。接下来，我们就简单讲讲各衍生形式相关的具体东西，使读者朋友大概了解一下 MIMO 的更广泛应用大概都讨论些什么，以及怎么去讨论这些问题。

16.7.1 下行多用户 MIMO——"我要挑战 10 个"

通常下行多用户 MIMO 是指蜂窝网里基站对多个用户占用相同的时频资源同时发射数据，推广来看我们把一个发射端向多个接收端发射数据都称为下行 MU－MIMO。

下面以同一个发射端向两个接收端 A 和 B 来发射数据为例说明。假设接收端 A 有 r_{A} 根接收天线，接收端 B 有 r_{B} 根接收天线，发射端有 t 根发射天线。发射端到接收端 A 和 B 相应的信道矩阵为 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}$，其中，信道矩阵的列向量表示：

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}=[\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}1},\cdots,\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}t}],\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}=[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}1},\cdots,\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}t}]$$

发射端发射的数据是 $\sum_{i=1}^{L} x_i \mathrm{W}_i$，其中前 $k<L$ 层数据是发射给接收端 A 的数据，剩下的是发射给接收端 B 的数据。记相应的预编码矩阵为

$$\boldsymbol{W}=[\boldsymbol{W}_1,\cdots,\boldsymbol{W}_L],\quad \boldsymbol{W}_{\mathrm{A}}=[\boldsymbol{W}_1,\cdots,\boldsymbol{W}_k],\quad \boldsymbol{W}_{\mathrm{B}}=[\boldsymbol{W}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{W}_L] \tag{16-33}$$

记相应发射的数据为

$$\boldsymbol{X}=[x_1,\cdots,x_L],\quad \boldsymbol{X}_{\mathrm{A}}=[x_1,\cdots,x_k],\quad \boldsymbol{X}_{\mathrm{B}}=[x_{k+1},\cdots,x_L] \tag{16-34}$$

则接收端 A 和 B 分别接收到的信号是

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{X}_{\mathrm{A}}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{X}_{\mathrm{B}} \tag{16-35}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{X}_{\mathrm{A}}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{X}_{\mathrm{B}} \tag{16-36}$$

接下来每个接收端怎么处理接收信号，取决于实际系统中具体的场景和具体设计，主要是看哪些条件是可以提前获取的。当然，不管怎么样，每个接收端至少要知道它自己相关的那一部分信息吧。例如，对于接收端 A 来说，可以估计出信道 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}$，知道预编码矩阵 $\boldsymbol{W}_{\mathrm{A}}$，或者作为一个整体知道 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{A}}$ 以及给它的有几层数据 k；并且单看 A 自己和发射端组成的点对点系统是满足点对点 MIMO 原理的，即 $H_{\mathrm{A}}W_i,\ i=1,\cdots,k$ 是无关的。相对于接收端 A 来说，混合进来的对应于接收端 B 的那部分数据，根据实际设计有多种处理方式，下面仅分两种基本情形讨论：B 的信息对 A 透明还是非透明。

1. 透明下行 MU－MIMO

透明指下行 MU－MIMD 中的多个接收端相互几乎不知道对方的信息，甚至不知道对方的存在。假设接收端 A 并不知道它接收的数据里还包含接收端 B 的数据，它认为接收到的数据都是自己的，即接收端 A 认为应该可以表示成如下左边形式：

$$\sum_{i=1}^{k} x'_i\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{W}_i = \sum_{i=1}^{k} x_i\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{W}_i + \sum_{j=k+1}^{L} x_j\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{W}_j \tag{16-37}$$

但实际上应该是右边形式。显然一般情况理论上就出错了。

那什么情况下,给接收端 B 的数据不会影响到接收端 A 的数据呢?最理想的情况,可能是

$$\sum_{j=k+1}^{L} x_j \boldsymbol{H}_{\mathrm{A}} \boldsymbol{W}_j = 0 \tag{16-38}$$

并且不管发射的数据 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{B}}$ 的具体取值是多少都成立,那么要求

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}} \boldsymbol{W}_j = 0, \quad j = k+1, \cdots, L \tag{16-39}$$

即 $\boldsymbol{W}_j$, $j = k+1, \cdots, L$ 为线性映射 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{Z}$ 的零空间里的向量。

同样,对于接收端 B 来说,最好

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}} \boldsymbol{W}_i = 0, \ i = 1, \cdots, k$$

总结一下就是,发射端在选取预编码矩阵时理想情况应满足

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}_{\mathrm{A}} \boldsymbol{W}_{\mathrm{A}} \text{无关} \\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{A}} \boldsymbol{W}_{\mathrm{B}} = 0 \end{cases}, \begin{cases} \boldsymbol{H}_{\mathrm{B}} \boldsymbol{W}_{\mathrm{B}} \text{无关} \\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{B}} \boldsymbol{W}_{\mathrm{A}} = 0 \end{cases}$$

这个实际上,也是一种 ZF 算法,即在发射端就选取好预编码处理,使得给两个用户的数据到达对方时的贡献为 0,从而没有相互间干扰。当然,实际系统中,因为获取的信道信息准确性和其他设计限制等,一般并不能真正把相互间干扰做到 0,相互间干扰总是存在。并且,如我们在讨论各种基本接收算法时一样,在有干扰的情况下,把干扰完全消除(ZF)不一定是最好的策略,比如来个类似 MMSE 折中的效果更好。因此,虽然上面理论分析给出了发射端选取预编码矩阵的一个准则,但实际系统中并不只有这样一个准则。实际系统中根据能获得的信息,以及想要达到的目的(或者说想优化的目标),可以有很多处理方式,这里就不一一讨论了。

2. 非透明 MU - MIMO

完全非透明的情况,是任何一个接收端知道所有相关信息,包括自己的和与它组成 MU - MIMO 的其他用户的信息,只是发射的数据 X 不知道。比如,接收端明确知道一共发了几个数据流,其中哪些流属于自己的,所有数据流用到的预编码矩阵或每个数据流各自用到的预编码向量是什么,给自己的数据流调制方式以及给其他接收端的数据流调制方式。那么,接收端在接收的时候,它明确知道自己接收的数据中还有其他人的数据,并且其他人的数据的信息它也都知道,这样接收端可以当所有数据都是发射给自己的一样去解,最后只是丢掉给别人的数据而已。

接收端要能解调出这些数据,要求同一个用户发过来的向量是无关的,同时理论上要求不同用户发过来的向量之间也要无关。

上面的讨论是假设发射端已经选好配对做 MU - MIMO 的用户后,理论上应该具备哪些特征保证方法可正确运行。实际上,在这之前需要考虑的问题时,为什么要采用 MU - MIMO?如何确定配对用户?也就是说,不可能为了做 MU - MIMO 而做 MU - MIMO,一定是能带来某些好处,我们才做这事。比如,做这个决定基于的其中一个自然准则就是看信道容量会不会增加,包括一对配对用户的信道容量是否相对其中一个单用户的容量有增加,以及相对于另一配对用户的信道容量是否有增加。从实质上来看,把多个用户联合起来考虑,提供了不同的信道,从而提供了更多的空间自由度,可以使得在相对更大的范围来考虑功率分配问题,扩展了

可优化空间。

16.7.2 上行多用户 MIMO——以多欺少

通常上行多用户 MIMO 是指蜂窝网里多个用户占用相同的时频资源同时向基站发射数据,推广来看我们把多个发射端占用相同时频资源向同一个接收端发射数据都称为上行 MU - MIMO。

下面我们以有两个发射端 A 和 B 来向同一个接收端发射数据为例说明。假设发射端 A 有 t_A 根发射天线,发射端 B 有 t_B 根发射天线,接收端有 r 根接收天线。相应的信道矩阵为 $\boldsymbol{H}_A$ 和 $\boldsymbol{H}_B$,

$$\boldsymbol{H}_A=[\boldsymbol{H}_{A1},\cdots,\boldsymbol{H}_{At_A}],\quad \boldsymbol{H}_B=[\boldsymbol{H}_{B1},\cdots,\boldsymbol{H}_{Bt_B}] \tag{16-40}$$

我们讨论如下两种具体应用情况:

- 情况一,不同发射端发射不同的数据。
- 情况二,不同发射端发射相同的数据。

1. 发射不同的数据

假设每个发射端发射的是不同的数据,假设相应的预编码矩阵为

$$\boldsymbol{W}_A=[\boldsymbol{W}_{A1},\cdots,\boldsymbol{W}_{Ak_A}],\quad \boldsymbol{W}_B=[\boldsymbol{W}_{B1},\cdots,\boldsymbol{W}_{Bk_B}] \tag{16-41}$$

相应发射的数据为

$$\boldsymbol{X}_A=[\boldsymbol{x}_{A1},\cdots,\boldsymbol{x}_{Ak_A}],\quad \boldsymbol{X}_B=[\boldsymbol{x}_{B1},\cdots,\boldsymbol{x}_{Bk_B}] \tag{16-42}$$

则接收端收到的是

$$\boldsymbol{H}_A\boldsymbol{W}_A\boldsymbol{X}_A+\boldsymbol{H}_B\boldsymbol{W}_B\boldsymbol{X}_B=\sum_{i=1}^{k_A}(\boldsymbol{H}_A\boldsymbol{W}_{Ai})x_{Ai}+\sum_{j=1}^{k_B}(\boldsymbol{H}_B\boldsymbol{W}_{Bj})x_{Bj} \tag{16-43}$$

两个用户都发数据给同一个接收端,当然接收端要把它们的数据都解调出来。那么,接收端要能解调出这些数据,要求同一个用户发过来的向量是无关的,同时要求不同用户发过来的向量之间也要无关。那么,两个发射端理论上一共能发射多少个数据流呢?简单分析如下:

- 每个用户能发射的数据流数不超过每个用户和接收端组成的点对点系统能支持的最大流数。
- 不管两个用户各自有多少根发射天线,显然两个用户能同时发射的数据流数之和不能超过 r,因为接收端收到的向量都是 r 维的,不可能有超过 r 个无关向量。

上面只是抛开实际信道情况给定的一个大范围界限。如果给定 $\boldsymbol{H}_A$ 和 $\boldsymbol{H}_B$ 时,具体范围是多少呢?更进一步考虑,

$$\boldsymbol{H}_A\boldsymbol{W}_A\boldsymbol{X}_A+\boldsymbol{H}_B\boldsymbol{W}_B\boldsymbol{X}_B=[\boldsymbol{H}_A\boldsymbol{W}_A,\boldsymbol{H}_B\boldsymbol{W}_B]\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_A\\ \boldsymbol{X}_B\end{pmatrix}=[\boldsymbol{H}_A,\ \boldsymbol{H}_B]\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_A,0\\ 0,\boldsymbol{W}_B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_A\\ \boldsymbol{X}_B\end{pmatrix} \tag{16-44}$$

和点对点情形讨论数据流个数类似,我们知道能支持的最大数据流个数不超过

$$\mathrm{RANK}\{[\boldsymbol{H}_A,\boldsymbol{H}_B]\}$$

这个情况在实际应用中,谁来确定用户 A 和用户 B 各应该发多少个数据流,其对应的预编码矩阵又是多少呢?显然,若用户 A 和用户 B 之间没有任何协作或受控制,且相互不知道对方的信道信息,那么基本上没法正常工作。例如,两个用户都按自己最大能支持的数据流个数来发射数据,那么显然最后两个用户发射的数据流之和会超过 $\mathrm{RANK}\{[\boldsymbol{H}_A,\boldsymbol{H}_B]\}$。即使相

互都知道对方的信道信息，能正常工作吗？还是不能，因为每个用户不敢确定对方用户会采取什么操作，这个有点像博弈论（囚徒困境）。也就是说，实际应用中，两个用户之间需要协作或者由第三方（比如基站）控制确定各自该发多少个数据流以及对应的预编码矩阵是什么。

2. 发射相同的数据

如果两个用户发射相同的东西 $\boldsymbol{X}$，发射端 A 用预编码 $\boldsymbol{W}_{\mathrm{A}}$，发射端 B 用预编码 $\boldsymbol{W}_{\mathrm{B}}$，则接收端接收到

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{A}}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{B}})\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}},\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_{\mathrm{A}}\\ \boldsymbol{W}_{\mathrm{B}}\end{pmatrix}\boldsymbol{X} \tag{16-45}$$

可以看到整个效果仅仅是一个虚拟的发射端整合了两个发射端 A、B 的天线而已。这样的好处是可以复用的数据流可能会增加，因为必然有

$$\mathrm{RANK}\{[\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}},\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]\}\geqslant\max\{\mathrm{RANK}\{\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}\},\mathrm{RANK}\{\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}\}\}$$

或者数据流不想增加，多摆几根天线一般总可以提供更多的分集增益。

第四部分小结

本部分重点介绍了无线通信技术。首先，我们说无线通信主要就是围着无线信道转，所以本部分的开篇重要任务就是介绍无线信道。重点内容主要有衰落、多径传播与相干带宽、信号在无线信道中的连续/离散传播模型等。

接下来，就是介绍各无线信道的极限能力和实际信号处理手段与思想了。比如，我们讨论了信道容量，还讨论了衰落信道下的信道容量和 AWGN 信道容量的差异与联系，例如衰落信道下的信道容量没有唯一的定义，而有些衰落信道下的信道容量可通过转化成 AWGN 下的信道容量来看清楚。具体到实际信号处理手段上，我们介绍了各种常用均衡技术，我们还介绍了利用分集思想来提高可靠性，包括具体的获得分集增益的方法。

最后，介绍了 OFDM 技术在应用于无线环境中会碰到哪些问题以及如何解决。比如，在无线环境中，多径传播会破坏正交性，而添加 CP 可以解决这个问题。而无线信道的开放性使得衰落更严重且不稳定，为了对付衰落，同时又利用了无线信道的开放性和衰落多样性，多天线技术应运而生，我们这部分仅简单介绍了多天线技术的主要原理，而更具体的应用，需要大家在后续的工作学习中去研究完善。

第五部分

LTE 关键技术选讲

前面四部分的内容讲了通信的基本原理,总体来说是从各原理自身的角度来展开描述。然而,通信是一个系统工程,最终需要把这些基本原理整合到一个系统里,使这些基本原理在一个系统框架下运转,发挥作用。那么,一个通信系统是什么样的呢?本部分就讲讲 LTE 系统,希望能从其中基本了解一个现实通信系统是如何工作的,一个标准化的无线通信系统都要解决哪些问题,以及前面几部分讲的内容在一个标准化的系统里以什么样的形式体现出来。

本部分尤其对于学习 LTE 物理层协议(36.211,36.212,36.213)的读者,可以作为一个引导材料。参考该引导材料,结合具体协议细节,应该能更快了解 LTE 系统,但愿!

第 17 章　LTE 概述及多址接入技术

17.1　LTE 概述

为了满足高速率数据传输的需求,以及应对其他技术的竞争等,第三代合作组织(Third Generation Partnership Project,3GPP)在 2004 年启动了长期演进(Long Term Evolution,LTE)项目的研究,在 2008 年完成,也即 3GPP 版本 8(Release 8)。本书这部分内容主要介绍 LTE 系统物理层的主要技术及流程。

在一个系统设计之初,都会确定系统要达到的性能指标,所有研究设计工作都围绕目标达成来开展,而不至于走偏。对于 LTE 系统来说,和物理层相关的性能指标主要包括:

- 支持灵活的系统带宽,带宽范围为 1.4 ~20 MHz。
- 支持下行峰值速率到 100 Mbit/s,上行峰值速率到 50 Mbit/s。
- 同时支持 FDD 和 TDD 系统,并要求两种系统的设计差异尽量小。

当然最后完成的 LTE 系统版本 8 都达到了这些要求。第一,LTE 系统采用 OFDM 技术作为基本的传输方式,而 OFDM 技术天然支持不同带宽,仅子载波个数变化而已,这使得支持灵活带宽容易满足。第二,对于达到要求的峰值速率,是多个技术被引入与优化共同达到的结果。比如,采用高阶调制支持到 64QAM,采用 Turbo 码信道编码,以及支持最高规格到 4 发 4 收的 MIMO 技术等。其中,从贡献来说,可能 MIMO 技术的贡献最大,采用 4 发 4 收的 MIMO 技术可使得下行峰值速率达到 300 Mbit/s,远远超过性能要求,而上行也能达到 75 M。第三,LTE 同时支持 FDD 和 TDD 系统,并且从大的系统架构来说,几乎两者没什么差别。两者主要差别很多都是和时间(时序)相关的一些细节设计,这个后面的内容会说明。

从另一个角度来看,作为一个系统,主要需要定义两方面的东西,一是基本元素和结构,二是如何使用基本元素和结构。首先,和其他蜂窝系统一样,LTE 需要定义如何组织无线资源(时间、频率等),即无线帧结构,包括子帧结构。如何使用这些无线资源就主要涉及用户的复用接入方式了,LTE 讨论之初主要在码分多址(CDMA)和正交频分多址(OFDMA)之间取舍,最后基于正交频分多址(OFDMA)的技术光荣当选。其中,LTE 下行采用最直接的 OFDMA,而上行采用改进的 OFDMA,即具有单载波特性的 SC - FDMA。其次,蜂窝系统一般都是集中式控制系统,那么也就是说有一些东西需要终端听网络侧的,终端需要和网络侧看齐,这些东西包括时间轴(无线帧的时序)、系统工作频点、承载重要系统参数的广播信道等。终端用户就这些方面和网络侧达成一致的过程主要包括上下行时频同步和接收广播信道。最后,LTE 是一个非常灵活的系统,感觉什么都是可以实时配置的,以便根据具体情况调整系统到更好的状态。为了支持实时配置,最重要的就是使通信双方达成对最新配置的一致认识,这必须依赖大量的控制信令交互,相应地需要定义信令承载方式及流程等,这部分对于物理层来说,主要涉及各种物理信道的设计,接下来的内容也会详细讲解。考虑完这些,最后才是通信的最终任务—业务数据传输本身的方式与流程,包括编码调制、多天线技术、功控等方面的设计。

接下来的内容将按照上面考虑的这些方面,简要介绍 LTE 系统的设计思路,以及工作流程。

17.2　常见多址方式及应用

17.2.1　I/Q 正交复用——开个头

I/Q 正交调制,其实可以看成用了两个正交基 $\cos(\omega_c t)$ 和 $\sin(\omega_c t)$,把两路信号分别携带在它们之上,然后叠加在一起发送出去,接收端再把叠在一起的信号唯一分解成这两组基的叠加形式,从而得到每一路的信号。当然这个复用方法,一般来说携带在 I 路和 Q 路的信号是属于同一个用户的,还很少属于不同用户,很少作为用户间的复用方式。然而,还是有很少一部分巧妙的算法里,把 I/Q 复用体现在调制星座点里,即组成一个星座点的几个比特,一部分比特来自一个用户,另一部分比特来自另一个用户。

17.2.2　时、频、码分多址——老将

时分多址、频分多址和码分多址三者算是多址方式中的老将了,本节一起来介绍。

1. 时分多址(TDMA)

时分多址(Time Division Multiplexing Access,TDMA),其实就是把时间分成小块,比如分成 n 个小块,每一小块只能由一个用户使用,不同用户占用不同的小块来通信,如图 17-1 所示。时分多址方式里,用户间的数据分离显而易见。不过,似乎任何系统都有时分多址的影子,因为其他不管什么多址方式,总不可能同一个用户从时间上看总是一直在通信,那么也就是说不同时间段有不同用户在通信,这也符合时分多址的思想。没办法,谁叫时间是最能被感觉到的资源呢?

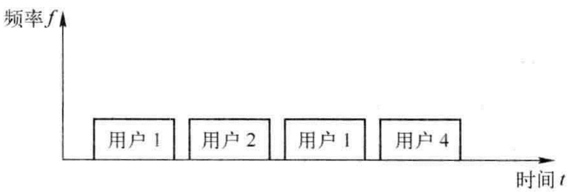


图 17-1　用户间时分多址

时分系统一般分两种,一种是各用户能用的小块是由一个中心控制器/调度器为其分配的,比如由基站分配,用户需要听从基站的安排。比如 GSM 系统里,同一个小区的用户就是这样获得信道和基站通信的。另一种是各用户通过竞争机制自己去抢信道,谁抢到谁就可以占用信道通信,当然这个“抢”也有规则,不然碰到不讲理的,一直霸占信道,那其他用户就别想用了,比如 802.11 a/b/g/n/ac 系列系统(俗称 WiFi)里的分布式协作信道竞争机制。

在实际系统中,时分多址的一个可能的缺点是业务时延问题,因为用户 A 的数据来了,但信道每次只能被一个用户使用,可能轮到用户 A 还要等一会儿,从而造成时延。

换另一种方式来看,对于 n 个小块资源,假设每一个用户都用了其中一块,相当于每一个用户用了一个基[0,…, 1,…,0]的形式。显然这些基是正交的,从而接收端可以唯一分离出各路。

2. 频分多址(FDMA)

频分多址(Frequency Division Multiplexing Access,FDMA),就是把频带分成小块,除了分法和 TDMA 有区别外,后面的和 TDMA 没什么区别。传统多载波系统,就是频分复用用户,不同用户的数据携带在不同载波上同时传输,如图 17-2 所示。

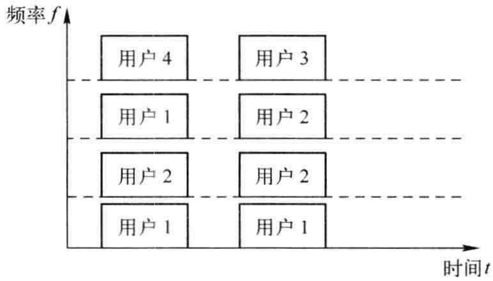


图 17-2 用户间频分多址

在实际系统中,频分多址的一个可能的缺点是频率资源浪费问题。因为实际系统的滤波器不可能是截止频率滤波器,那么两个载波如果离得太近,相互之间会有干扰,承载在这两个载波上的用户数据之间有干扰。为了避免这个干扰,一般在两个相邻载波间留一段频率来做保护带,这个保护带就是被浪费的频率。

3. 码分多址(CDMA)

码分多址(Code Division Multiplexing Access,CDMA),看起来是码分,其实它还是首先要依赖于时间或者频带甚至后面讲的空间。以依赖于时间为例,它也是先把时间分成小块,比如分成 n 块,然后还是每一路用了一个基,只不过比 TDMA 里的基稍微复杂一点,用了非平凡的基,即尽量让每个时间块对应的分量不为 0,它能在复用的同时得到比 TDMA 更多的分集效果。这个基对于 CDMA 来说,也称为码。如图 17-3 所示的例子,对于 4 块资源,用户 1 用的码是[1,1,1,1],用户 2 用的码是[1,-1,1,-1],用户 3 用的码是[-1,1,1,-1]。发射端把 3 个用户的信号 x_1、x_2、x_3 分别携带在对应的码上,然后一起发出去,则发出去的信号为

$$\boldsymbol{s}=x_1[1,1,1,1]+x_2[1,-1,1,-1]+x_3[-1,1,1,-1]$$

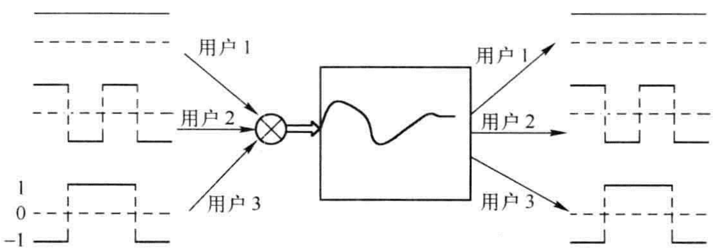


图 17-3 用户间码分多址

三个用户都会接收到信号 $\boldsymbol{s}$,但用户 1 用它的码和信号做相关为

$$\boldsymbol{s}[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}=4x_1+0+0$$

从而用户 1 可得到给它的信号 x_1 是多少,其他用户类似。

采用 CDMA 的系统包括 WCDMA、CDMA2000、TD-SCDMA 等,系统给每一用户分配一个

唯一的码序列(扩频码),并用它对承载信息的信号进行编码。知道用户码序列的接收机对收到的信号进行解码,就能恢复出原始数据,这是因为用户码序列之间的互相关很小。由于码序列的带宽远大于所承载信息的信号的带宽,编码过程扩展了信号的频谱,所以也称为扩频调制,其所产生的信号也称为扩频信号。

17.2.3　正交频分复用多址——正值当年

正交频分复用多址,就是把 TDM 和 FDM 组合起来的方式,不过不是非平凡的组合。特别是关于 FDM,它和上面讲的平凡的 FDM 有些不同,平凡的 FDM 里各子载波相互被保护带隔离开来,而 OFDMA 里,其实频带上没有完全分开,有交叉,如图 17-4 所示。其具体原理已经讨论得比较多了,这里不再赘述。前面也提到过,OFDMA 正值当年,目前较近的几个新无线通信标准都采用 OFDMA 作为多址接入技术,如 WiMAX、LTE/LTE-A 等。

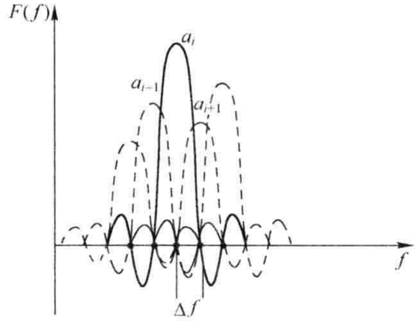


图 17-4　OFDM 技术下的频分

17.2.4　空分多址——新秀

空分多址(Spatial Division Multiplexing Access,SDMA),就是把空间分成小块,分给不同的用户。其实质是用多根收发天线,从而形成多维的信道空间,然后把该信道空间“分”成小块。这和上面几种复用方式中资源“分”法略有不同,上面讲的都是把资源事先人为分好。而 SDM 一般来说,不好实现,因为这个信道空间和时间或者频带不一样,它是时变的,不能用一个固定的分法。所以怎么分还得看当前信道空间是什么样的。

把信道空间分成小块,从实质上看也是一种 CDM,即我们讲过的 MIMO 预编码就是把信号被携带在不同向量上,这个向量就是这里的“码”。就是说,不管是传统 CDM(包括把 TDM 和 FDM 看成 CDM)还是 SDM,其实质都可以看成码分,只不过得看可用的“码”怎么来。传统 CDM 是指,人为设计一组正交码(理论上无关序列就好,当然正交更简单),那么可以把不同的数据(用户)携带在不同的序列上,同时并行发送出去,只要在无线信道传播过程中能一直保持正交性,比如在相干时间内,那么在接收端还能区分开来。这些正交序列是人为设计的,随时可用,且分配管理方便。而 SDM 是指,当有多根收发天线时,收发天线间的信道,对于数字通信来说,仍然表现为一组序列,比如每个发射天线到所有接收天线的信道写出来就是一个序列,那么多个发射天线就产生多组序列。那能在各序列上携带不同的数据吗? 这得看运气,能就能,不能就不能,这部分请参照 MIMO 原理。传统 CDM 的“码”是人为设计的,而 SDM 的“码”是信道天然产生的。人为设计的可随时分配管理,而信道天然产生的,没办法控制,能不能多路并行传输以及具体能支持几路传输都得看情况。从这些角度来说,空分多址还是刚出道的新秀,还在发展当中,还没能完全独立地承担多址的任务。

除了上面讲的这些基本复用/多址思想外,根据实际情况还可以把它们具体组合来生成某个空间,然后再把对应的空间划分小块。比如 Alamouti 算法,就是把时间(或频率)和空间组合起来,在复用/多址的同时,并得到很好的分集效果。这些其他复用/多址思想得根据实际情况具体研究应用,此处不细说。

17.3 LTE上下行多址方式

17.3.1 LTE下行多址方式:OFDMA

LTE下行采用的是正交频分复用接入(OFDMA),OFDMA原理我们基本讲过了。更具体地冲,LTE支持多种系统带宽,包括1.4 MHz、5 MHz、10 MHz、20 MHz等。不管是哪种带宽,OFDM系统参数是一样的,不同系统带宽的差别在于子载波的个数:一个OFDM符号的时间长度为66.7 μs,子载波间隔15 kHz(先不考虑MBSFN等特殊场景应用),大家可以验证一下一个符号长度和子载波间隔是否为倒数关系。循环前缀(Cyclic Prefix,CP)有长CP和短CP之分,长CP长度为16.67 μs,短CP长度为4.7 μs。如何配置CP的长度主要根据实际布网环境的时延扩展大小来确定。

LTE中在时间上的资源粒度为1 ms,1 ms的时间里根据是采用长CP还是短CP配置包含12个或14个OFDM符号;在频率上的资源分配粒度为连续180 kHz,即连续12个子载波。一个1 ms里所有系统带宽(子载波)资源构成一个子帧(Subframe),10个子帧构成一个无线帧(Radio Frame)。把一个子帧画出来,可以看到一个子帧从时间上看可以划分成14份(以短CP为例),从频率上看可以划分成很多个子载波,具体个数由带宽确定,假设512个吧。那么从时频联合起来看,一个子帧由14×512个小方格组成,每个小方格对应某个OFDM符号的某个子载波。每个子帧对应的所有小方格就是系统可用的所有时频资源。以一个20 M带宽系统为例,因为一般需要预留整个带宽的10%左右作为保护带,那么20 M系统实际只有18 M可使用,即1200个子载波,可以划分成连续100组12个子载波。LTE协议里还把一个子帧分成两个时隙(Slot):时隙0和时隙1,每个时隙各0.5 ms,且每个0.5 ms里连续12个子载波对应的时频资源被称为一个物理资源块(Physical Resource Block,PRB)。在给不同用户的分配资源时,总是以两个时隙里一对PRB为粒度,即总是时隙0里一个PRB加上时隙1里一个PRB。

下行每个子帧都能复用多个用户,就是把一个子帧里不同PRB对分配给不同用户,即承载不同用户的数据,然后通过OFDM调制一起发送出去。不同用户把整个子帧的信号接收下来后,通过采样和DFT操作后,仅取出摆放每个用户各自数据的那些PRB对上的数据,然后再处理即可。

17.3.2 LTE上行多址方式:SC-FDMA

上行多址的基本原理仍然是OFDMA方式的,仍然是将一个子帧的PRB对分配给不同用户,各个用户将自己将要发送的数据摆放在分配给它的PRB对时频资源上,其他没有分配给它的时频资源上摆放的数据可以认为是0,再按照OFDM调制处理,发送给基站。要求所有用户数据几乎同时到达基站,这样基站在接收时,用户间能保证正交性,最后基站也一样取出各用户的数据分别处理即可。

和下行有区别的地方在于,用户在往PRB对上摆放数据之前,对数据做额外的处理,这个处理就是DFT。之所以要做这些,是因为可以改善发射信号的峰均比,这又是由于用户终端(比如手机)的成本关系更在乎功放的效率。而为什么DFT会改善峰均比,我们在讲OFDM原理时已经讲过,这里不再赘述。

第18章　上下行同步机制

18.1　网络侧无线帧时间轴——列车时刻表

LTE是集中控制式系统，所有管理功能都集中在网络侧，更具体地对各个小区来说，可以说集中在基站(eNB)，用户终端(UE)都是根据基站的安排来相应地行动。上下行无线时间轴也是一样，基站侧有个统一的标准。所谓同步都是对UE来讲的，都是讲UE如何参考基站的时间轴，和基站达成一致。就像铁道系统运行一样，列车调度管理系统就是网络侧，而普通民众就是用户，网络侧的时间轴就是列车时刻表，用户要去接人、赶车等都要按照列车时刻表来行动。所以，有必要先简单讲解一下基站侧的上下行无线帧时间轴。LTE分为FDD系统和TDD系统，这两类系统的上下行时间轴还有点区别，下面我们分别来讲。

18.1.1　FDD上下行无线帧时间轴

FDD的上行和下行采用不同的频带，两个频带载频的间隔一般有上百兆，这个间隔称为双工间隔。相应地，上行和下行分别有自己的时间线，一般情况下，上下行时间线是大致对齐的，如图18-1所示。

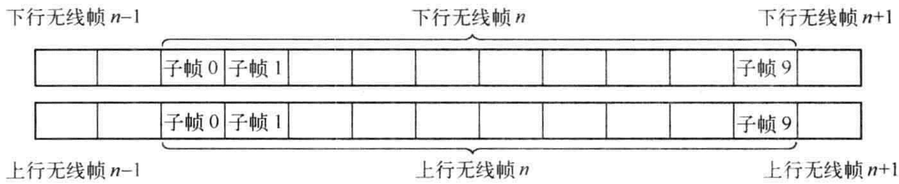


图18-1　FDD上下行时间线

时间轴里的时间并不是生活中的绝对时间，比如几点几分，而是无线帧与无线帧，子帧与子帧，OFDM符号与OFDM符号之间的相对时刻关系的一个整体呈现。图18-1中，时间轴并不是说某个无线帧/子帧应该在几点几分，而是说，如果已经知道了现在1 ms是子帧0对应的时间，那么紧接着的1 ms应该是子帧1对应的时间，以此类推。

18.1.2　TDD上下行无线帧时间轴

TDD的上行和下行采用相同的频带，上行和下行通过时分复用实现，即一个无线帧里部分时间用于下行传输，部分时间用于上行传输。并且LTE上行和下行支持多种不同的比例，表18-1列出了LTE所有支持的不同配比。

表 18-1 TDD 上下行子帧配比

上下行子帧配比	子帧号									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	D	S	U	U	U	D	S	U	U	U
1	D	S	U	U	D	D	S	U	U	D
2	D	S	U	D	D	D	S	U	D	D
3	D	S	U	U	U	D	D	D	D	D
4	D	S	U	U	D	D	D	D	D	D
5	D	S	U	D	D	D	D	D	D	D
6	D	S	U	U	U	D	S	U	U	D

这里仅以上下行配比 1 为例说明无线帧时间轴。TDD 里除了普通的上(U)下(D)行子帧外,还有一个特殊子帧(S)。特殊子帧由下行部分 DwPTS、保护时间段 GP 和上行部分 UpPTS 构成。

看起来,TDD 里只有一根时间轴,其实有时候转化成两根时间轴来看待,分析一些问题比较简单。怎么看成两根时间轴呢?很简单,仍然上行一根时间轴,下行一根时间轴,只不过上行时间轴里和下行时间轴里分别都有一部分空白时间段,在这个空白时间段里分别不能发生上行通信和下行通信。两个时间轴几乎是对齐的,其中允许的偏差要使得上行和下行时间轴合二为一时,上行和下行时间轴里非空白时间段不发生任何重叠。图 18-2 示意了 TDD 上下行子帧配比 1 的一根时间轴被拆成上下行各一根时间轴的情况。其中,所有下行子帧,包括特殊子帧 S 里的下行部分 DwPTS 都被分离出来形成下行时间轴;所有上行子帧,包括特殊子帧 S 里的上行部分 UpPTS 都被分离出来形成上行时间轴。

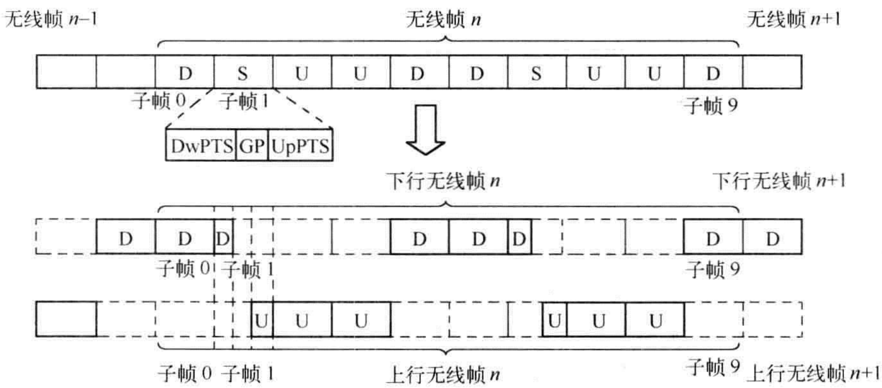


图 18-2 TDD 无线帧结构

18.2 下行同步机制——车站接人的常识

当你打开手机,你会发现要等几秒钟,手机画面才会显示网络信息,比如中国移动或者中国联通等,然后会显示有几格信号。这几秒钟里,手机在干什么呢?其中最重要的、最先做的

就是下行同步了。

为什么要下行同步呢？你的手机可以关机，然后再开机，但是基站一般是 24 小时在线服务，你不打电话，还有很多其他人要煲电话粥啊。也就是说，你开机的时候，基站一直在一个无线帧接一个无线帧，一个子帧接一个子帧，一个 OFDM 符号接一个 OFDM 符号地和其他 UE 通信。由于不同 UE 距离基站的位置不同，基站发射的信号传播到达不同 UE 的时间不同，如图 18-3 所示。你的手机要能接收基站发的数据，必须知道基站发的信号传播到达你的手机时，各个 OFDM 符号的起始位置是怎样的，各个子帧/无线帧的起始位置是怎样的，就像去火车站接人一样，你得知道列车什么时候到站，你接的人在哪一节车厢等，这就是下行同步的目的。

图 18-3　下行无线帧同步

怎么实现同步呢？先看一个例子，假设北京电视台正在播出电视剧《上海滩》，每天播出时间是北京时间晚上 8 点整。你要想从头开始看，必须和北京电视台的播出时间同步。怎么同步呢？很简单，看一下时钟就可以了。手机跟基站怎么同步呢？难道手机自己会看时钟？即使手机可以看时钟，比如通过 GPS 全球定位系统，那手机也只能知道绝对时间。比如，基站告诉说，GPS 时间 8:00 为一个 OFDM 符号的开始，手机根据 GPS 时间也仅仅是知道基站侧 OFDM 符号的起始位置而已，但手机仍然不知道基站在 GPS 时间 8:00 发射出来的 OFDM 符号经过传播后，到达手机自身时的起始位置怎样，因为手机自身无法知道它到基站的传播时延是多少。

那么，比较靠谱的方法是基站发的信号里携带有比较特殊的信号作为标记，手机只要检测到这些特殊标记，就能以此为参考知道 OFDM 符号的起始位置了。另一方面，基站也不知道什么时候会由哪个 UE 来做下行同步，所以比较自然的解决办法就是基站周期性地发这个特殊标记。

这个特殊标记对于 LTE 系统来说，就是同步信道，分为主同步信道(Primary Synchronization Channel，PSCH)和辅同步信道(Secondary Synchronization Channel，SSCH)。同步信道每个无线半帧都有，即以 5 ms 为周期，以 FDD 系统为例，其所在位置如图 18-4 所示，即在每个无线帧的子帧 0 的时隙 0 的最后两个 OFDM 符号上。

不论是 FDD 系统还是 TDD 系统，主同步信道和辅同步信道的相对位置关系是固定的。但 LTE 里 FDD 和 TDD 系统主同步信道和辅同步信道的相对位置关系并不一样，即 TDD 里并不像 FDD 一样两者位于相邻的两个 OFDM 符号上。那么如果检测出这个相对位置关系的情况，还能区分出当前系统是 FDD 还是 TDD 系统。上面我们讲同步主要是讲时间上的同步，其

实同步还有频率上的同步，即用户手机需要知道当前系统是在哪个频点/频带上工作，这也是以同步信道为参考来完成的。LTE 里不管系统的实际带宽是多少，同步信道都是位于整个系统带宽的中间 6 个 PRB 的位置，即载波中心频点两边各有 36 个子载波。虽然一共有 72 个子载波，但实际上只有中间 63 个子载波上有数据，两边其他子载波为保护隔离。

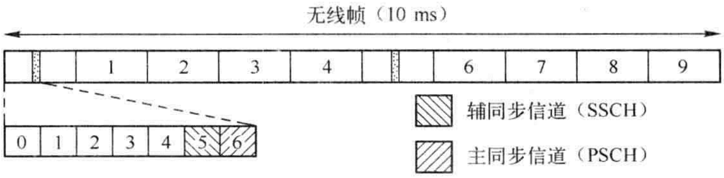


图 18-4　FDD 主辅同步信道

频率同步就是指用户终端事先不知道系统的中心载频，对于 LTE 标准，其可用的频带是标准规定好的，从而可能的中心频点位置也是固定的。若用户终端没有任何先验信息（比如把曾经接入过的网络信息存储下来），用户终端可以一个频点一个频点地尝试，即把每一个尝试的频点周围 6 个 PRB 的信号过滤接收下来处理，从而判断系统的中心载频是哪个。具体的处理过程，协议不规定，由厂商产品的算法实现。下面介绍一些常见算法的步骤。

先通过检测主同步信道可以知道 5 ms 同步，即所谓的粗同步。也就是说，用户终端知道它检测到主同步信道的地方，再过 5 ms 的任意倍数位置都是主同步信道，至于 5 ms 里面每个子帧和每个 OFDM 符号的起止边界仍不清楚。LTE 里同步信道的子载波上承载的是 ZC（Zadoff – Chu）序列，ZC 序列有很多好的性质，例如：

- 相同长度，同一个根序列的不同循环移位序列之间正交。
- 相同长度但不同根的任意两个序列之间正交。
- 对 ZC 序列做 DFT/IDFT 变换得到的序列仍为 ZC 序列。
- ZC 序列的 PAPR 特性很好。

接下来，用户终端可以和辅信道进行同步，即所谓的精同步。通过精同步，用户终端能知道每个子帧以及每个 OFDM 符号的起始位置。具体地，因为主信道和辅信道间隔多少个 OFDM 符号是已知的，用户不知道的仅仅是 CP 到底采用的是长 CP 还是短 CP、当前系统是 FDD 还是 TDD、辅信道采用的是哪一个 ZC 序列。不过，所有这些都可以一一尝试，比如先假设系统是 FDD 系统（那么辅同步信道就在主同步信道前一个 OFDM 符号上），采用的 CP 是长 CP，把所有可能的序列都尝试一遍。最后，对应的信息就是当前能同步上时用到的假设信息。

因为同一个无线帧里两个辅信道上的序列不完全一样，用户终端还能根据这一点检测出一个 5 ms 是一个无线帧的前 5 ms 还是后 5 ms，即知道每个无线帧的起始位置。LTE 里每个小区有自己的物理小区标识（Physical Cell Identification, PCI），通过当前小区主辅信道采用的 ZC 序列索引号，用户终端还可以计算出基站小区的物理层小区标识，这在后面数据处理中经常用到。最后需要说明的是，不论当前系统采用的是几天线配置，协议规定主辅同步信道都是按照单流模式发送，但具体是单天线还是多根天线，协议里没有限定。至此，下行同步过程就基本上算完成了。

注意现在的状态是用户终端自己偷偷摸摸地把下行同步完成了，整个过程完全和基站没有任何关系，基站也不知道该用户终端的存在，所以基站也不会有数据发给用户终端。但是，

用户终端已经可以接收数据了,最起码能够接收处理基站发给对应小区里所有用户终端的公共数据,比如广播数据。广播数据包括一些基本的重要的系统参数集合,比如系统实际带宽是多少、上行频点在哪里等。实际上,用户终端为了能完成后续的上行同步、数据传输等,也必须接收处理广播数据。广播数据承载在广播信道上,广播信道在每个无线帧里都有,具体在下行子帧 0 时隙 1 里中间 6 个 PRB 上。广播信道是按照实际系统配置的天线个数,采用发射分集方式发送,这个设计还很有意思,接下来具体讲发射分集的时候我们再仔细讲解调广播信道的过程。

在完成初始下行同步后,UE 还需要一直维护下行同步。具体地,UE 还可以随时通过检测主辅同步信道,甚至公共参考信号,来检测下行同步是否有变化,如果有变化,UE 自己调整就可以了,基站侧不需要知道。而具体同步维护的细节由各厂商的实现算法确定,这里也就不讨论具体实现细节了。

18.3　上行同步机制——赶车要趁早

注意,我们讲上行多址接入时提到,上行所有用户的数据信号到达接收基站的时间需要同步,用户间才能保证正交,才不会有用户之间的相互干扰,这就是上行同步需要达到的效果。那么,怎么达到上行同步呢?比较直观的方法如下:如果用户终端知道基站侧的上行信号接收参考线(上行无线帧)里每个 OFDM 符号的起始位置,并且知道自己到基站的传播时延 τ 就简单了。比如,用户终端相对于基站 OFDM 符号的起始时刻提前 τ 时间发送,那么这个信号经过传播时延 τ 到达基站刚好和基站一个 OFDM 符号重叠,就达到同步效果了,如图 18-5 所示。

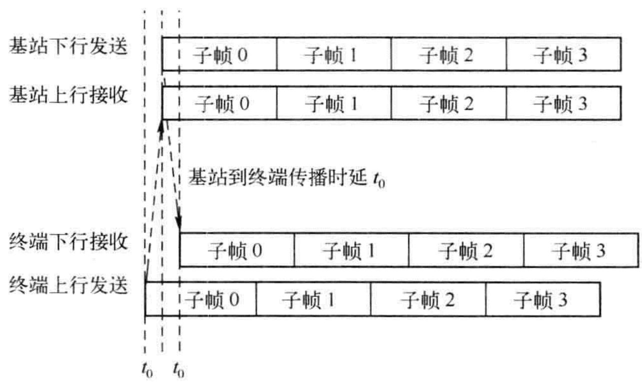


图 18-5　上行无线帧同步

但是,用户怎么知道传播时延呢?如果比较容易知道传播时延,那我们下行同步本来也可以采用这种方法了。所以,相对来说,用户终端自己获得传播时延还是比较困难的。但是毫无疑问,要达到上行同步,用户终端必须提前 τ 发送,不然你能想到第二种方法吗?就像赶火车一样,火车是到点就要开的,不会等你的。要想赶上火车,就得知道你住的地方到火车站需要多少时间,然后提前那么多时间从住的地方出发,到达火车站就可以刚好赶上火车。既然用户终端自己无法通过测量等获取传播时延,只能别人告诉它了。“别人”还能有谁呢?这个“别人”的合适候选人就是基站了。

那么思路就是基站测量后，再发送消息告诉用户终端传播时延。而基站测量要基于某个东西，才谈得上测量，并且这个东西必然要和要测量的用户终端相关，因为各个终端的传播时延都不一样。至于基于的东西，通信里能有什么，当然还是信号啦！于是思路又变成：用户终端先发一个信号，然后基站根据这个信号测量用户终端到基站的传播时延，最后基站再通过下行把传播时延消息通知给用户终端。

注意，这里用户终端还没有完成上行同步，基站根本就不知道该用户的存在，也就是说基站并没有为用户分配时频资源，用户终端不能随便乱发信号，否则就干扰到正在通信的那些用户了。也就是说用户用来发送信号的时频资源一定是没人用的(没有分配给某个用户)，是系统预留的；另一方面，基站不知道哪个用户终端会在哪个时候发起上行同步，从而不能专门为某个用户预留，因此系统预留的时频资源是公共的，即任何用户想要上行同步都可以在该系统预留的时频资源上发送信号。这个系统预留的时频资源在 LTE 里就是物理随机接入信道(Physical Random Access Channel，PRACH)。下面我们介绍一下如何设计 PRACH 信号，并完成上行同步。

PRACH 信道是基站在上行无线帧里的某些上行子帧上预留的一部分时频资源，这个 PRACH 信道是周期的，比如周期是 10 ms，那么每个无线帧里对应位置的子帧上都有 PRACH 信道；周期是 5 ms，那么每个无线半帧里对应位置的上行子帧上都有 PRACH 信道。具体周期是多少，PRACH 对应的时频资源在哪儿，是基站通过网络实际情况配置的，配置后基站把配置信息广播出来。用户终端在完成下行同步后可以去接收处理广播信道，从而获得这些配置信息。

用户下行同步后，通过接收广播信道，还可以知道每个下行无线帧的编号，编号为 0 ~ 1023，采用循环记数。请注意，PRACH 信道是基站预留在上行无线帧的上行子帧上，并通知给用户终端的。而用户终端目前仅下行同步上了，即仅知道下行时间相关的东西。那么，假设基站广播说 PRACH 信道在每个上行无线帧的子帧 2 的 PRB 6 ~ 11 上。终端目前并不知道上行无线帧以及其中每个子帧的起止时刻，当然并不能准确知道上行子帧 2 是哪个，终端目前唯一的时间参考线就是下行时间线。因此，终端在发 PRACH 信号的时间参考，只能是它同步到的下行时间线，也就是以下行子帧 2 的起止时刻为准，在系统上行带宽 PRB 6 ~ 11 上发送信号。对于 TDD 系统来说可以拿上下行两根时间轴来分析，下行子帧 2 在下行时间轴里可能是空白子帧，不过是否空白在这里都没有关系，仅作为一个参考对象而已。

要注意终端发的信号不能造成干扰，即要求终端按照下行时间参考发送的信号仍然能落在上行子帧为 PRACH 信道预留的资源里，一般来说要求基站的下行无线帧和上行无线帧同步对齐，即时间起止重合。不过，仅有这个要求还远远不够，有没有干扰还和终端发的信号持续时间有关。仍然接着上面的例子继续分析，假设基站侧从时间上来看只预留了 1 ms 的空白时间段，用来容纳 PRACH 信号，显然终端发的 PRACH 信号最长就是和这个预留的空白时间段一样长，即 1 ms。但实际情况要比 1 ms 短，具体时间短多少和系统里各基站小区覆盖的区域大小有关。比如，覆盖半径为 10 km 的小区里，有些终端离基站近，比如就在基站底下，这样的终端发的信号到达基站传播时延几乎为 0，那么理论上来说，这样的终端即使发的 PRACH 信号时长为 1 ms 也不会有干扰问题，发射的信号能刚好落入 PRACH 信道，并填满 PRACH 信道；同时，有些终端可能在小区边缘，离基站距离为 10 km，这样的终端发的 PRACH 信号传播到达基站需要的时长为

$$\frac{10\ \text{km}}{3.0\times10^{8}\ \text{m/s}}=33.3\ \mu\text{s}$$

通过图 18-6 可以看到，若这些离基站远的终端发的信号时长也是 1 ms，显然由于没有上行同步，传播时延会使得这些终端发的信号落入下一个子帧内，这样会对下一个上行子帧对应 PRB 上的信号造成干扰。

图 18-6　上行 PRACH 信道设计

同时可以看到，这些处于小区边缘的用户的 PRACH 信号最长为

$$1\ \text{ms}-2\times33.3\ \mu\text{s}\approx933.3\ \mu\text{s}$$

当然，基站不能预测什么时候小区的哪个位置会有终端，终端也不知道自己在小区的哪个位置，和小区的距离有多远，PRACH 信号只能是一个统一的长度，即要求短于预留的 PRACH 信道长度减去小区覆盖的最大传播时延。

说到这儿，按照以上的分析来设计，LTE 支持的几种 PRACH 信道长度为连续 1 ms、连续 2 ms和 3 ms，支持的几种 PRACH 信号长度大概约为 966 μs、1.5 ms 和 2.3 ms，可以支持的最大小区覆盖半径为 100 km。具体应用时，基站根据情况来配置 PRACH 信道长度、PRACH 信号的长度，以及前面已经提到过的 PRACH 信道所在的时频资源位置，通过广播信道广播给所有打算或已经接入基站的用户终端，终端根据这些配置来进行上行同步。最后，值得一提的是，我们在分析说明问题的时候是假设基站侧下行无线帧和上行无线帧在时间上是准确对齐的，但某些 PRACH 信道和 PRACH 信号长度的组合，可以使得即使有些偏差，系统仍然是可以正常工作的，有兴趣的读者可自己去分析。

到目前为止，我们只是把设计框架确定下来了，接下来再介绍一下具体 PRACH 信号是什么。实际上，PRACH 信道对应的 PRB 里每个子载波会细分成 12 个子载波，即子载波间隔只有 15/12 = 1.25 kHz，6 个 PRB 共有 12×12×6 = 864 个子载波，其中两边预留一些子载波作为保护间隔，实际只有 839 个子载波用来承载数据，这 839 个子载波承载的数据是长度为 839 的 ZC 序列或其循环移位。不过，并不是同一个序列的所有循环移位都用来做 PRACH 信号，而是有一定的间隔，比如可用的为循环移位为 0、17、34 等的序列，原因稍后简单说明。

基站接收 PRACH 信道所在的上行子帧时，因为 PRACH 信道和该子帧上其他子载波间隔大小不一样，并且和其他子载波上时间也不同步，一般需要拿单独的滤波器把 PRACH 信道所在频率的信号过滤出来单独处理，过滤后，所在子帧的其他剩余部分可以用同一个 DFT/FFT 处理。

接下来，简单讲讲基站如何通过 PRACH 信号估计出终端到基站的传播时延的方法。基站把 PRACH 信号过滤出来后，从该子帧的起始位置开始，不停地采样，比如每个符号就采 839 个点（不包括 PRACH 信号的 CP）。把这 839 个采样点和所有可用的 ZC 序列时域形式做相关，若发现某个相关值超过检测门限就认为有终端发 PRACH 信号，并且是用超过检测门限最大的那个 ZC 序列（或离该 ZC 序列移位间隔最近的那个可用序列）来发射，那么该终端到达基站的传播时延近似为 0。若没发现超过检测门限的相关值，延迟一个采样点，再取 839 个点继续和所有可能情况做相关。直到延迟 M 个采样点后，出现一个相关值，则基站认为有用户终端在发 PRACH 信号，并且同理也能知道发的哪个可用 ZC 序列，同时可以知道基站到发这个 PRACH 信号的终端的传播延迟为 $M/2$ 个采样点间隔。继续延迟采样点，把所有可以检测出来的 PRACH 信号都检测出来。若在整个 PRACH 信道都没有检测到超过检测门限的相关值，则基站认为当前上行子帧上没有用户终端通过 PRACH 发起上行同步。

终端发起上行同步是没有任何控制和协作的，有可能有多个终端同时在上行同步，都在某个上行子帧的 PRACH 信道里发 PRACH 信号，那么如何解决这个冲突呢？分两种情况：

- 若用户之间发送的 PRACH 信号采用的是不同的 ZC 序列。
- 若用户之间发送的 PRACH 信号采用的是相同的 ZC 序列。

对于第一种情况，如果基站在同一个子帧的同一个 PRACH 信道检测出了多个不同的 PRACH 信号（ZC 序列），那么基站会在随机接入响应里，把所有检测到 PRACH 信号用到的 ZC 序列索引号，以及对应的传播延迟分别发送下来。所有发了 PRACH 信号的终端会去接收随机接入响应，看是否有自己发的 ZC 序列索引号，若有就记下对应的传播延迟，继续后面的步骤；若没有，就等下次发 PRACH 信号。显然，若终端发的 ZC 序列不同，是没有什么冲突的，大家都可以区分开。接下来只剩下一种特殊情况，有多个终端发了相同的 ZC 序列，那么终端在随机接入响应里发现了对应的索引号，会都认为基站收到了自己的 PRACH 信号。接下来，这些终端会按照对应的传播延迟来提前上行发送数据，上行数据里会携带终端各自的标识。注意，一般情况下这些发相同 ZC 序列的终端的传播延迟是不一样的，那么基站检测到的所对应的传播延迟一般只会对其中一个真正匹配的终端有效，其他终端按照那个不准的传播延迟提前发送仍然达不到和基站上行同步，从而一般情况下基站只会正确接收真正匹配的终端的上行数据发送。下一步，基站下行反馈正确接收到的数据里携带的标识，所有上一步都发上行数据的终端都去接收，看是否是自己发的那个标识，显然只有基站反馈的标识和自己上一步携带的标识相同的终端才算上行同步上了。到目前位置，上行同步的设计原理基本上讲解完毕，这个设计原理对 FDD 和 TDD 系统都适用。仅简单提一下 FDD 和 TDD 的区别：

- FDD 里上行子帧多，每个上行子帧只有一个 PRACH 信道；而 TDD 里一个上行子帧可能有多个 PRACH 信道，相互之间频分，即处于不同的 PRB 上。
- FDD 里上行子帧是连续的，PRACH 信道的周期和每个 PRACH 信道时长是可以灵活配置的，理论上没有任何限制；而 TDD 里各不同上下行配比上行子帧分布不一样，能配置的周期和 PRACH 信道时长都有限制，并且限制都不一样；比如，有些配比，如配比 1，PRACH 信道的周期最小可以是 5 ms；有些配比，如配比 4，最小周期只能是 10 ms，并且有些配比里永远找不到连续 3 个上行子帧，因此不可能配置时长为 3 ms 的 PRACH 信道。
- 除了 1 ms、2 ms、3 ms 时长的 PRACH 信道外，TDD 系统里还有一个很短的 PRACH 信道

和对应的 PRACH 信号，这个 PRACH 信道位于特殊子帧的上行部分 UpPTS 里，只能用于覆盖非常小的 TDD 小区。

- TDD 系统里特殊子帧的保护间隔配置会制约 PRACH 信道/信号的配置。

还有一些更细节的考虑，比如考虑到多径，哪些 ZC 序列的循环移位不能拿来做 PRACH 信号等，就不在本书里讨论了。上行的同步维护由基站负责完成，基站通过检测 UE 上发的 DMRS 或者 Sounding 信道来确定 UE 的上行同步是否相对准确。如果不准确，基站计算出新的提前量，再用时间提前(Timing Advance，TA)命令通知给 UE，UE 根据新的提前量来发送上行数据。和下行一样，基站如何通过 DMRS 或者 Sounding 来完成上行同步维护，由厂商产品实现算法确定，这里不具体介绍。

讲完上下行同步，最后讨论一下 LTE TDD 无线帧里特殊子帧的保护间隔长度问题。在 LTE TDD 里特殊子帧分为三个部分，分别为下行部分(DwPTS)、保护间隔(GP)和上行部分(UpPTS)。并且这三部分各占多少个 OFDM 符号有多种配置，在实际布网时，网络侧会为每个小区选取一种合适的配置。实际上，这个配置问题最终可以归结为保护间隔长度的配置问题。为什么 LTE TDD 系统里要有这个保护间隔呢？一方面，由于 TDD 里一般上下行共享一套射频链路，通过收发开关转换来分别服务于下行接收和上行发送。而这个上下行的开关转换一般需要一点时间完成，因此需要一个保护时间，这个保护时间隐含在特殊子帧的保护间隔里；另一方面，是为了避免上下行冲突问题和干扰问题。

上下行冲突问题主要是针对同一个终端来说的。因为同一个终端在接收完 DwPTS 之前(包括 DwPTS)的下行部分后，接下来可能需要上行发送。而我们知道终端的下行接收相对于基站的下行发送来说是延迟的，而终端的上行发送又是要提前的。那么提前发送的时刻必须保证在终端下行接收完之后(包括收发开关转换时间)，才不会有接收和发射的冲突。这就取决于基站侧下行部分和上行部分之间的时间间隔以及基站和终端之间的传播时延了。如图 18-7 所示，对于给定的一个特殊子帧配置，终端 1 与基站的传播时延小，从而下行接收的截止时刻和上行发送要求的起始时刻之间还有一段时间间隔，不会出现冲突；但对于传播时延较大的终端 2 来说，上行发送要求的起始时刻在下行接收截止之前就有冲突了。要么下行不接收完保证上行，要么保证下行接收完而影响上行。可以看到，一个小区的保护间隔长度配置取决于离基站最远的终端与基站之间的传播延迟，即取决于小区的覆盖半径。覆盖半径越大，理论上需要的保护间隔越长。当然，本来小区覆盖半径很小，也不限制配置一个很长的保护间隔，只是会造成资源浪费。图 18-7 中还有一个细节，基站侧区分了“理想无线帧”和“实际无线帧”。“理想无线帧”是按每个子帧都是 1 ms 来画的。而实际上，基站侧从下行发送转向上行接收也需要开关转换时间，即下行子帧和紧接的上行子帧之间需要一个间隔，这个间隔通过基站把上行接收(U)都提前完成，即如“实际无线帧”所示。

上下行干扰问题主要是针对相邻基站间来说的。就是说，有可能一个基站的下行发射信号传播到达相邻基站时，可能相邻基站正处于上行接收时间，从而造成干扰。并且，由于基站一般放置位置较高，其信号到达相邻基站很少受建筑物遮挡，信号损耗较小，致使信号到达相邻基站功率还很高，干扰较强。要避免这样的干扰，一般要求基站间无线帧绝对同步，同一时刻要么都是下行发送，要么都是上行接收。注意这仅仅是从各自基站来看的动作时间，并不能保证信号出来后的行为。因此，还要求特殊子帧的保护间隔要配置合适，避免一个基站的下行发射信号传播到达相邻基站时，落在上行接收时间。最后，也是要求相邻基站距离越远，即各

基站覆盖半径越大，在无线帧同步的情况下，要求保护间隔越长。

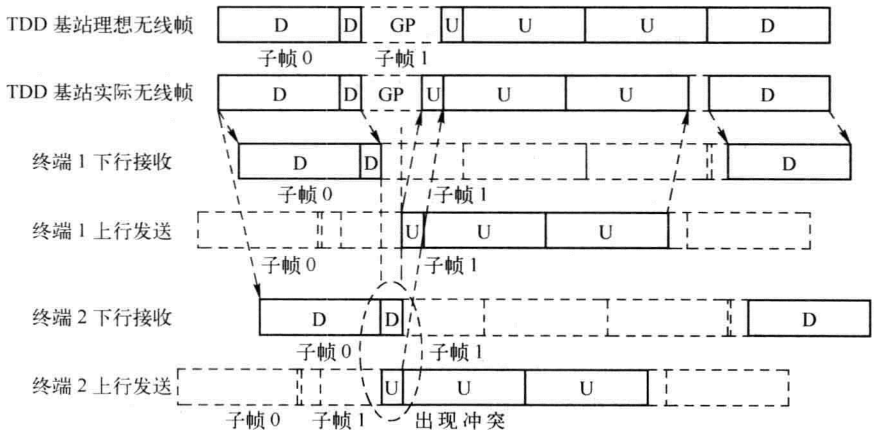


图 18-7 TDD 特殊子帧保护间隔与小区覆盖半径

第 19 章　主要信道设计与信令机制

17、18 章讲了 LTE 复用多址方式和同步机制，现在假设终端已经完成了上下行同步，基站和终端都知道彼此的存在及基本信息，接下来看看上下行数据交互涉及的主要流程。LTE 支持灵活自适应的 OFDMA 方式，包括基站在哪些时刻和用户通信、用户可用的时频资源位置、调制编码方式、多天线传输方式等都是可以根据每次数据传输的具体情况灵活改变。也就是说用户事先不知道这些信息，而用户要解调译码数据时又是必须知道的，那么在解调译码数据之前就必须想办法把这些信息告诉用户，而承载这些信息的时频资源统称为控制信道，承载用户数据的时频资源统称为共享（数据）信道。从物理层来看，控制信道和共享数据信道可以细分为多个物理信道。所谓物理信道是指在时频资源上区分，并完成不同功能的不同资源集合。LTE 上下行主要物理信道有 PCFICH、PHICH、PDCCH、PDSCH、PUCCH、PUSCH 等。上下行数据交互主要是处理这些物理信道以及相互间关系，下面根据上下行分别介绍。

19.1　下行调度及 HARQ

本节首先介绍 LTE 下行物理信道的设计、使用以及相关的流程。

19.1.1　下行物理信道串烧

LTE 下行主要物理信道有如下几个：

- 物理控制格式指示信道（Physical Control Format Indication Channel，PCFICH）。
- 物理 HARQ 指示信道（Physical HARQ Indication Channel，PHICH）。
- 物理下行控制信道（Physical Downlink Control Channle，PDCCH）。
- 物理下行共享信道（Physical Downlink Shared Channel，PDSCH）。

其中，PCFICH、PHICH、PDCCH 三个物理信道整体上和 PDSCH 在一个子帧里是时分的，即前三者占一个子帧的前几个 OFDM 符号，剩下的 OFDM 符号为 PDSCH 信道。

1. PCFICH

PCFICH 信道用来指示当前下行子帧里 PHICH 和 PDCCH 共占用该子帧的前几个 OFDM 符号，其取值一般为 1、2、3。PCFICH 所在的资源位置（资源集合）对每个小区来说是固定的，所有用户都知道，直接去那些位置读取里面指示的值就可以了。

2. PHICH

LTE 里上下行数据传输采用的检错纠错方式为混合自动重传请求方式（Hybrid Automatic Retransmission Request，HARQ），即每一次数据传输，接收端需要反馈是正确接收（ACK）还是错误接收（NACK）。若是错误接收，数据发送方需要重传，重传的数据可以是先前已经传过的数据的不同信道编码冗余版本，也可以是相同的冗余版本，这样接收端可以把多次传输合并译

码,提高译码的正确概率。

PHICH 信道的作用是承载用户上行数据传输需要反馈的 ACK 或 NACK。每个下行子帧上 PHICH 所占的时频资源数量和时频资源位置是由基站配置的,基站首先根据情况配置 PHICH 信道是分布在一个 OFDM 符号上还是三个 OFDM 符号上,用户可以通过广播里的系统配置参数读到这些信息。

3. PDCCH

我们把基站下行发数据给某个用户和允许某个用户上行发数据给基站,分别称为某用户被下行和上行调度了。PDCCH 信道用来指示用户当前是否被调度,并承载用户上下行数据传输占用的时频资源信息(即资源分配)、调制编码方式、HARQ 进程号等和数据解调译码强相关的控制信息,这些信息的不同组合形成了不同的下行控制信息(Downlink Control Information,DCI)格式,这里不再详细讲解了,请大家参考 LTE 协议 36.212。

我们知道 LTE 支持灵活的用户调度,而当某个用户被调度时就会有该用户数据对应的 PDCCH,相反没有被调度的用户就没有对应的 PDCCH(暂时不考虑半持续调度 SPS)。那么 UE 怎么知道当前下行子帧基站有没有调度自己呢?换一种问法,怎么判断有没有给自己的 PDCCH 呢?要回答这个问题,因为控制信道本身所占用的时频资源也是用户间复用的,首先 UE 得知道在哪些时频资源上去找自己的 PDCCH。

提醒

PDCCH 的时频资源不可能像 UE 数据传输所用的时频资源一样被动态指示,因为那就得给 PDCCH 再设计一个“PDCCH”,这样会“鸡生蛋,蛋生鸡”,没完没了。

既然不能被动态指示,那就只能是预先规定。给每个用户规定一个各自 PDCCH 对应的时频资源,这样如果某个用户在当前子帧被调度,那么它对应的 PDCCH 就放在预先规定的位置。但注意另外一个问题,一个小区里接入的用户可能成百上千,你想想普通城市里方圆一公里区域内会有多少设备接入网络了。而一个子帧前几个 OFDM 符号的时频资源有限,不可能互不重叠地预先预留时频资源,也就是说,有可能很多个用户的 PDCCH 预留的时频资源是同一块时频资源,至少是有重叠的。那么,如果每个用户只有一份预留的 PDCCH 对应的时频资源,那么对于预留的 PDCCH 时频资源有重叠的用户,如果某个子帧里这些用户中有一个被调度了,那么其他用户都不能被调度了。这样的话,这个设计就人为地对用户的调度限制较大,相当于没有任何根据地把用户分了组,并且每次每组里只有一个用户被调度。如何解决这个问题呢?注意,按照上面的设计,有可能某个子帧时刻,某一组用户里所有用户都不会被调度,那这一组对应的 PDCCH 时频资源就被浪费了。那么现在问题变成了,一边有浪费,一边又想调度调不了。可以这样解决:每个用户对应的 PDCCH 预留的不是一份时频资源,而是可能的多份时频资源,这样的话,即使一个用户的其中一份 PDCCH 时频资源因为和别人重叠而被别人的 PDCCH 占用,它当时又确实有被调度的必要性,那么它的 PDCCH 可能还有另一份时频资源位置可以放置,这样看来虽然由于时频资源有限,总是不能尽如人意,还是存在被限制调度,但这个“限制”本身可以做到相对公平随机,而不是某个固定限制模式。

在 LTE 里,采用的就是为一个用户规定多份可能放其对应 PDCCH 的地方,称为 PDCCH

搜索空间。这样的资源分配使用机制,一般被称为统计复用。一个搜索空间包含的时频资源数,也就是包含的 RE 个数的基本单位为控制信道单元(Control Channel Element,CCE)。注意要传输的 DCI 格式一旦定下来了,要传输的原始信息比特也就定了,而最后一个搜索空间的大小包含的 CCE 个数就确定了编码比特的个数,也就确定了一个码率。显然,由于不同时刻不同用户的信道差异性,要满足接收性能,比如 1% 误块率,不可能一个通用的码率能保证所有情形,除非这个码率是按最差信道情况下定的。但是,这样的话,资源利用不合理,因为不管信道有多好,总是花很多时频资源来传输 PDCCH。从而一个子帧里前几个 OFDM 符号能承载的 PDCCH 个数就更少了,也即一个子帧能调度的用户更少了。为了克服这个缺点,LTE 里一个搜索空间的大小分 4 种情形,可能包含的 CCE 个数分别为{1,2,4,8},称为聚合等级,每提高一个聚合等级,相当于对应的码率依次降 1/2。

LTE 为每个用户的每一个聚合级别都规定了可能的位置集合,如果某个被调度到的用户信道质量相对较好,那么基站可能把它的 PDCCH 放在聚合等级为 1 或 2 的搜索空间里。如果某个被调度到的用户信道质量相对较差,那么基站可能把它的 PDCCH 放在聚合等级为 4 或 8 的搜索空间里。用户因为不知道当前下行子帧里,基站是否有给自己发 PDCCH(即是否调度自己),会用哪个聚合级别去发,用户需要在所有聚合级别的搜索空间里去尝试,直到正确解出一个给自己的 PDCCH 或者所有该尝试的都尝试了,但就是没解出来为止。这个一一尝试的过程也被称为盲检测过程。

最后再讨论一下,LTE 为对付频率选择性,提高 PDCCH 频率分集增益所做的考虑。LTE 里 CCE 是一个逻辑资源集合,一个 CCE 由 9 个资源单元组(Resource Element Group,REG)组成,每个 REG 由 4 个 RE 组成,即一个 CCE 由 36 个 RE 组成。并且,因为每个用户的 PDCCH 时频资源位置不是根据实时信道确定的,为了避免一个 PDCCH 所在时频资源都处于深衰落,比较保险的方法就是让一个 PDCCH 所在时频资源离散分布在整个控制信道区域,即获得一些频率分集效果。这个目的通过一个逻辑资源集合到实际物理资源的交织映射完成。下面举个例子来模拟这个过程,具体准确的细节请参照协议描述。不妨假设共有 18 个物理 REG,从物理相邻自然顺序为物理 REG1,…,物理 REG18;从逻辑上讲也有 18 个逻辑 REG,逻辑 REG1,…,逻辑 REG18,前 9 个逻辑 REG 组成 CCE1,后 9 个逻辑 REG 组成 CCE2。如果逻辑 REG 直接按顺序往物理 REG 映射,结果会使前 9 个逻辑 REG 也对应到前 9 个物理 REG,即 CCE1 对应的物理资源是相邻的 9 个物理 REG,有可能都处于深衰落,同样 CCE2 也可能都处于深衰落。一个办法就是先把逻辑 REG 交织一下,即重新排个序,变成逻辑 REG4,逻辑 REG18,逻辑 REG9,…,逻辑 REG5,逻辑 REG11;然后按这个顺序往物理 REG 建立映射关系,那么逻辑 REG1 到逻辑 REG9 对应的物理 REG 的相对位置是离散分布的,则 CCE1 对应的物理资源是离散分布的,将 PDCCH 承载在上面,将获得一些频率分集效果。

4. PDSCH

PDSCH 就是用来放各用户普通数据的地方,之所以称之为共享信道,是因为这些物理资源可以灵活分配给不同用户。谈到资源分配,LTE 下行支持两种资源分配方式:集中式分配和分布式分配。首先 LTE 里下行资源分配是按两个时隙的一对 PRB 为粒度,集中式分配主要是指,这一对 PRB 就是两个时隙频率位置完全一样的一对 PRB;而分布式分配是指,这一对 PRB 就是两个时隙频率位置不一样的一对 PRB。同一个子帧里,可能有些用户的资

源分配采用集中式分配，有些采用分布式分配，具体每个用户是哪一种，会在各用户对应的PDCCH的资源指示字段中指示出来。PDSCH主要涉及数据的发射接收处理过程，这在后面会单独讲解。

5. 下行物理信道小结

根据上面的讨论，我们简单总结一下用户接收下行子帧的行为。首先用户会去检测PCFICH，根据PCFICH的指示，确定当前下行子帧里PHICH和可能的PDCCH占用当前下行子帧的前几个OFDM符号。不过，具体在每个下行子帧里能占用几个OFDM符号，其实由PCFICH和PHICH共同决定。基站首先根据情况配置PHICH信道分布在1个OFDM符号还是3个OFDM符号上，用户通过广播里的系统配置参数就能读到这些信息。为了保证PHICH这个配置条件，PCFICH指示的个数必须大于等于PHICH分布的OFDM符号个数。也就是说，若PHICH配置为1个，PCFICH指示的控制信道可以为1~3个；而若PHICH配置的就是3个，那么PCFICH指示的个数只能是3个。

当PCFICH的值确定后，每个用户之前上行数据传输对应的PHICH的位置是和该之前上行数据传输绑定关系的，则是UE确知的，用户直接到这个对应的位置去解PHICH内容就行了；而PDCCH如上面讨论，用户需要到自己的搜索空间去盲检测。如果没检测到PDCCH就可以暂时歇歇了；如果检测到用于PDSCH调度的PDCCH，那么用户根据这个PDCCH里的指示信息，去解相应的PDSCH内容。

19.1.2 下行HARQ及数据重传

1. 下行HARQ

下行HARQ主要研究PDSCH和其ACK/NACK反馈之间的时序关系，FDD和TDD系统略有不同。对于FDD系统，在下行子帧n上发送的PDSCH，其ACK/NACK反馈需要在上行子帧$n+4$上反馈回来，并且由于FDD的对称性，下行PDSCH子帧和上行ACK/NACK子帧是一一对应的，一个上行子帧只需要反馈一个下行子帧上PDSCH的ACK/NACK。

对于TDD系统，由于有多种上下行子帧配比，$n+4$这样的简单规则并不实用，因为有可能$n+4$子帧连上行都不是，而还是下行子帧。所以，每一种配比的下行PDSCH子帧和上行ACK/NACK子帧的时序对应关系不一样，下行子帧n对应的上行ACK/NACK反馈子帧一般位于$n+4$之后（包括$n+4$）的某个上行子帧上。另一方面，从所有配比来看，一般下行子帧比上行子帧多，所以显然存在多个下行需要在同一个上行子帧反馈ACK/NACK情形。各种配比里下行PDSCH子帧和上行ACK/NACK的时序关系如表19-1所示，其中每个配比里对应格子有数字的子帧都是上行子帧，其中的数字k表示当前上行子帧n需要反馈在下行子帧$n-k$（循环记数）上发生的PDSCH传输对应的ACK/NACK。

不管是FDD系统还是TDD系统，下行PDSCH传输和上行ACK/NACK反馈都相差至少3个子帧，即3 ms，这是有考虑的。中间间隔的这个时间要考虑到下行传播时延，以及收到下行PDSCH后解调译码处理所需时间，上行组包时间和上行提前发送时间量。LTE里最大支持覆盖半径为100 km，所以传播时延和上行提前量之和大概最大能达到700 μs，而解调译码时间和组包时间经评估认为需要2 ms左右，所以这个间隔至少为3 ms。

表 19-1　TDD 各上下行子帧配比下行 HAQR 时序关系表

上下行子帧配比	子帧 n									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	—	6	—	4	—	—	6	—	4
1	—	—	7,6	4	—	—	—	7,6	4	—
2	—	—	8,7,4,6	—	—	—	—	8,7,4,6	—	—
3	—	—	7,6,11	6,5	5,4	—	—	—	—	—
4	—	—	12,8,7,11	6,5,4,7	—	—	—	—	—	—
5	—	—	13,12,9,8,7,5,4,11,6	—	—	—	—	—	—	—
6	—	—	7	7	5	—	—	7	7	—

2. 下行数据重传

如果某个 PDSCH 传输用户接收错误,会反馈 NACK,接下来基站会重传这个错误的包。下行数据重传采用异步重传方式,即基站在获取前一次传输为 NACK 之后,再发起重传的下行子帧位置是不固定的,基站自行确定。但是有一个限制,即最大 HARQ 进程数,考虑到用户终端缓存状态和业务时延,LTE 规定了每个用户挂起的最大进程个数。所谓“挂起”就是已发起初传,但基站还没有接收到对应的一次 ACK。FDD 里这个最大进程个数为 8,而 TDD 里各上下行配比不一样,具体参见协议。

当挂起的进程个数已经达到最大后,基站必须重传前面某个传输错误的包,而不能继续发起新数据包的初传。如果没有这个限制,因为没有正确处理的数据包,用户终端需要缓存这些数据包以便多次传输合并译码,所以会要求终端有很大的缓存空间;另一方面,一个进程被挂起太久,显然这个业务时延太大。

还有一个问题,既然下行重传不是固定位置,UE 怎么知道某个下行子帧上的 PDSCH 传输是初传还是某个重传呢? 不用担心每个 PDSCH 对应的 PDCCH 里有进程编号和初传/重传指示,同一个 PDSCH 的初传/重传 HARQ 进程编号相同,用户通过这个就能区分出来。

19.2　上行调度及 HARQ

上行和数据传输相关的物理信道有两个:

- 物理上行控制信道(Physical Uplink Control Channel,PUCCH)。
- 物理上行共享信道(Physical Uplink Shared Channel,PUSCH)。

19.2.1　重点介绍 PUCCH

LTE 里,PUCCH 有几个作用:

- 用来请求被上行调度。
- 用来反馈下行数据传输 PDSCH 对应的 ACK/NACK。
- 用来反馈下行信道相关信息,比如信道质量指示(Channel Quality Indicator,CQI),或者预编码矩阵指示(Precoding Matrix Indicator,PMI),或者信道秩指示(Rank Indicator,RI)。

根据作用不同,PUCCH 分为多种格式:PUCCH format 1、format 1a/1b、format 2/2a/2b。不论哪种格式,通常所有用户对应的 PUCCH 被配置在整个上行频带的两边边缘部分,并且每种格式的一个信道由两个 PRB 组成,这两个 PRB 在两个时隙分别位于整个频带的两边,以获得频率分集增益,如图 19-1 所示。

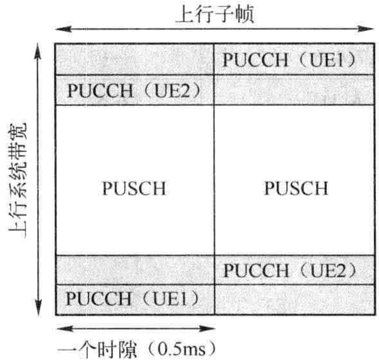


图 19-1　PUCCH 在整个系统带宽的两边

1. PUCCH format 1

PUCCH format1 用来指示上行调度请求(Scheduling Request,SR),整个结构是这样的:每个时隙分为两部分,中间三个 OFDM 符号是参考信号,剩下的 OFDM 符号(4 个或 3 个)是承载数据的部分。PUCCH 对应的一对 PRB 上每个 OFDM 符号的频域 12 个子载波上承载一个长度为 12 的序列,同一个用户同一个时隙里的几个承载数据的 OFDM 符号上的序列由同一个序列时域扩展而来。比如,某个用户的频域序列是 $\boldsymbol{C}_0$,那么 4 个承载数据的 OFDM 符号上分别承载的是 $w_0\boldsymbol{C}_0, w_1\boldsymbol{C}_0, w_2\boldsymbol{C}_0, w_3\boldsymbol{C}_0$,参考信号部分类似,如图 19-2 所示。

图 19-2　PUCCH 格式 1 一个时隙的结构

注意,同一对 PRB 里可以承载多个用户的 PUCCH format 1,两个用户之间要么频域 $\boldsymbol{C}$ 序列不同且正交,要么时域 $\boldsymbol{w}$ 序列不同且正交。一些细节稍微提一下:如果当前上行子帧是上行探测信号发送时刻,那么第二个时隙的最后一个 OFDM 符号不能用,即第二时隙承载数据的 OFDM 符号少一个,相应地 $\boldsymbol{w}$ 序列换成长度为 3 的序列;为了随机化小区间干扰,OFDM 符号之间有一个相位差别,即最后真正发出去的是 $w_0\boldsymbol{C}_0\phi_0, w_1\boldsymbol{C}_0\phi_1, w_2\boldsymbol{C}_0\phi_2, w_3\boldsymbol{C}_0\phi_3$,而这个 ϕ 具体是多少,各小区一般不一样,由各小区 PCI 和时隙号等确定。

每个用户的 SR 资源由基站配置,是周期性的。首先基站为用户分配一个 SR 周期,各用户可以不一样。接着为用户配置可用的 format 1 资源,包括在哪一对 PRB 上,$\boldsymbol{C}$ 序列是哪一个,$\boldsymbol{w}$ 序列是哪一个。如果到了配置的 SR 时刻,用户想请求上行调度,那么用户就在对应的一对 PRB 上,把 format 1 发上去,这个 format 1 结构里用到的序列就是配置的 $\boldsymbol{C}$ 序列和 $\boldsymbol{w}$ 序

列；如果到了配置的 SR 时刻，用户不想请求上行调度，那么用户就什么都不用做。

基站在用户 SR 时刻，根据检测用户是否发了 format 1 来确定用户是否想要请求上行调度。如果检测到了，基站就会上行调度该用户，即为该用户分配 PUSCH 的资源，但是分配的资源量一般很少，因为目前基站只是知道用户有数据要发，但并不清楚到底有多少数据要发，分得太多用不完就是浪费。当获得很少一部分 PUSCH 资源后，UE 可以把更具体的要求通过 PUSCH 告诉给基站，比如 UE 到底有多大的数据量（Buffer）要传。基站在 PUSCH 上收到这些更具体信息后，进一步根据实际情况继续为该用户分配 PUSCH 资源。

2. PUCCH format 1a/1b

PUCCH format 1a/1b 是用来反馈下行数据 PDSCH 对应的 ACK/NACK 的，具体格式和 PUCCH format 1 一样。只不过 ACK 和 NACK 不是用发或者不发来区分，而是根据发送不同的数据符号来确定。其中，format 1a 用来反馈下行单码字 PDSCH 传输的 ACK/NACK，发送的数据符号是 BPSK 调制符号$\{1, -1\}$，即把这两个数据符号的其中一个承载在发送的序列里，比如发送的是

$$1\times w_0C_0, 1\times w_1C_0, 1\times w_2C_0, 1\times w_3C_0,$$

$$\text{或者}, -1\times w_0C_0, -1\times w_1C_0, -1\times w_2C_0, -1\times w_3C_0$$

format 1b 用来反馈下行双码字 PDSCH 传输的 ACK/NACK，发送的数据符号是 QPSK 调制符号

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

即把这 4 个数据符号的其中一个承载在发送的序列里，和 format 1a 类似。基站根据在 PUCCH format 1a/1b 上解调出的数据符号来确定用户反馈的是 ACK 还是 NACK。

实际上 format 1 可以看成也是用两个数据符号来区分是否要请求上行资源调度，承载数据 1 表示要请求资源调度，承载数据 0 表示不请求资源调度。PUCCH format1 和 1a/1b 可以处于同一对 PRB，只要对应的频域 C 序列或时域 w 序列正交即可。

接下来谈谈每个用户对应的 PUCCH format1 a/1b 资源分配问题，包括所在 PRB 对位置、C 序列和 w 序列。注意，当用户有下行 PDSCH 调度的时候，才需要 PUCCH format 1a/1b 资源，而 PDSCH 调度本身是根据业务实际情况触发的，一般来说是没有规律可循、不能提前预测的。所以和 PDCCH 预留资源一样，不能采用提前固定分配的方法，因为会造成资源浪费；又不能像 PDCCH 一样，采用统计复用的方法，统计复用的时候其实是尽力而为在传输 PDCCH，即仍然有可能有想传输但又没有地方传输的 PDCCH。不过那里问题不大，大不了稍微有点延迟，下个子帧再传就好了。但是，对于 PUCCH 来说，PDSCH 发了以后，其对应 ACK/NACK 反馈的时间是确定的；如果时间到了，没有对应 PUCCH format 1a/1b 资源反馈，基站就认为 PDSCH 接收错误会发起重传。另一方面，和 PDCCH 统计复用不同的是，统计复用时基站可以自行确定该调度哪些用户，而不会产生冲突；如果用户也是有几份可用的 PUCCH 资源来统计复用的话，其实根本就没法“统计”，因为 UE 是“傻”的，它并不清楚其他 UE 怎么决策，所以 UE 自己也给不出好的决策，如果用户之间有资源重合，那么可能多个用户选择了相同的一份 PUCCH 资源，造成冲突。所以，统计复用是行不通的。所以，每个被下行调度的 UE 必须有一份互不相同的 PUCCH 资源，

而没被调度的用户没有。

既然强调被下行调度的 UE 才有 PUCCH 资源,那么这个资源分配一定和下行调度的某个特征相关。回忆一下,如果一个 UE 被下行调度到有什么特征,或者说 UE 怎么知道自己被调度了?首先,UE 会收到 PDCCH,然后会收到 PDSCH。最好能通过一个公式计算出该 UE 的 PUCCH 资源索引号,当然要求该公式对一个输入值只能输出一个索引号。那么,就同时要求不同用户的输入值一定是不一样的。那么从 PDCCH、PDSCH 里能提出一个不同用户一定不同的特征量吗?仔细观察可以发现,每个被调度 UE 的 PDCCH 对应的 CCE 一定是不同的。但不同 UE 的 CCE 聚合度不同,而一定要对它们提取一个公共的东西的话,那么可以是每个用户 PDCCH 所有 CCE 里编号最小的那个,因为每个用户不管聚合度是多少,总有个 CCE 编号最小的,并且每个用户肯定不一样。LTE 就是这么干的,每个被调度用户用其 PDCCH 最小 CCE 计算出唯一的一份 PUCCH format 1a/1b 资源来反馈 PDSCH 的 ACK/NACK。

3. PUCCH format 2/2a/2b

PUCCH format2/2a/2b 用来反馈信道信息,包括 CQI、PMI 和 RI。具体反馈这三个中的哪些,由基站为 UE 配置的反馈模式确定。PUCCH format 2/2a/2b 和 PUCCH format 1/1a/1b 的区别在于,PUCCH format 2 只用到频域序列 $\boldsymbol{C}$,没有时域序列扩展 $\boldsymbol{w}$,时域上不同数据 OFDM 符号承载的是不同的数据符号,数据符号承载在频域序列 $\boldsymbol{C}$ 上。每个时隙有两个参考信号,位于第二和倒数第二个 OFDM 符号上,剩下 5 个调制符号用于承载数据符号,如图 19-3 所示。

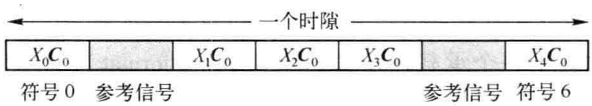


图 19-3 PUCCH 格式 2 一个时隙的结构

两个时隙共可以承载 10 个 QPSK 符号,即 20 个比特。这 20 个比特由信道信息比特通过 Reed - Muller 编码(20,A)信道编码而来,具体编码已在第三部分信道编码时举例讲过。

关于每个用户的 PUCCH format 2 资源分配方面,因为信道信息是周期反馈的,所以 PUCCH format 2 资源可以根据周期预先静态配置,不同用户周期可以不同。

4. PUSCH

用户上行数据传输 PUSCH 完全由基站控制,基站给用户分配资源,UE 在分到的资源上发送上行数据即可。其主要涉及的具体数据发射接收处理过程后续单独讲解。

19.2.2 上行 HARQ 和数据重传

1. 上行 HARQ

和下行一样,也就是确定上行 PUSCH 和下行 ACK/NACK 的时序对应关系。FDD 仍然为 $n+4$ 的关系,TDD 仍然和上下行配比相关,具体各种配比里下行 PUSCH 子帧和下行 ACK/NACK 的时序关系如表 19-2 所示,有数字的子帧都是上行子帧,其中的数字 k 表示当前上行子帧 n 上传输的 PUSCH 需要在下行子帧 $n+k$(循环记数)上反馈对应的 ACK/NACK,这些 ACK/NACK 承载在 PHICH 信道上。

表 19-2　TDD 各上下行子帧配比上行 HAQR 时序关系表

TDD 上下行子帧配比	子帧编号 n									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0			4	7	6			4	7	6
1			4	6				4	6	
2			6					6		
3			6	6	6					
4			6	6						
5			6							
5			4	6	6			4	7	

2. 上行数据重传

上行数据重传和下行不同，上行数据重传采用同步方式，即每个 PUSCH 的前一次传输和下一次重传的位置关系是预先定义好的。对于 FDD 系统，前一次传输发生在上行子帧 n，那么下一次重传确定发生在上行子帧 $n+8$ 上。对于 TDD 系统，重传位置也是固定的，但具体位置和上下行配比相关，具体参见协议。

上行之所以需要同步重传，原因还是因为 UE 是“傻”的，它自己不能随便决定在哪个地方发起传输，一方面它需要的上行时频资源需要基站分配，另一方面如果各 UE 自行确定会发生碰撞。

第 20 章　下行数据传输机制

20.1　数据比特流处理流程

LTE 里下行数据 PDSCH 传输，对数据比特流的整个处理流程如图 20-1 所示，本节按顺序介绍各个环节。

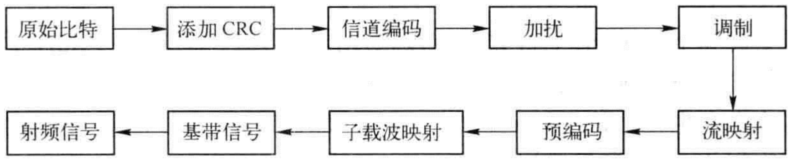


图 20-1　PDSCH 数据比特流处理流程

20.1.1　添加 CRC——接收对错的判断

添加 CRC 是为了接收端能判断接收的数据是正确还是错误，从而反馈相应的 ACK 或 NACK。CRC 原理请参考第三部分内容。

20.1.2　信道编码——选择合适的信号

在信道编码之前，基站会确定要发多少个原始信息比特给用户，以及采用的调制编码方式。并且会把这些信息在对应的 PDCCH 的 MCS 字段中体现出来，MCS 字段具体体现的是调制阶数和原始信息比特个数 *Payload*。并且在对应的 PDCCH 里，基站还告诉了用户的资源分配情况。用户在分配给它的时频资源上扣除控制信道、参考信号等开销外，可以确定还有多少 RE 用于传输数据，再根据平均每个 RE 能承载的调制符号个数，来确定这么多 RE 总共能承载多少个调制符号，以及每个调制符号由多少个编码比特组成。比如，共有 N 个 RE 可用于承载调制符号，若是 Alamouti 发射分集传输，那么平均每个 RE 能承载 1 个调制符号；若是空间复用 L 个数据流传输，那么平均每个 RE 可以承载 L 个调制符号。若调制阶数都为 M，其中 BPSK 为 1 阶、QPSK 为 2 阶、16QAM 为 4 阶、64QAM 为 6 阶，则每个调制符号由 M 个编码比特确定，那么该用户的编码比特总数为 $N \times L \times M$，也即用户能确定实际码率应该为 $\frac{Payload}{N \times L \times M}$，从而相应地译码。

LTE 里数据信道编码方式主要是 Turbo 码，其基本码率是 1/3，也就是说，不管最后数据根据实际可用 RE 等确定出来的码率是多少，先把 N 个原始信息比特编码生成 $3N$ 个编码比特。接下来，若实际码率比 1/3 低，比如 1/4，那么按照一定的规则重复 $3N$ 个编码比特中的部分比特直到达到实际码率的 1/4 为止，即重复至得到 $4N$ 个编码比特；相反，若实际码率比 1/3 高，

比如 1/2，那么按照一定的规则去掉 $3N$ 个编码比特中的部分比特直到达到实际码率的 1/2 为止。这里所谓的“重复”或“去掉”部分编码比特的规则有多套，每一套就是一个冗余版本。如果存在数据重传，多次传输中的每次可以选择不同的冗余版本，每次传输采用的冗余版本也会在 PDCCH 里指示。值得提到的是，若发生重传，重传时的实际码率不一定和初传或其他重传相同，但每一次传输的编码比特都是从公共的 $3N$ 个比特里选出来的，从而可以多次传输联合译码，这也是基本码率 1/3 存在的意义。若没有一个基本码率，每次传输都按照实际码率来编码，若重传码率改变，那么多次传输的编码比特之间可能没有什么联系，也就谈不上联合译码。从而，也就只能每次传输单独译码了，不能把多次传输的作用完全发挥出来。

具体 Turbo 编码过程还是细节比较多的，请参考 LTE 36.212 协议 Turbo 编码相关章节，这里就不细讲了。

20.1.3　比特加扰——随机化干扰

接下来需要对编码比特进行加扰。加扰的目的主要是随机化小区间干扰，以及避免特殊比特串以便于传输。所谓加扰就是一串和编码比特等长的比特和编码比特各比特对应模 2 相加得到一串新比特。这一串用来加扰的比特 $C(n)$ 的生成公式如下：

$$C(n) = (x_1(n+1600) + x_2(n+1600)) \bmod 2 \tag{20-1}$$

$$x_1(n+31) = (x_1(n+3) + x_1(n)) \bmod 2 \tag{20-2}$$

$$x_2(n+31) = (x_2(n+3) + x_2(n+2) + x_2(n+1) + x_2(n)) \bmod 2 \tag{20-3}$$

其中，序列 $x_1(n)$ 的初始值为 $x_1(0)=1, x_1(n)=0, n=1,2,\cdots,30$；序列 $x_2(n)$ 的初始值由如下公式确定：

$$c_{\text{init}} = \sum_{i=0}^{30} x_2(i) \cdot 2^i \tag{20-4}$$

其中，c_{init} 由每个物理小区的物理小区标识，当前子帧编号和用户标识确定。

20.1.4　生成星座符号——机械的步骤

星座点调制很简单，就是根据调制阶数 M，把每 M 个编码比特按星座图换成星座点对应的数值，数值一般是复数。

20.1.5　星座符号到空间数据流——分组行动

再下来，就是把调制符号映射到空间数据流上，这也很简单。假设当前有 L 个空间数据流，主要也就是定义一个规则，使得发射端和接收端统一清楚哪 L 个调制符号在同一个 RE 上传输，到时接收端根据解调译码的需要可以还原到空间映射之前的顺序就行了。LTE 里也分别考虑单码字、双码字等映射关系，大家参考协议了解就行了。

20.1.6　对空间数据流预编码——每组再伪装

再接下来就是根据当前选择的预编码方式以及预编码矩阵对每一组 L 个空间流上的 L 个调制符号进行预编码，所谓预编码就是拿一个矩阵相乘。到底预编码需要输出多少个数据呢，大概来讲就是有多少根发射天线就出多少个数据，即若有 t 根发射天线，预编码矩阵就是 $t \times L$ 的矩阵。

20.1.7 基带信号生成并上射频发送——出发

接下来,假设预编码出来 t 个数据,将映射到 t 根天线上。注意,当前子帧每个用户的数据不管是采用哪一种预编码方式(发射分集、空间复用等)都可以看成生成 t 个数,只不过有些用户有些天线上生成的数据是 0 而已。把当前子帧所有用户的数据分别映射到 t 根天线上对应的时频资源位置,接下来就可以生成每根天线对应的基带信号了。比如,天线 p 上某个 OFDM 符号所有子载波承载的数据(包括参考信号)为 $a_0,a_1,\cdots,a_{N-1}$,则该 OFDM 符号对应的基带信号为

$$s(t)=\sum_{i=-\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}^{-1}a_{i+\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi i\Delta ft}+\sum_{i=1}^{\lceil\frac{N}{2}\rceil}a_{i+\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi i\Delta ft}$$

注意,这里子载波 0 并没有用来承载数据,主要是考虑避免载频本振泄露问题。最后上载频,假设系统载频的中心频点是 W_c,那么将信号 $s(t)$ 的实部 $\mathrm{Real}\{s(t)\}$ 和虚部 $\mathrm{Imag}\{s(t)\}$ 按 I/Q 正交调制即可,即发射的信号为

$$\mathrm{Real}\{s(t)\}\cos(W_c t)-\mathrm{Imag}\{s(t)\}\sin(W_c t)$$

20.2 下行参考信号设计

LTE 系统下行采用 OFDM 技术,每个无线帧由 10 个子帧组成,每个子帧由 14 个 OFDM 符号组成。根据系统带宽不同,每个 OFDM 符号所包含的子载波个数不同。把一个子帧画出来,可以看到一个子帧从时间上看可以划分成 14 份,从频率上看可以划分成很多个子载波,假设为 512 个,从时频联合起来看,一个子帧由 14×512 个小方格组成,每个小方格对应某个 OFDM 符号的某个子载波。每个子帧对应的所有小方格就是系统可用的所有时频资源。

在传输数据的时候,就可以看成是先把数据一个个地放到小方格里,接收端接收到一个子帧的数据后再从小方格里一个个取出来。当发射端有多根天线时,每根天线都有自己的一板小方格。至于每根天线上各个小方格装的数据之间的关系就是发射接收算法要关心的事了。

现实技术里,大多数情况下的数据解调,都是采用相干解调,即接收端需要先把收发端之间信道,以及预编码等信息通过某种方式获得,然后再解调数据。

以本书第四部分讲过的点对点 MIMO 系统为例说明。前面讲过发射端把每个数据流 x_i,先预编码成 t 个数得到 x_iW_i,然后把所有数据流预编码后的数据对应相加得到

$$\sum_{i=1}^{L}x_iW_i$$

然后 t 根天线每根发送其中的一个分量。在 OFDM 系统中,什么叫 t 根天线每根发送其中的一个分量呢? 实际上是说,把 t 个分量分别装到 t 根天线对应的时频资源上某同一个小方格里。假设对于该小方格来说,发射天线 i 到接收天线 j 的信道衰落系数为 h_{ji},并令

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}h_{11}&h_{12}&\cdots&h_{1t}\\h_{21}&h_{22}&\cdots&h_{2t}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\h_{r1}&h_{r2}&\cdots&h_{rt}\end{pmatrix}$$

接收端把每个接收天线上对应于发射端装数据的那个小方格中的数据取出来，所有 r 根接收天线上这样的数据写成向量形式，即为

$$\sum_{i=1}^{L} \boldsymbol{H}\boldsymbol{W}_i x_i + \omega$$

其中 HW_i 为无关向量。接收端要解调得到 x_i，可以想象至少有两种机制：

- 接收端通过某种方式分别得到 $\boldsymbol{H}$ 和 W_i，再合成 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{W}_i$。例如，LTE 系统中，公共参考信号（Common Reference Signal，CRS）机制下 $\boldsymbol{H}$ 是接收端通过 CRS 估计得到的，而 W_i 是通过发射端发送给接收端的 PDCCH 中的 PMI 指示的。
- 接收端通过某种方式直接就获得 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{W}_i$。例如，LTE 系统中，专用解调参考信号（Demodulate Reference Signal，DMRS）机制就是为了支持这种功能的。

下面分别讲讲两种机制如何工作。

20.2.1　公共参考信号——阳光普照

先讲第一种，接收端自己估计信道 $\boldsymbol{H}$。首先一个问题：接收端怎么区分发射端天线？比如，系统说发射端用了 4 根发射天线发送，接收端怎么判断是 4 根？是哪 4 根？接收端自己看吗？当然不是。接收端只是个机器，即使如 iphone 手机那么智能，它还是不能自己盯着发射端的天线，看信号如何跑到它那儿去。只能通过定义某些特征来让接收端区分，这个特征就是 LTE 系统所谓的天线口（Antenna Ports）。

再回头看一下，系统说发射端用了 4 根发射天线发送，也就是说，对于每根接收天线 j 来说，就是要得到 4 个数（$h_{ji}, i=1,2,3,4$）而已，所以，先别管接收端能不能看到发射端天线，而是要想办法让接收端到哪儿去弄出这 4 个数来就好。

另一方面，说到估计信道，显然容易想到就是发送一个接收端已知的东西给接收端，接收端根据这个已知的东西在接收端被接收成什么样，和没经过信道本来的样子比较，就知道信道的作用效果了，也就估计出信道了。这种用于估计信道的、接收端已知的信号称为导频或者参考信号。

又回到在 OFDM 系统时频资源上发送问题，要发送这些参考信号，就得把这些参考信号装到某个小方格里。注意，要保证接收端容易区分对应于不同发射天线的参考信号。怎么才能容易区分呢？最简单的方法就是：在发射天线 1 上装对应于发射天线 1 的参考信号 P_1 的小方格里，其他天线最好什么都不装，即装的是 0。那么，接收天线 j 把该对应小方格中的数据取出来时，形如

$$h_{j1}P_1 + h_{j2} \times 0 + h_{j3} \times 0 + h_{j4} \times 0$$

注意到接收端知道 P_1 等于多少，理想情况下，把接收到的数据和 P_1 相除就得到发射天线 1 到接收天线 j 的信道了。

同理，接下来为发射天线 2，3，4 找不同的小方格来发送它们分别对应的参考信号 P_2, P_3, P_4，最后接收端就得到所有 h_{ij} 了。对应每根发射天线的参考信号所占的小方格集合在 LTE 系统中就是每个天线口对应的参考信号图案。LTE 里系统里的天线配置有三种，分别为 1、2、4 天线，其对应的最多 4 个天线口的参考信号图案如图 20-2 所示。其中，仅示意了在一对 PRB 上的情况，每对 PRB 里参考信号的相对位置相同。

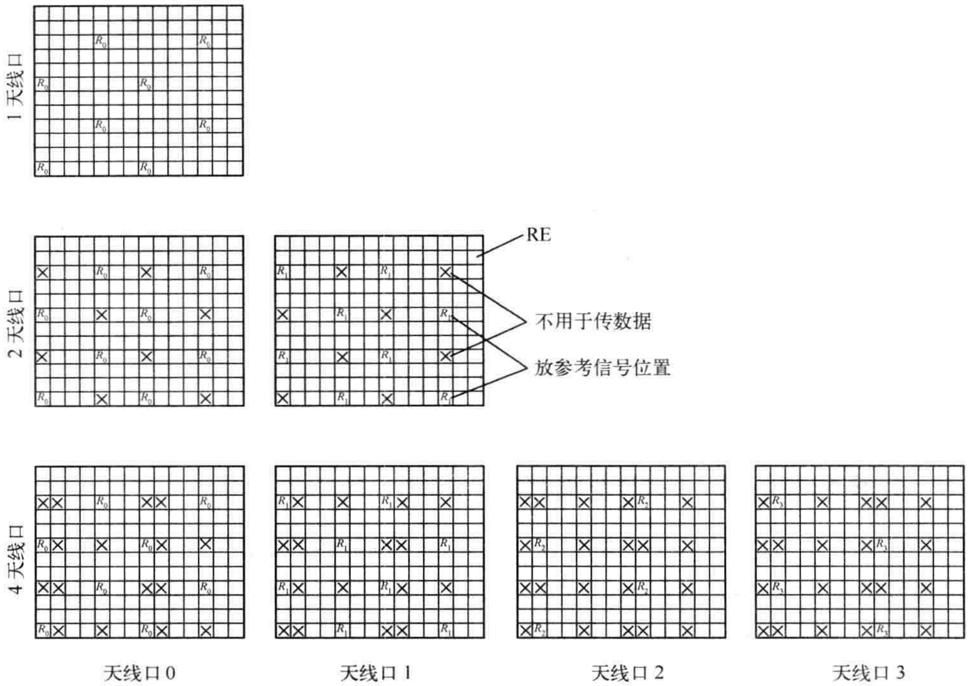


图 20-2 LTE 公共参考信号天线口 0,1,2,3

再回顾一下,第一种方案里,普通数据是经过预编码的,而参考信号是没经过预编码的,(当然,如果你想得够多,其实参考信号也可以看成是比较特殊的预编码,即形如$[1,0,0,0]^{T}$,$[0,1,0,0]^{T}$,…),并且不同接收端都可以用发射端发的这类参考信号估计出发射端到它们各自的信道(阳光普照),因此这类参考信号被称为 CRS。另外,上面是以点对点 MIMO 来讲的,但并不表示这类参考信号只用来支持 MIMO,任何需要估计信道的发射接收方法都可以使用,比如 Alamouti 发射分集发射方法。

20.2.2 专用解调参考信号——VIP 定制

再讲第二种方法,第二种方法中,接收端要估计出 $\boldsymbol{HW}_i$,当然仍然要通过参考信号。也就是说,若参考信号为 P_i,在接收端理想情况下要收到 $\boldsymbol{HW}_iP_i$,怎么做呢? 很简单,发射端把参考信号先预编码为 P_iW_i,然后从发射端天线发送出去,接收端收到的就是 $\boldsymbol{HW}_iP_i$,显然接收端就能估计出 $\boldsymbol{HW}_i$ 了。需要注意的是,对应于数据流 x_i 的参考信号 P_i 所用的预编码必须和数据流 x_i 采用的预编码一样。这种参考信号在 LTE 系统里称为解调参考信号(DMRS)或者专用参考信号(Dedicated Reference Signal,DRS)。

同样,接收端需要区分开对应不同数据流的 $\boldsymbol{HW}_i$,最简单的方法仍然是把对应不同数据流的参考信号放在不同的小方格中发送给接收端,但是 4 根天线同一个小方格中装的分别是 $P_i\boldsymbol{W}_i$ 的分量,这点与 CRS 不同。当然,这里对应不同数据流的 DMRS 和前面对应不同发射天线的 CRS 都通过放在不同的小方格上来相互区分是最简单自然的方法。如果这种方法最后使得参考信号占用的小方格过多的话,可以把不同数据流的 DMRS 和前面对应不同发射天线的 CRS 放在相同的小方格上,当然这时需要采用额外的手段使得它们在接收端能区分开,比如码分,这部分内容不再详细讲,它并不影响前面讲的最本质的思想。

这类 DMRS 是不能公用的，是各个用户定制的，因为发送给不同接收端的数据流数以及预编码都是不同的，一个接收端用另一个接收端的 DMRS 估计信道就是自找麻烦了。CRS 和 DMRS 还有一个区别也许大家已经注意到了，对于 CRS，系统里发射端有几根天线，就必须有多少个对应的 CRS 天线口；而 DMRS 的个数与实际发送的数据流个数相等。

在 LTE 系统 R8 中，对于物理层各种发送接收算法原理，例如，MIMO、发射分集等，没有学过/思考过的同学，基本上都会对不同天线口的定义及编号搞糊涂。比如，R8 里 CRS 有天线口 0、1、2、3，又有个天线口 5，如图 20-3 所示，天线口 5 是用来支持单流 MIMO 或者叫单流波束成型的，采用第二种方案支持解调。那到底是几根天线啦？天线口 0、1、2、3 和天线口 5 到底是什么关系？

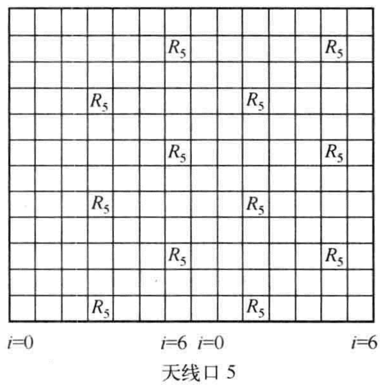


图 20-3 LTE 专用参考信号天线口 5

看了上面的讲解，可能大家已经知道答案了。实际上，发射天线个数还是那么多，比如 4 根。因为一个系统里，有些接收端可能支持发射分集，有些接收端可能支持第一种方案的 MIMO，有些接收端可能支持第二种方案的 MIMO，也就是说，有些接收端就是要单独把信道 $\boldsymbol{H}$ 给估计出来，有些直接把 $\boldsymbol{HW}_i$ 估计出来。所以，以 4 根天线为例，发射端需要把 4 根天线对应的 CRS 都发了，即天线口 0、1、2、3 都在，同时对于支持第二种方案的接收端的各数据流对应 DMRS 天线口 5 也在这 4 根天线按上面讲的原理发了。

20.3 传输模式简介——LTE 招式大全

LTE 从逻辑上定义了多种传输模式，每个用户只能处于一个传输模式，具体由网络侧根据情况配置，并且可以根据具体情况进行传输模式间的切换。下面我们介绍一下 LTE 的这些传输模式里，都用到哪些信号发射处理方法。

20.3.1 第一招：单天线传输

单天线传输表示发射端基站仅有一根天线，该天线在接收端看来对应于天线口 0。对于发送的调制符号，不需要经过预编码，直接映射到仅有的一根天线即可。相应地，对于参考信号仅有天线口 0 上的 CRS，接收端根据天线口 0 的 CRS 估计信道进行数据解调。

20.3.2 第二招:发射分集传输

LTE 发射分集主要采用了以 Alamouti 方案为基础的发送方式,用于 2 天线或 4 天线情形。

对于 2 天线情形,就是最普通的 Alamouti 的发射分集方案。回顾 Alamouti 发射分集方案,第一次天线 0 上发送 x,天线 1 上发送 y;第二次天线 0 上发送 y^*,天线 1 上发送 $-x^*$。这里的次数可以以多种形式实现。对于一个子帧来说,拿两个 RE 都可以用来实现"两次"传输,只要求这两个 RE 各天线到接收端的信道衰落系数近似相等。在两个 RE 的其中一个 RE 上对应的天线 0 来说发送 x,天线 1 发 $-y^*$;在另一个 RE 上对应的天线 0 来说发送 y,天线 1 发送 x^*,只要把"哪两个 RE 是一对"这个规则定义清楚就好了。

要两个 RE 的信道近似相等,一般来说就是两个 RE 的距离隔得不是太远,最自然的就是同一个 OFDM 上的相邻两个 RE,或者同一个子载波上时间相邻的两个 RE。但是,LTE 里由于参考信号等关系,可能使得同一个子帧同一个子载波上可用的 RE 是奇数,就会剩下一个 RE 没法配对,比较麻烦,并且下行还可能是分布式资源分配,即在两个时隙间有跳频,这样一来即使可用 RE 总数为偶数,但每个时隙有个单 RE,还是不方便配对。而从每个 PRB 里一个 OFDM 上可用的 RE 来看,任何情况都不会出现这些问题,每个 OFDM 符号上都有偶数个 RE 可用于数据传输,所以 LTE 在应用 Alamouti 方案时,同一个 OFDM 上相邻两个 RE 作为一对处理。这种 Alamouti 的具体应用形式,通常也称为空频块编码(Spatial-Frequency Block Coding,SFBC)。

上面讲的是 2 天线的情况,4 天线情况与此类似。因为 Alamouti 方案只是针对 2 天线来设计的,4 天线时每次实际使用的也是其中 2 根天线,即先把 4 根天线分成两组,天线口 0 和天线口 1 一组,天线口 2 和天线口 3 一组,并且相邻两对 RE 使用的天线组不一样,这个方案也称为 SFBC + FSTD。

举个例子来说明,假设同一个 OFDM 符号上连续的 RE1、RE2、RE3 和 RE4,其中 RE1 和 RE2 作为一对利用天线口 0 和天线口 1 采用 Alamouti 方式发送 x_1、x_2,相当于天线口 2 和天线口 3 对应的位置发送的数据为 0;RE3 和 RE4 作为一对采用天线口 2 和天线口 3 采用 Alamouti 方式发送 x_3、x_4,同样此时这两个 RE 在天线口 0 和天线口 1 对应的位置发送的数据是 0。

LTE 里控制信道 PCFICH、PHICH、PDCCH 和广播信道 PBCH 总是采用发射分集的方式发送,而 PDSCH 根据情况,基站确定是否采用发射分集方式发送。特别地,我们讲讲广播信道的设计。

前面提到了广播信道是采用发射分集方案传输的,这里我们稍微详细讲解一下。如果系统里的天线配置是一根天线,广播信道按单天线模式发送;如果是两根或四根天线,那么分别按两天线发射分集和四天线发射分集模式发送。但问题是,UE 初次接收广播信道时,仅仅下行同步而已,还没有任何渠道获知当前系统到底是一天线、两天线,还是四天线配置。怎么解决呢? 办法就是盲检测了,即一个一个试,如果某个假设下检测出来的数据能通过 CRC 校验,则证明这个假设是对的,系统就是按这个假设配置的。但是,我们会发现广播信道设计里还设计了在广播信息比特的 CRC 上加上不同天线配置的扰码来区分天线个数。既然盲检测能搞定的事情,这个设计是多此一举吗? 仔细分析一下,这还真不是多此一举。

在讨论之前,还有一个设计需要提到,不论系统实际的天线配置是多少,广播信道所在时频资源区域(系统带宽中心 6 个 PRB),总是把 4 个天线口的 CRS 对应的 RE 排除用于承载广播数据。而这些 RE 上具体发送了几个天线口的 CRS 还是以实际系统天线配置为准,没有对应 CRS 的 RE 就空着或者认为发送的是数据 0。这个处理只是为了统一设计,比如可以使得

承载广播数据的 RE 位置一致,从而数据量保持一致,即信道编码码率一致,不用在假设不同天线时,还要考虑码率的变化等。

下面分析各种天线配置下的广播信道解调方式。

- 单天线情形。如果假设是单天线配置,UE 假设天线口 0 上的 CRS 是存在的,用其估计出信道衰落系数。然后取出广播数据,每个 RE 单独解调,然后译码和 CRC 校验。
- 两天线情形。如果假设是两天线配置,UE 假设天线口 0 和天线口 1 上的 CRS 是存在的,用其估计出两个天线口的信道衰落系数。然后取出广播数据,同一个 OFDM 符号上每相邻两个 RE 一起用估计得到的信道衰落系数按照 Alamouti 方案解调,然后译码和 CRC 校验。
- 四天线情形。如果假设是四天线配置,UE 假设天线口 0、天线口 1、天线口 2 和天线口 3 上的 CRS 是存在的,用其估计出四个天线口的信道衰落系数。然后取出广播数据,同一个 OFDM 符号上每相邻两个 RE 分别交替采用天线口 0/1 和天线口 2/3 估计得到的信道衰落系数一起按照 Alamouti 方案解调,然后译码和 CRC 校验。

仔细观察,我们会发现两天线配置和 4 天线配置的广播数据解调方式唯一的区别是用到的信道衰落系数表面上是不同的,其他过程全部是相同的。如果在 4 天线配置中,把本来该用天线口 2 和天线口 3 信道衰落系数的地方用天线口 1 和天线口 2 的信道衰落系数替换会怎么样?如果系统确实是按 4 天线发送广播数据,一般来说解调会出错误,即 CRC 校验通不过。但是,如果不巧,天线口 2 和天线口 3 的信道衰落系数与天线口 0 和天线口 1 的信道衰落系数分别相等呢?此时是否替换,实质都是一样的,即两种解调方法的效果是一样的。也就是说,在这种特殊情况下,系统是 4 天线配置,而 UE 先按 2 天线解调,也能正确解调广播数据,从而会对系统的天线配置情况判断错误。

而如果对各天线的 CRC 加了不同的扰码,虽然在去掉扰码之前,2 天线和 4 天线得到的比特是一样的,但用不同的扰码去扰以后,得到的比特序列就不一样了,只能有一个能通过 CRC 校验,这样这一特殊情况就解决了。所以,CRC 上的扰码不是多此一举。

思考一下

最后,请大家思考,如果 UE 在盲检测广播信道时,是按天线配置从大到小的顺序来尝试解调,会不会有同样的问题呢?如果有同样的问题,问题的严重程度或者说发生概率是一样的吗?

其他信道,如 PCFICH、PDCCH 等的解调,因为解完广播信道后已经知道系统的天线配置,因此所采用的发射分集方式是确定的,直接相应解调即可,不用广播信道这么复杂。

20.3.3　第三招:开环空分复用传输

开环空分复用的主要思想是:可能有空间多流传输,但其预编码并不是根据信道情况实时调整的,而是预定义好的,不用理会信道情况直接使用就可以了。

具体地,在 LTE 中这个发送方法对应大时延循环延迟分集(Large Delay CDD)。其做法是,预先定义几个可用的预编码矩阵 $\boldsymbol{W}$,各个子载波 i 结合预编码矩阵 $\boldsymbol{W}(i)$ 和对应的各天线时延 $\boldsymbol{D}(i)$ 按式(20-5)联合预编码,最后等价于各子载波经历的等效信道变来变去,从而达到分集效果。

$$\begin{pmatrix} y^{(0)}(i) \\ \vdots \\ y^{(p-1)}(i) \end{pmatrix} = \boldsymbol{W}(i)\boldsymbol{D}(i)\boldsymbol{U}\begin{pmatrix} x^{(0)}(i) \\ \vdots \\ x^{(v-1)}(i) \end{pmatrix} \tag{20-5}$$

对于不同数据流个数 v,式(20-5)中用到的矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和时延矩阵 $\boldsymbol{D}(i)$ 分别为

- 数据流个数 $v=2$,

$$\boldsymbol{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}(i)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi i/2}\end{pmatrix}$$

- 数据流个数 $v=3$,

$$\boldsymbol{U}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/3} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi/3}\\ 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi/3} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}8\pi/3}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}(i)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi i/3} & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi i/3}\end{pmatrix}$$

- 数据流个数 $v=3$,

$$\boldsymbol{U}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/4} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi/4} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}6\pi/4}\\ 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi/4} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}8\pi/4} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}12\pi/4}\\ 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}6\pi/4} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}12\pi/4} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}18\pi/4}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}(i)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi i/4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi i/4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}6\pi i/4}\end{pmatrix}$$

这里的循环延迟分集的实质就是本书第四部分介绍频率分集时的循环延迟分集。然而大家可能发现形式上不太一样,这里并没有明确提出各天线循环延迟分集的操作。实际上,我们在第四部分介绍时,讨论的是时域上做循环延迟。如果时间上循环延迟是采样点的整数倍,从离散采样点来看,相当于采样点序列的循环移位。而由于在 OFDM 系统里,采样点对应频域子载波上的数据的 IDFT。根据 IDFT 的性质"时域循环移位,频域相位旋转",那么只要把往各天线对应的子载波上映射的数据分别做相位旋转,就等价于在时域做了循环移位。这里的相位旋转矩阵 $\boldsymbol{D}(i)$,就是来完成这个功能的,从而对应于循环延迟分集。

20.3.4 第四招:闭环空分复用传输

和开环相反,预编码根据 UE 反馈的信道情况,适时调整。在 LTE 里,通过 CQI 上报机制反馈的信道情况包括建议的空分复用流数、对应的预编码矩阵以及各数据流对应的调制编码方式。其中用到的预编码矩阵也是提前定义好的,并且每个预编码矩阵有个编号(也就是 PMI),UE 在反馈的时候只需要反馈预编码矩阵的编号即可。发射端在发送数据时,在 PDCCH 里把预编码信息通知 UE,UE 先从 PDCCH 获得预编码信息,就可以解调数据了。

20.3.5 第五招:单流波束成型传输

LTE 传输模式单流波束成型特指用 DRS 天线口 5(DMRS 和 DRS 没啥区别)的单流数据传输。波束成型原理和 CRS/DRS 用法上面也讲了,这个方法本身就不讲了。

这个传输模式主要用在 TDD 系统,当然其实 FDD 系统也可以使用,差别仅在于获取信道或者说获取各天线加权系数的方式不同。TDD 系统,因为上下行采用的是同一频率,一般认为上行空口信道和下行空口信道衰落是相等的,所以可以利用上行空口信道信息来计算下行数据传输的天线权值信息;基站可以通过接收 UE 发的上行参考信号来直接得到上行信道信息。而 FDD 由于上下行频率不同,并没有这个性质,下行信道信息一般需要通过 UE 反馈,而反馈回来的一般是量化过后的信道信息(比如提前定义的预编码矩阵编号),理论上来说准确性没有 TDD 直接获取的信道信息高。

20.4　下行功率分配

20.4.1　功率分配的意义

下行功率控制，通常称为下行功率分配，包括不同用户之间的功率分配，以及不同物理信道之间的功率分配。原因是，不同用户离基站的远近不一样，从而功率衰减也不一样；不同物理信道的重要性也不一样，比如参考信号通常比普通数据重要，因为参考信号担负着整个小区所有用户的信道测量任务，如果不先满足它的可靠性，所有用户的数据解调可能都会错误；又如 PDCCH 一般比 PDSCH 重要，因为 PDCCH 错了，UE 都不知道 PDSCH 的存在，PDSCH 的可靠性再好也没用，另一方面，PDSCH 错了，大不了再重传合并，而 PDCCH 就不可能有重传合并一说。所以，在基站侧发射总功率一定的情况下，各用户各信物理道之间是有功率大小分配的。

20.4.2　做了好事要让人知道

上面说了为什么要功率分配，这还不够。基站完成了功率分配，还要使 UE 知道功率是如何分配的，因为 UE 在解调数据时还需要知道自己的数据基站给分配了多少功率。为什么呢？原因是若参考信号 CRS 和普通数据的功率不同，用参考信号 CRS 估计得到的信道并不完全是普通数据的信道衰落。

比如，假设参考信号为 x，其中 $|x|^2=1$，参考信号分配的功率为 P，即实际发送的是$\sqrt{P}x$，因为实际发送的信号功率 $|\sqrt{P}x|^2=P$。经过信道到达 UE，假设信道的衰落系数为 h，用户接收到的是 $h\sqrt{P}x$。若 UE 不知道参考信号的发射功率是 P，那么 UE 能获得的信道信息只能为 $\hat{h}=h\sqrt{P}$，因为毕竟 UE 知道接收的数据里至少有 x。

假设数据是 s，s 是某个调制星座点，大家应该都注意到通常星座图里所有星座点的平均功率为 1，比如 QPSK 的 4 个星座点为

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

若数据符号的平均功率为 P'，那么实际发送的数据是 $\sqrt{P'}s$。假设数据和参考信号经历的信道衰落一样，UE 接收到的数据是 $h\sqrt{P'}s$。要解调数据 s，理论上应该知道 $h\sqrt{P'}$才对，但现在最多只知道 $h\sqrt{P}$，若 $P\neq P'$就会有错误。

若能知道 P 和 P'的相对比例也就解决问题了，LTE 就用了这种方法。用两个参数 ρ_A 和 ρ_B 解决了这个问题，大家对照 LTE 协议 36.213 里的描述看是否属实。

我们也说过 PDCCH 也是有功率分配的，但是你会发现 LTE 里并没有机制去通知 UE 各自的 PDCCH 的功率分配情况。实际上是没办法通知，因为 PDCCH 都没办法解，你还能在哪个地方通知呢，在 PDCCH 外面再套一层 PDCCH 的“PDCCH”？实际上也不需要通知，因为 BPSK/QPSK 调制是幅度无效的，也即功率无效的，完全靠相位区分星座点。对于上面的例子，若数据 s 是 BPSK 或 QPSK 调制符号，仅知道 $h\sqrt{P'}$和知道 $h\sqrt{P}$效果完全一样。$P\neq P'$的影响只会在 QPSK 阶数之上的调制方法里体现出来，而 PDCCH 总是 QPSK 调制，所以不需要通知其功率分配。

第 21 章　上行数据传输机制

21.1　数据比特流处理流程

上行数据比特处理流程和下行几乎没有什么区别，主要也是包括添加 CRC、信道编码、比特加扰、生成星座符号、DFT 预编码、映射到时频资源、基带信号生成并上射频发送。一些差别的地方为，上行多了个 DFT 预编码用于获取单载波特性，上行没有多码字和多天线传输，整体上上行处理要简单很多。具体细节就不一一重复介绍了，请参考 LTE 协议。下面我们讲讲差别较大的一些方面。

21.2　上行参考信号设计

上行参考信号和下行不同，不存在公共参考信号一说，因为每个用户发的上行参考信号接收端只有基站，经历的路径也只是每单个用户到基站间的信道，不存在一种上行参考信号经历了所有用户到基站的信道，从而基站可以根据这样一个上行参考信号得到所有用户到基站的信道信息。但是，参考信号的作用还是一样的，主要是辅助数据解调和使基站获得用户到基站的信道信息以用于确定资源分配、调制编码方式等。

为了完成这两个功能，上行参考信号分为解调参考信号（Demodulation Reference Signal，DMRS）和探测参考信号（Sounding Reference Signal，SRS），其中 DMRS 主要用于完成第一个功能，SRS 用于完成第二个功能。

21.2.1　数据解调参考信号

DMRS 是用户发上行 PUSCH 时，和数据复用在一起同时发给基站的，它和用户数据占用的频率资源相同，与数据时分复用，如图 21-1 所示，每个时隙仅有一个用做 DMRS 的 OFDM 符号，处于时隙中间。

DMRS 上承载的数据仍然是基于 ZC 序列，根据当前 PUSCH 占用的子载波个数，具体为离这个子载波个数长度最接近的 ZC 序列的截断或循环延长。基站在解调数据时，通过 DMRS 估计出信道，并采用适当的插值算法获得整个 PUSCH 占用的时频资源每个 RE 的信道，来解调译码数据。

和下行一样，为了减轻相邻小区参考信号之间的干扰，上行也有相应的机制。不过，这里和下行有区别的是，所有小区上行 DMRS 都在每个时隙的同一个位置。所以，没有办法通过移位来解决，而是通过规划每个小区可用的 ZC 序列来达到减轻相互干扰的目的，比如正交性好的 ZC 序列被应用到不同小区。

21.2.2　信道探测参考信号

SRS 主要用来使基站获得用户到基站的信道信息，方便考虑调度。在讲 SRS 之前，先简单说说 DMRS 为什么不便于完成这个功能。首先，DMRS 所处的位置本身是基站确定的，且仅占用一小部分频带，基站难以获得整个系统带宽里信道信息的全貌；其次，DMRS 是不规则出现的，即用户有数据(PUSCH)发时，才会有 DMRS，因此即使通过 DMRS 获得信道信息，这个信息在应用时也不会准确。

SRS 的设计思想也是围绕克服这两个缺点来确定的。首先，为了克服 DMRS 带宽小的问题，最自然的想法就是 SRS 占满整个系统带宽，但这样的话，由于用户终端发射功率小，功率受限，可能使得 SRS 每个 RE 分到的功率太小以致于基站无法通过 SRS 准确估计信道。因此，SRS 可以支持多种带宽，有些宽有些窄。当 SRS 带宽较窄时，为了使基站获得系统全貌，SRS 采用跳频方式发送，这样跳几次，SRS 相当于在整个系统带宽的所有位置都发过，基站也就知道了全貌。又为了保证第二个问题，即信道的准确性、实效性，SRS 采用周期性的发送方式，这样就不受制于用户是否有数据要传输。

实际系统中，每个用户的 SRS 带宽和周期是根据实际情况配置的，每个用户可以不同。而通常 SRS 是承载在某些上行子帧的最后一个 OFMD 符号上的，如图 21-1 所示，并且这最后一个 OFDM 符号上可能有多个用户同时发 SRS，那么要求在配置各用户周期、SRS 带宽、跳频模式等时，要保证各个用户的 SRS 正交，包括时频资源正交或者序列正交，从而避免相互干扰。

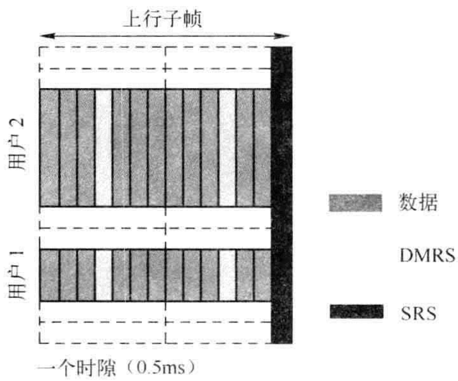


图 21-1　上行数据解调和信道探测参考信号

另一方面，这些上行子帧上其他用户(包括将要发 SRS 的用户)在传上行数据，为了避免数据和 SRS 的相互干扰，在配置 SRS 的上行子帧上，所有用户的 PUSCH(包括 PUCCH)只能传前 13 个 OFDM 符号，最后一个 OFDM 符号不用于承载数据。

21.3　上行功率控制

21.3.1　功率控制的意义

上行功率控制的意义和下行一样，也是因为不同 UE 离基站的距离不同，信道衰落情况不

同，需要选择合适的发射功率。一方面，UE 一般是电池供电的，如果能达到业务要求，没必要一味地采用大功率传输，可以延长电池使用时间；另一方面，适时的功率控制可以减轻相邻小区之间的干扰。

21.3.2 功率控制的实现机制

上行功率控制的实现机制和下行不一样，下行功率分配基站自己完成了再通知一下就行，上行要复杂一些。首先，基站希望 UE 采用多大的功率发送数据，需要由下行信令来通知。并且，各个信道还不一样，PUSCH、DMRS、PUCCH、SRS 的发送功率要求都不一样，都需要相应的信令来指示。一般情况下，这个指示都是采用增减量形式来实现的，即当前的发射功率相对于前面发射功率是增加多少，还是减少多少。假设想要增加功率，但到底能不能完成“增加”呢？这和 UE 的最大发射功率和功率余量有关，假设当前 UE 的发射功率已经达到最大了，想增加也没有增加的空间。这时基站是否要下达增加功率的指示，还需要考虑到 UE 的功率余量，因此 UE 还需要时时上报自己的功率余量(Power Headroom)。另一方面，和下行一样，基站解调数据需要知道参考信号和数据信号之间功率的相对比值，这在上行不需要信令通知，功率是基站分配的，结合功率余量基站知道两者之间的相对比值是多少。具体地，各个信道的功率控制公式就不细讲了，请参考 LTE 协议 36.213 相关章节。

附录 A　通信原理利器之线性空间理论

本章专门重点讲讲线性空间相关的概念、思想、运算以及应用，深刻理解了本章内容，傅立叶变换、离散傅里叶变换及逆变换、拉普拉斯变换、抽样定理、甚至 CDMA 思想、OFDM 思想、MIMO 思想，都比较自然了，基本不需要太多篇幅去讲，请读者朋友重视。

A.1　线性空间

A.1.1　线性空间定义与理解

在一个集合$\mathcal{V}$上定义一个二元运算，记为“ + ”，与数域$\mathcal{F}$联合定义一个运算，记为“ · ”，且满足如下性质：

- 交换律：$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1$；
- 结合律：$(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)$；
- 零元素：在$\mathcal{V}$中有唯一一元素，记为“0”，对于$\mathcal{V}$中任一元素 $\boldsymbol{v}$ 有 $\boldsymbol{v}+0=\boldsymbol{v}$；
- 负元素：对于$\mathcal{V}$中每一个元素 $\boldsymbol{v}_1$，有$\mathcal{V}$中的唯一元素 $\boldsymbol{v}_2$，使得 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=0$；
- $k(l\boldsymbol{v}_1)=(kl)\boldsymbol{v}_1, k,l\in\mathcal{F}$；
- $(k+l)\boldsymbol{v}_1=k\boldsymbol{v}_1+l\boldsymbol{v}_1$；
- $k(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=k\boldsymbol{v}_1+k\boldsymbol{v}_2$。

则，集合$\mathcal{V}$在加运算和乘运算下为一个数域$\mathcal{F}$上的线性空间(Linear Space)，其中元素称为向量。

现在假设$\mathcal{V}$已经是线性空间了，看看$\mathcal{V}$里的元素结构怎样。首先任意取一个 $\boldsymbol{v}_1\neq 0$，把所有 $k\boldsymbol{v}_1$ 拿掉，注意 $0=0\boldsymbol{v}_1$ 被拿出来了，剩下的集合里再不会有 0；接着在剩下的集合$\mathcal{V}-\{k\boldsymbol{v}_1\}$里任意取一个 $\boldsymbol{v}_2$，把所有 $k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2$ 的元素从中拿出来，一直这样继续下去，最后所有元素都被拿出来了，从而也得到一系列向量$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots]$。可以看到$\mathcal{V}$里任何向量都是以 $k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\cdots$ 的形式被拿出来的，也就是说都可以表示成 $k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\cdots$ 的形式，并且只有当 k_i 全等于 0 时，$\sum k_i\boldsymbol{v}_i=0$，因为在上面的操作中，第一次就把 0 拿出来了（相当于 $k_1=0, k_{i\geqslant 2}=0$ 时），而后面的操作相当于遍历了所有 k_i 不全为 0 的情况都没得到 0。所以，可以看到任何一个线性空间总是存在这样一系列向量，使得任意向量都可以表示成它们的线性组合。注意，这里体现了分解与组合的基本思想，可见其无处不在啊。

A.1.2　线性空间的基与向量坐标

定义 A-1(线性无关)　线性空间$\mathcal{V}$上一组向量$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}$，若其所有线性组合 $\sum k_i\boldsymbol{v}_i$ 中，当且仅当所有 $k_i=0$ 时才得到 0，那么该组向量被称为无关向量组。

性质 A-1　线性空间中，如果一个非 0 向量 $\boldsymbol{v}$ 能由向量组$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}$唯一线性表示出来，

那么向量组$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}$必然是一个无关向量组;反之,如果一个非0向量$\boldsymbol{v}$能由向量组$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}$线性表示出来,且该向量组是一个无关向量组,那么表示方法必然唯一。

证明 只证明前半部分,后半部分类似。

假设唯一表示为

$$\boldsymbol{v}=\sum_i k_i\boldsymbol{v}_i$$

如果向量组是相关的,那么必然能找到一组不完全为0的系数p_i,使得

$$\sum_i p_i\boldsymbol{v}_i=0$$

从而有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+0=\sum_i k_i\boldsymbol{v}_i+\sum_i p_i\boldsymbol{v}_i=\sum_i (k_i+p_i)\boldsymbol{v}_i$$

因为p_i不全为0,该表示方法必然构成$\boldsymbol{v}$的另一种不同的线性表示方法,矛盾。

可以拿线性空间定义来逐条检验得到,任何一个无关向量组的所有线性组合生成的集合也是线性空间。还可以简单证明,一个无关向量组里一部分向量组成的子组也是无关的。

定义 A-2(基与坐标) 线性空间$\mathcal{V}$上一组向量$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}$,若$\mathcal{V}$中任意向量都可以表示成它们的线性组合,称该向量组为该线性空间$\mathcal{V}$的一组基。可以证明,任意向量$\boldsymbol{v}=\sum k_i\boldsymbol{v}_i$中,系数$k_i$是唯一的,该组系数被称为向量$\boldsymbol{v}$在基$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}$下的坐标。线性空间的一组基中所包含的向量个数称为该线性空间的维数;维数可以有限,可以无限。

记线性无关组$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}$的所有线性组合生成的线性空间为$<\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}>$。显然,向量组$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}$就是线性空间$<\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}>$的一组基。

定义 A-3 (线性子空间) 线性空间$\mathcal{V}$的一个子集$\mathcal{V}'\subset\mathcal{V}$,如果在$\mathcal{V}$上相同运算“+”和运算“·”下也构成线性空间,那么线性空间$\mathcal{V}'$称为$\mathcal{V}$的线性子空间。相对地,线性空间$\mathcal{V}$可以称为$\mathcal{V}'$的扩展空间。

当然无关向量组的任何一个无关子组的所有线性组合生成的集合也是线性空间,并且该无关子组是该线性空间的一组基,该线性空间是原来无关(母)组生成的更大线性空间的一个线性子空间。

为什么要研究线性空间的基呢?首先,当然是因为应用分解的思想,引出了把一个向量分解成其他向量的线性组合;其次,是为了给定一个后续可以比较研究同一线性空间里不同向量之间关系和运算等的统一参考标准。例如,假设所有人构成一个线性空间(虽然这里不能清楚定义两个人“相加”还属于这个线性空间是什么意思)。这里有路人甲的(身高、体重、三围、…)外在生理特征,而仅有路人乙的(性格、兴趣爱好、偶像、…)精神层面特征,现在让你说说两个人的差别,你从哪里入手说起呢?不知如何下手吧,为什么?标准不统一啊!话说有哪些统一标准呢?指纹算吧,DNA 也算一个吧。这个世界上,除了同卵双胞胎可能一样外,每个人的 DNA 都是不一样的。学过点生物的都知道,DNA 就是两条链的双螺旋结构,每条链仅由四个不同的碱基(A、C、G、T)排列而成,也就是说每条链就是一个由四个不同元素组成的序列,那就是一个向量嘛!所以,路人甲乙丙丁分别就是一个向量,所有人说成线性空间好像也可以,只不过该线性空间中有些向量还没有实体呈现出来(还没有来过这个世上)。

A.1.3　信号组成的线性空间举例

现在回到信号组成的集合,看它们哪些构成线性空间,又分别有哪些基?先举两个例子:

- 冲激分解。所有信号构成的集合构成一个线性空间,其中一组基为

$$\delta(t-\tau),\ -\infty<\tau<+\infty \tag{A-1}$$

该基有无穷多个向量,且任意信号 $f(t)$ 可表示成

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{\Delta\tau\to 0}[f(n\Delta\tau)\Delta\tau]\delta(t-n\Delta\tau) \\ &= \int f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{A-2}$$

- Taylor 展开。所有在 $t=t_0$ 点无限可微的信号集合构成一个线性空间,其中一组基为

$$(t-t_0)^n,\quad n\geqslant 0$$

任意该集合中信号(至少对于 $t=t_0$ 周围)可以表示成

$$f(t)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n \tag{A-3}$$

A.1.4　线性方程组与矩阵

线性方程组与矩阵的概念大家应该都知道,这里简单回顾说明一下。所谓一个方程是线性的,意思是说方程里包含的未知变量的项的幂次不超过 1 次。如以下为一个线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2+ & \cdots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2+ & \cdots & +a_{nn}x_n & =b_n \end{cases} \tag{A-4}$$

其中,x_i 为未知变量。有些人觉得,未知变量仅仅是一个记号而已,可以不用明确写出来。那么,把未知变量的系数单独拿出来写成矩阵形式看看,有没有什么发现?把上面的线性方程组的系数写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{A-5}$$

表面上看,不觉得有什么特别的,也没觉得矩阵比线性方程组形式表示了更多的信息。但是,后来在矩阵上定义各种变换花样,玩来玩去,还真让人玩出了个名堂。矩阵现在变成了最基本的概念和表示形式,也是一个非常重要的研究分支。下面回忆几个关于矩阵的特征:

定义 A-4 矩阵的秩(Rank)　一个 m 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{A}$(或记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$),$\boldsymbol{A}$ 中每一行作为一个 n 维的向量,每一列作为一个 m 维的向量。所有行向量中能找出来的包含向量个数最多的无关向量组中向量个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩;或者,所有列向量中能找出来的包含向量个数最多的无关向量组中向量个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩。显然,这两种方法确定出来的秩应该相等。

定义 A-5 矩阵的迹(Trace)　一个矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 中对角线上元素之和称为矩阵的迹。

定义 A-6 矩阵的逆(Inverse) 一个矩阵 $\boldsymbol{A}$,如果存在另一个矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得它们的乘积为单位阵 $\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$$

那么,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$。

还有,矩阵的乘法一般不满足交换律,即一般有

$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$$

在矩阵乘积上取逆,取转置,取共轭转置等等,展开后都是颠倒顺序的,即

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1},\quad (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\quad (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \tag{A-6}$$

再说说,线性方程组(A-4)有解是什么意思。线性方程组有解,表示式(A-4)右边列向量 $[\cdots,b_i,\cdots]$ 可以表示成左边每个未知数对应的列向量的线性组合;有解时,可以有多个解;当仅有唯一一个解时,即唯一表示时,前面也讲过,此时式(A-4)左边列向量必构成一个线性无关组。当线性方程组无解时,表示右边列向量 $[\cdots,b_i,\cdots]$ 不能表示成左边每个未知数对应的列向量的线性组合。

注意到,线性空间里的元素可以是数组、函数、矩阵等任何形式。并且,上面讲到的"+"运算,"·"运算,基表示等,都主要是把线性空间作为一个整体来研究,这些运算的输入是线性空间里的元素形式,输出还是线性空间里的元素形式。那么,线性空间里每个元素作为一个个体有什么特性,有什么值得研究的吗?或者,和概率空间到随机变量的转变想法一样,研究的时候最好还是能把不同的形式统一成某个数域上的数,从而才有一些量化关系,更利于研究。因此,下面我们就在线性空间上再定义一个运算——内积(Inner Product),用来引入量化特征。

A.2 内积空间

A.2.1 内积定义与理解

在一个线性空间 $\mathcal{V}$ 上定义一个二元运算 $<,>$,该二元运算的结果为数域 $\mathcal{F}$ 上的数,这里先只考虑实数域 $\mathbb{R}$ 和复数域 $\mathbb{C}$,并且满足如下几条性质:

- $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=<\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}>^*$;
- $<k\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=k<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>,\ k\in\mathcal{F}$;
- $<\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>=<\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}>+<\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>$;
- $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>=<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>^*\geqslant 0$,当且仅当 $\boldsymbol{x}=0$(线性空间零元)时等号成立。

那么,该运算称为 $\mathcal{V}$ 上的一个内积。定义了内积的线性空间,也称为内积空间。注意,当数域 $\mathcal{F}$ 是实数域时,共轭号没什么作用,可以省略。但为了保持一致性,一般情况我们都保留。

上面的几条性质是内积满足的最小完备集合,其他性质可以由上面的性质推导出来,例如:

性质 A-2 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in \mathcal{V},\boldsymbol{k}\in \boldsymbol{F}$,则有

$$<\boldsymbol{x},k\boldsymbol{y}>=k^*<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}> \tag{A-7}$$

证明

$$<\boldsymbol{x},k\boldsymbol{y}>=<k\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}>^*=(k<\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}>)^*$$

$$= k^{*} < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} >^{*} = k^{*} < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >$$

下面列举一些内积运算的例子,读者朋友可自行验证一下它们是否都满足上面的内积定义。

【例 A-1】 在一般有限维数组组成的集合上定义内积如下:

$$< (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n), (\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n) > = \sum_i \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_i^{*} \tag{A-8}$$

【例 A-2】 在一元函数组成的集合上定义内积如下:

$$< f(t), g(t) > = \int f(t) g(t)^{*} \mathrm{d}t \tag{A-9}$$

【例 A-3】 在随机变量(注意目前为止都认为随机变量取值为实数)组成的集合上定义内积如下:

$$< X, Y > = \mathrm{E}[XY] \tag{A-10}$$

或者

$$< X, Y > = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])] \tag{A-11}$$

本书后续讨论中,如果讨论的对象为这些常规集合中的元素,那么若无特殊说明,用到的内积都是这些常规内积。

可以看到,依托在集合中引入内积定义,每个集合中的元素,不管是函数、随机变量、矩阵或其他多么稀奇古怪的形式,它们最后两两都对应到一个数域$\mathcal{F}$上的数,从而相互之间在某种程度上有了量化关系。

特别地,任何集合中的元素 $\boldsymbol{x}$,其与自己的内积 $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >$ 都对应到实数域$\mathbb{R}$ 上的一个数,从而可以看到内积运算 $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >$ 在集合 V 上定义了一个范数(norm),我们也把 $\boldsymbol{x}$ 的这类范数(或者称为模)记为

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >} \tag{A-12}$$

同时,有了内积,还可以定义两个对象 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 之间的距离 $D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

$$D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{< \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} >} \tag{A-13}$$

A.2.2　重要量化关系及应用

下面我们再介绍一些常用且重要的量化关系。

定理 A-1(Cauchy-Schwarz 不等式) 对于定义在任意数域$\mathcal{F}$上的内积,我们有

$$|< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >| \leqslant \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} > < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} >} \tag{A-14}$$

当且仅当 $\boldsymbol{y} = k\boldsymbol{x}$, $k \in \mathcal{F}$时等号成立。

证明 如果 $\boldsymbol{y} = 0$,不等式显然成立。如果 $\boldsymbol{y} \neq 0$,则 $< \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} > \neq 0$,取 $\lambda = \dfrac{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >}{< \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} >}$。因为

$$< \boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{y} > \geqslant 0$$

则有

$$\begin{aligned}
& < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} > - \frac{|< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >|^2}{< \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} >} - \frac{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} >}{< \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} >} + \frac{|< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >|^2 < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} >}{< \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} >^2} \\
&= < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} > - \frac{|< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >|^2}{< \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} >} \geqslant 0
\end{aligned}$$

整理可得。

这个不等式很重要,比如匹配滤波、某些最大似然算法设计等都是以它为基础的。

应用(匹配滤波) 假设有几个信号$f_i(t)$满足能量相等,即

$$\int f_i(t)f_i(t)^*\,\mathrm{d}t = \int f_j(t)f_j(t)^*\,\mathrm{d}t$$

并且它们两两之间没有线性关系。现在发射端随机发送其中一个,接收端怎么判断是其中哪一个呢?

所谓判断是指基于某种特别的特征来做出决定,尤其是一些极端特征,比如通过某种处理会得到0,或者达到最大值、最小值之类的。因此这个问题可以这样解决:

记收到的信号为$f(t)$,把所有的可能信号$f_i(t)$拿来和收到的$f(t)$做内积

$$\left|\int f(t)f_i(t)^*\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\left[\int f(t)f(t)^*\,\mathrm{d}t\right]\left[\int f_i(t)f_i(t)^*\,\mathrm{d}t\right]} = \text{常数}$$

而我们又知道只有当$f_i(t)=kf(t)$时,才可能达到这个常数值。又因为,$f_i(t)$里面两两没有线性关系,也即只有自己跟自己才会有线性关系,必然只有$f_i(t)=f(t)$时,才能达到该常数值,从而能判断出发射端发射的是哪个信号。

考虑:如果$f_i(t)$两两能量不同,又或者如果$f_i(t)$里面某些之间有线性关系会怎样?留做练习思考。

定理 A-2(三角不等式)

$$\sqrt{<\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}>} \leqslant \sqrt{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>} + \sqrt{<\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}>} \tag{A-15}$$

当且仅当$\boldsymbol{y}=k\boldsymbol{x},k\in\mathbb{R}^+$时,取得等号。

证明 首先,

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}> &= <\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}> + <\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}> + 2\mathrm{Real}\{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>\} \\ &\leqslant <\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}> + <\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}> + 2\left|<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>\right| \\ &\leqslant <\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}> + <\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}> + 2\sqrt{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}><\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}>} \\ &= \left(\sqrt{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>} + \sqrt{<\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}>}\right)^2 \end{aligned}$$

整理可得三角不等式。

下面考虑取等号的条件:注意到上面第一步"$\leqslant$"要取得等号的前提是

$$\mathrm{Real}\{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>\}\geqslant 0,\quad \mathrm{Imag}\{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>\}=0$$

第二步"$\leqslant$"要取得等号的前提是$\boldsymbol{y}=k\boldsymbol{x}$,从而有

- 虚部$\mathrm{Imag}\{<\boldsymbol{x},k\boldsymbol{x}>\}=0$,得$k\in\mathbb{R}$。
- 实部$\mathrm{Real}\{<\boldsymbol{x},k\boldsymbol{x}>\}\geqslant 0$,得$k\geqslant 0$。

故当且仅当$\boldsymbol{y}=k\boldsymbol{x},\ k\in\mathbb{R}^+$时,取得等号。

可以提一下的是,三角不等式最简单的体现形式就是大家小学就应该知道的三角形两边之和大于第三边啦。

A.2.3 向量的坐标计算

前面提到坐标,接下来考虑:给定线性空间$\mathcal{V}$上一组基

$$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_N\}$$

那向量 $\boldsymbol{v}$ 在这组基下坐标是多少呢？

性质 A-3　给定线性空间 $\mathcal{V}$ 上一组基

$$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_N\}$$

$\boldsymbol{v}$ 为该线性空间里任意向量。假设

$$\boldsymbol{v} = \sum k_i\boldsymbol{v}_i$$

还假设线性空间 $\mathcal{V}$ 上元素间定义了某个内积 $<,>$，再假设

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_N \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} <\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_1> \\ <\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_2> \\ \cdots \\ <\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_N> \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} <\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1> & <\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1> & \cdots & <\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{v}_1> \\ <\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2> & <\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2> & \cdots & <\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{v}_2> \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ <\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_N> & <\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_N> & \cdots & <\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{v}_N> \end{pmatrix}$$

那么有

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y} \tag{A-16}$$

证明　根据内积的性质，我们有

$$<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_i>=\sum_j k_j<\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_i>$$

当 $\boldsymbol{v}_i$ 取遍所有基时，得到 N 个方程组，即

$$\boldsymbol{AK}=\boldsymbol{Y}$$

求解方程组即可得到坐标 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}$。

上面证明过程中，最后其实用到"矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的"这一结论。那 $\boldsymbol{A}$ 是否任何时候都是可逆的呢？

性质 A-4　向量组 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_N\}$ 是一个无关组，则矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} <\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1> & <\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1> & \cdots & <\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{v}_1> \\ <\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2> & <\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2> & \cdots & <\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{v}_2> \\ \vdots & & & \\ <\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_N> & <\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_N> & \cdots & <\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{v}_N> \end{pmatrix}$$

一定是可逆的。

特别地，可以注意到 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$，具有这种性质的矩阵被称为 Hermitian 阵。

提醒

需要特别强调的是，虽然一般某类对象（比如函数、普通向量、随机变量）都有一个各自比较常见的内积定义形式，比如前面定义内积时我们举过的例子，但是上面的坐标计算方法对于任何内积形式都是成立的，就看你能定义出什么样的内积形式，或者就看你爱怎么用，怎么计算简单。

A.3 正交原理

A.3.1 如何才算正交

定义 A-7(正交性) 在内积空间中,如果其中两个向量满足

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=0 \tag{A-17}$$

则称 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 在该内积空间中是正交的。

值得提醒的是,正交性依赖于内积的形式,也就是说,两个向量有可能在一个内积定义形式下是正交的,但在另一种内积定义形式下却不是正交的。例如,前面我们在讲内积的时候,讲到随机变量的两个内积形式

$$<X,Y>=E[XY]$$

和

$$<X,Y>=\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])]$$

由性质 B-5 可知,两个随机变量 X 和 Y 独立时,有

$$\mathrm{E}[XY]=\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$$
$$\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])]=0$$

可以看到,在第一种内积形式下不是正交的,但在第二种内积定义形式下是正交的。

定理 A-3("勾股定理") 如果 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 正交,那么

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2 \tag{A-18}$$

A.3.2 向量空间的正交基

性质 A-5 如果一组向量$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}$两两正交,那么它们构成无关组,从而构成某个空间的基,称为正交基。进一步,若有$|\boldsymbol{v}_i|=1$,则称该组基为一组标准正交基。

证明 采用反证法。假设向量组$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}$是相关的,那么根据定义,存在不全为 0 的数 $k_i, i=1,2,\cdots$,使得

$$\sum_i k_i\boldsymbol{v}_i=0$$

那么,必然有

$$<\sum_i k_i\boldsymbol{v}_i,\sum_i k_i\boldsymbol{v}_i>=0$$

但是,另一方面,

$$<\sum_i k_i\boldsymbol{v}_i,\sum_i k_i\boldsymbol{v}_i>=\sum_i |k_i|^2<\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i>$$

因为所有 $<\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i>>0$,且存在某个 $k_j\neq0$,从而必然

$$<\sum_i k_i\boldsymbol{v}_i,\sum_i k_i\boldsymbol{v}_i>>0$$

与上面结论矛盾。因此,正交向量组是无关的,可构成某个空间的一组基。

性质 A-6(正交基下坐标) 若向量 $\boldsymbol{v}$ 在一组正交基$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}$下的坐标为 k_i,即 $\boldsymbol{v}=$

$\sum k_i \boldsymbol{v}_i$，那么

$$k_i = \frac{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_i>}{<\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i>} \tag{A-19}$$

证明

$$<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_i> = <\sum_j k_j \boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_i> = k_i <\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i>$$

当然，这里也可以利用 A. 2. 3 节讨论的坐标通用求解方法 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}$ 来求解，注意此处 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}\{<\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1>,<\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2>,\cdots\}$，从而，即有上面的命题。

定理 A-4（模与坐标关系）　若向量 $\boldsymbol{v}$ 在一组正交基 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}$ 下的坐标为 k_i，即 $\boldsymbol{v}=\sum k_i\boldsymbol{v}_i$，那么

$$|\boldsymbol{v}|^2 = \sum_i |k_i|^2 |\boldsymbol{v}_i|^2 \tag{A-20}$$

特别地，若正交基为标准正交基，那么

$$|\boldsymbol{v}|^2 = \sum_i |k_i|^2 \tag{A-21}$$

需要说明的是，一般讨论向量时，都是认为向量是从原点出发的，但事实上，将原点出发的向量任意平移后，表示的实质上仍然是同一个向量。所有这些非原点出发的向量的表示，可以相应的把基向量也来一个平移。注意，这里“平移”是一个广义的概念，后续具体碰到相关问题时，我们再细说明。

A. 3. 3　正交原理

定义 A-8（最佳近似）　向量 $\boldsymbol{x}$ 和向量集合 $\mathcal{V}$，向量间数域 $\mathcal{F}$ 上的内积为 $<,>$，向量 $\boldsymbol{y}\in\mathcal{V}$ 被称为向量 $\boldsymbol{x}$ 在向量集合 $\mathcal{V}$ 上的最佳近似，如果满足

$$y = \arg\min_{z\in\mathcal{V}} <\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}>$$

即，在所定义的内积 $<,>$ 下，$\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 距离最小。

上面的最佳近似定义在任何集合上，但如果集合 V 是一个线性空间，那么又如何呢？

定义 A-9（最佳线性近似）　向量 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}$，$\mathcal{V}'$ 是线性空间 $\mathcal{V}$ 的一个子空间，且其子空间 $\mathcal{V}'$ 的一组基为 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$，则向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathcal{V}'$ 里的最佳近似 $\boldsymbol{x}'\in\mathcal{V}'$ 被称为向量 $\boldsymbol{x}$ 关于向量组 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$ 的最佳线性近似。

之所以称为最佳线性近似，是因为 $\boldsymbol{x}'$ 能表示成 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$ 的线性组合。

定理 A-5（正交原理）　内积空间 V 里的一个向量 $\boldsymbol{x}$ 在该内积空间的一个子空间 V' 里的最佳近似为 $\boldsymbol{x}'$，且其子空间 V' 的一组基为 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$，则 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ 和子空间 V' 的所有基 $\boldsymbol{v}_i$ 分别正交，从而也和子空间 V' 里所有向量正交。

证明　设 $\boldsymbol{x}' = \cdots \sum_{i=1}^{m} C_i\boldsymbol{v}_i$，为 $\boldsymbol{x}$ 的最佳线性近似。考虑

$$\begin{aligned}&<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'-a\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'-a\boldsymbol{v}_j>\\ &= <\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'> + a^2<\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_j> - 2a\mathrm{Real}\{<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\boldsymbol{v}_j>\}\end{aligned}$$

其中 $a \in \mathbb{R}$. 上面看成 a 的函数,根据极点的处理方法,求达到极值时 a 的取值,可得

$$a = \frac{\mathrm{Real}\{<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\boldsymbol{v}_j>\}}{<\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_j>}$$

又因为,上面式子是关于 a 的开口向上的二次函数,该唯一的极值点为达到最小值点。而我们上面的假设,已经知道 $\boldsymbol{x}'$已经是最佳近似了,即已经达到最小值点了,所以必然 $a=0$,从而有

$$\mathrm{Real}\{<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\boldsymbol{v}_j>\}=0$$

再考虑

$$\begin{aligned}&<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'-(ai)\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'-(ai)\boldsymbol{v}_j>\\&=<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'>+a^2<\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_j>+2a\mathrm{Imag}\{<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\boldsymbol{v}_j>\}\end{aligned}$$

其中 $a \in \mathbb{R}$. 仍然看成 a 的函数,并且求最小值得

$$a = \frac{-\mathrm{Imag}\{<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\boldsymbol{v}_j>\}}{<\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_j>}$$

而我们上面的假设,已经知道 $\boldsymbol{x}'$已经是最佳近似了,所以也有 $a=0$,从而有

$$\mathrm{Imag}\{<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\boldsymbol{v}_j>\}=0$$

综上所述,得

$$<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\boldsymbol{v}_j>=0$$

即 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$与子空间$\nu'$的任意一个基向量正交。而线性子空间$\nu'$里的任何一个向量 $\boldsymbol{y}$ 是基向量 $\boldsymbol{v}_j$ 的组合,不妨设 $\boldsymbol{y}=\sum_j C_j\boldsymbol{v}_j$,则显然

$$<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}>=<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\sum_j C_j\boldsymbol{v}_j>=\sum_j<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',C_j\boldsymbol{v}_j>=0$$

即 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$与子空间$\nu'$中任何向量都正交。

性质 A-7(计算最佳线性近似) 设内积空间 V 里的一个子空间 V',其子空间 V'的一组基为

$$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$$

一个向量 $\boldsymbol{x}$ 在该内积空间的子空间 V'里的最佳近似为 $\boldsymbol{x}'=\sum_{i=1}^{m}C_i\boldsymbol{v}_i$。记

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\\cdots\\C_m\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}<\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_1>\\<\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_2>\\\cdots\cdots\cdots\\<\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_m>\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}<\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1> & <\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1> & \cdots & <\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{v}_1>\\<\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2> & <\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2> & \cdots & <\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{v}_2>\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\<\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_m> & <\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_m> & \cdots & <\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{v}_m>\end{pmatrix}$$

那么,

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y} \tag{A-22}$$

特别地,当 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$ 是一组正交基时,

$$C_i=\frac{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_i>}{<\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i>} \tag{A-23}$$

证明 由上面的正交原理得

$$<x - \sum_i C_i v_i, v_j> = 0$$

当 v_j 中 j 遍历 $1,\cdots,m$ 得到 m 个方程，即

$$AC = Y$$

展开整理即得证。

大家注意到什么没有？看起来似乎像求坐标的方法？没错。假设 N 维线性空间 ν 的一组基为 $\{v_1,\cdots,v_N\}$，向量

$$x = C_1 v_1 + \cdots + C_N v_N$$

对于任何由该组基中部分基向量 $\{v_{k_1}, v_{k_2}, \cdots, v_{k_m}\}$ 组成的 ν 的一个线性子空间 ν'，向量 x 在 ν' 中的最佳近似就是 $x' = C_{k_1} v_{k_1} + C_{k_2} v_{k_2} + \cdots + C_{k_m} v_{k_m}$。

知识扩展 上面讲正交原理时，为什么要要求是线性空间呢？假设集合 ν 不是线性空间会怎么样？还可能正交吗？答案是不可能。

证明 采用反证法。如果对任意的集合 ν，集合中与向量 x 距离最近的向量 y 有

$$<x - y, y> = 0$$

那么，把 y 从集合 V 中拿掉。在剩下的集合 $\nu - y$ 里，找到与 x 距离最近的，假设为 y'。那么，也应该有

$$<x - y', y'> = 0$$

再把 y' 从集合 $\nu - y$ 里拿掉，一直继续找与 x 距离最近的。最后，我们得到如下结论：对于任意的集合 ν 中的任意一个向量 $y \in \nu$，总是有

$$<x - y, y> = 0$$

这有可能吗？应该没这个可能。

而如果说只有当 ν 是线性空间才成立，那么你会发现，把一个向量 y 从线性空间 ν 中拿掉，剩下的集合就不是线性空间了，从而也就不会有上面那样荒谬的逻辑。

A.3.4 投影与夹角

投影是上面讲的最佳近似的一个几何语言描述，主要内容是一样的，大概讲一下。

定义 A-10（投影） 内积空间 V 里的一个向量 x 在该内积空间的一个子空间 V' 里的最佳近似称为该向量 x 在该子空间 V' 上的投影，记为 $\mathrm{Proj}_{V'}(x)$。

性质 A-8 若 V 是 $\mathbb{R}$ 上的内积空间，其子空间 V' 的一组正交基为 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$，则 x 在 V' 上的投影为

$$C_1 v_1 + C_2 v_2 + \cdots + C_m v_m$$

其中，$C_i = \dfrac{<x, v_i>}{<v_i, v_i>}$。

证明 要使得

$$\begin{aligned} &|x - C_1 v_1 - C_2 v_2 - \cdots - C_m v_m| \\ &= <x, x> + \sum_i C_i^2 <v_i, v_i> - \sum_i 2C_i <x, v_i> \end{aligned}$$

最小,即 $C_1,C_2,\cdots,C_m$ 为一个极点,对 C_i 分别求偏导置0得

$$C_i=\frac{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_i>}{<\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i>}$$

综合上面正交原理和坐标表示,可以得到下面的命题形式。

性质 A-9 向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 方向上的投影的差向量与 $\boldsymbol{v}$ 正交,即

$$<\left(\boldsymbol{x}-\frac{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}>}{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}\boldsymbol{v}\right),\boldsymbol{v}>=0 \tag{A-24}$$

回忆一下几何里,欧氏平面上向量之间夹角的刻画:平面上两向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角可以用该夹角对应的余弦值来刻画。假设该夹角为 α,则

$$\cos(\alpha)=\frac{\boldsymbol{v}\text{ 在 }\boldsymbol{u}\text{ 上的投影长度}}{\boldsymbol{v}\text{ 的长度}}$$

类似地,我们可以把夹角的概念推广到任何内积空间。

定义 A-11(向量之间的夹角) 在复数域$\mathbb{C}$上的内积空间中两向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的夹角,类比欧氏平面上向量之间夹角的刻画,可以采用"余弦"来描述,即 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的投影 $\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的模的比值

$$\frac{\left|\dfrac{<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>}{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}\boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{u}|}=\frac{|<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>|}{\sqrt{<\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}><\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}}$$

从前面的 Cauchy-Schwarz 不等式知道,上面的式子小于等于1,所以定义成"余弦"也比较合理。

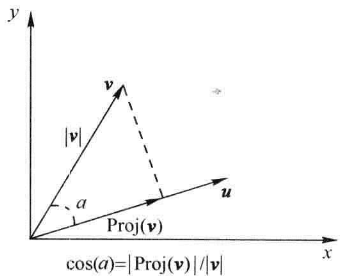


图 A-1 欧氏平面夹角及余弦

A.4 线性映射

A.4.1 线性变换

定义 A-12(一一映射) 两个集合 U 和 V,从集合 U 中的元素到集合 V 中的元素定义一个对应关系 f,使得在这个关系下,U 中的任何一个元素只唯一对应到 V 中的一个元素,并且 V 中的任何一个元素也能找到唯一一个 U 中的元素和它对应,则对应关系 f 称为 U 到 V 的一一映射。

显然,一一映射要求集合 U 和 V 包含相同个数的元素。

定义 A-13(线性映射) 两个集合 U 和 V,从集合 U 中的元素到集合 V 中的元素定义一

个对应关系 f,满足

$$f(u_1+u_2)=f(u_1)+f(u_2)$$
$$f(ku)=kf(u)$$

那么,称 f 为 U 到 V 的一个线性映射。

既是一一映射,又是线性映射,称为一一线性映射。特别地,线性空间到自身的一一线性映射称为线性变换。

性质 A-10(基变换) 若 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}$ 是 $\mathcal{U}$ 上的一个线性无关组,f 是 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 上的一个一一线性映射,那么,$\{f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2),\cdots\}$ 是 $\mathcal{V}$ 上一个线性无关组。

证明 考虑如下等式何时成立,

$$\sum k_i f(\boldsymbol{v}_i)=f\left(\sum k_i\boldsymbol{v}_i\right)=0$$

因为 f 是一一线性映射,上面等式当且仅当 $\sum k_i\boldsymbol{v}_i=0$ 时成立。而 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\}$ 是一个线性无关组,则 $\sum k_i\boldsymbol{v}_i=0$ 当且仅当所有 $k_i=0$ 成立。从而,根据无关向量组的定义知向量组 $\{f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2),\cdots\}$ 无关。

可以看到一一线性映射把一个空间的一组基变到另一个空间的一组基,从而只要知道线性映射在一组基上的效果就能完全确定该线性映射在所有向量上的效果。后续应用时,咱们再聊。

A.4.2 正交变换

给定一个线性空间 $\mathcal{V}$ 和其上一组基 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_N\}$,$f$ 为 $\mathcal{V}$ 上一个线性变换。那么,对于任意 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}$,$\boldsymbol{x}=\sum k_i\boldsymbol{v}_i$,在 f 的作用下得到的 $f(x)$ 在基 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_N\}$ 下的坐标是多少呢?下面我们来解决这个问题。

首先,前面我们已经讲过如何求一个向量在一组基下的坐标了,我们只需要按部就班的应用即可。我们还假设线性空间 $\mathcal{V}$ 里元素间定义了某个内积 $<,>$,令

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_N\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}<\sum k_i f(\boldsymbol{v}_i),\boldsymbol{v}_1>\\<\sum k_i f(\boldsymbol{v}_i),\boldsymbol{v}_2>\\\cdots\cdots\\<\sum k_i f(\boldsymbol{v}_i),\boldsymbol{v}_N>\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}<\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1> & <\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1> & \cdots & <\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{v}_1>\\<\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2> & <\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2> & \cdots & <\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{v}_2>\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\<\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_N> & <\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_N> & \cdots & <\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{v}_N>\end{pmatrix}$$

再假设 $f(\boldsymbol{x})=\sum k_i'\boldsymbol{v}_i$,

$$\boldsymbol{K}'=\begin{pmatrix}k_1'\\k_2'\\\cdots\\k_N'\end{pmatrix}$$

则

$$K' = A^{-1}Y$$

看起来,Y 可以进一步展开。那我们就把 Y 展开看看有什么发现:

$$Y = \begin{pmatrix} <f(v_1),v_1> & <f(v_2),v_1> & \cdots & <f(v_N),v_1> \\ <f(v_1),v_2> & <f(v_2),v_2> & \cdots & <f(v_N),v_2> \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ <f(v_1),v_N> & <f(v_2),v_N> & \cdots & <f(v_N),v_N> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_N \end{pmatrix}$$
$$= BK$$

从而 $f(\boldsymbol{x})$ 的坐标进一步可以写成

$$K' = A^{-1}BK$$

注意到,A^{-1} 和 B 都和 $\boldsymbol{x}$ 具体为哪个向量无关,从而它们对于任何向量 $\boldsymbol{x}$ 建立了线性变换前后在同一组基下的坐标之间的关系。换句话说,这个时候线性变换 f 最开始定义的样子已经不重要了,不管你怎么定义,它总是可以借助于一个内积、一组基和一个对应矩阵 $A^{-1}B$ 来刻画。可以看到,矩阵这一形式是十分有用的。

定义 A-14(正交变换) 在线性空间 ν 上的线性变换 f,若对其上定义的内积 $<,>$ 满足:对任意的 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$,

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}> = <f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})> \tag{A-25}$$

那么,称 f 为正交变换。

假设 $\{v_1,v_2,\cdots,v_N\}$ 是线性空间 ν 上一组标准正交基,且

$$\boldsymbol{x} = \sum x_i v_i,\ \boldsymbol{y} = \sum y_i v_i$$

则,

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}> = \sum x_i y_i = [x_1,\cdots,x_N][y_1,\cdots,y_N]^{\mathrm{T}}$$

而根据上面的讨论知,$f(\boldsymbol{x})$ 和 $f(\boldsymbol{y})$ 在该组基下的坐标为

$$[f(\boldsymbol{x})]_i = A^{-1}B[x_1,\cdots,x_N]^{\mathrm{T}},[f(\boldsymbol{y})]_i = A^{-1}B[y_1,\cdots,y_N]^{\mathrm{T}} \tag{A-26}$$

注意,因为这里是标准正交基,从而 $A = I$ 单位阵。进而

$$\begin{aligned} <f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})> &= ([x_1,\cdots,x_N]B^{\mathrm{T}})(B[y_1,\cdots,y_N]^{\mathrm{T}}) \\ &= [x_1,\cdots,x_N](B^{\mathrm{T}}B)[y_1,\cdots,y_N]^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

再根据 f 是正交变换的定义,知

$$<f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})> = <\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>$$

从而,必然有

$$B^{\mathrm{T}}B = I$$

定义 A-15(正交矩阵,酉阵) 实数域上的矩阵 B 若满足 $B^{\mathrm{T}}B = I$,则称为正交矩阵;复数域上的矩阵 B 若满足 $B^{\mathrm{H}}B = I$ 则称为酉阵,其中 B^{H} 表示 B 的共轭转置。

那么上面的讨论即是说,一个正交变换在给定一组正交基的情况下,其效果对应于一个正交矩阵;当然,如果在复数域上考虑,对应于一个酉阵。

附录 B　论应用根基之概率基础与随机过程

B.1　概率空间

定义 B-1(概率空间) 有一个集合 Ω,$\mathcal{F}$ 为集合 Ω 的一些子集构成的集合,其中至少包括空集 $\varnothing$ 和全集 Ω,P 为定义在 $\mathcal{F}$ 上的函数满足

$$\begin{cases} P(\Omega)=1 \\ P(\cup_i A_i)=\sum_i P(A_i),\text{当 } A_i\in\mathcal{F},\text{且两两没有交集时} \end{cases}$$

则三元组 $[\Omega, \mathcal{F}, P]$ 构成一个概率空间,其中 Ω 中的元素称为样本点,$\mathcal{F}$ 中的元素称为事件,P 描述了每个事件在所有可能事件中发生的概率。

例 B-1　集合 $\Omega=\{A,B,C\}$,集合 $\mathcal{F}=\{\varnothing,\{A\},\{B\},\{C\},\{A,B\},\{B,C\},\{A,C\},\{A,B,C\}\}$,集合 $\mathcal{F}$ 上函数 P 为

$$P(\varnothing)=0,P(\{A\})=P(\{B\})=P(\{C\})=\frac{1}{3}$$

$$P(\{A,B\})=P(\{A,C\})=P(\{B,C\})=\frac{2}{3}$$

$$P(\{A,B,C\})=1$$

则 $[\Omega,\mathcal{F},P]$ 为一个概率空间。

当然,上面的定义还不是最完整、最严格的,但从应用层面来说,这样足够了。

记 $P(X\cup Y)$ 表示 X 或者 Y 发生的概率,$P(X\cap Y)$ 表示 X 和 Y 同时发生的概率,$P(Y|X)$ 表示 X 已经发生了,Y 能发生的概率,也称为条件概率。

性质 B-1(基本命题)

$$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)} \tag{B-1}$$

$$\begin{aligned} P(X\cup Y)&=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y) \\ &=P(X)+P(Y)-P(X)P(Y|X) \end{aligned} \tag{B-2}$$

上面第一条基本命题,其实就是由概率空间 $[\Omega, \mathcal{F}, P]$ 诱导了(或称为隐含了)另一个概率空间 $[\Omega',\mathcal{F}',P']$。该新概率空间里样本点集合为 $\Omega'=\Omega\cap X$,事件空间 $\mathcal{F}'$ 为原事件空间 $\mathcal{F}$ 里每个事件(即子集)与 X 的交集确定的事件组成的,概率 P' 就是根据第一条基本命题由 P 推导如下得到的:假设该事件空间里任一事件 $Y'\in\mathcal{F}'$,若有某个事件 $Y\in\mathcal{F}$ 使得 $Y'=Y\cap X$,那么

$$P'(Y')=P(Y|X)=\frac{P(Y\cap X)}{P(X)}$$

只不过,现在我们都把事件 Y' 写成 $Y|X$ 的形式而已。所以严格来说,应该稍微区分一下,比如

把 $P(Y|X)$ 写成 $P'(Y|X)$。但在不产生混淆的情况下,我们还是不去特别区分。

还有个小问题可能值得说明一下:这里的条件概率和稍后我们讲随机变量时的条件概率不完全是一回事。可能大家比较熟悉的是,如果两个事件独立,那么条件概率 $P(Y|X)=P(Y)$。在这里这个条件概率没有这样的性质,因为这里的两个事件 X,Y 是属于同一个概率空间的两个事件,它们永远不可能有相互独立一说。即使 X 和 Y 没有交集,也不表示 X 和 Y 独立。因为此时,如果 X 发生了,Y 发生的可能性就为0。例如,在例 B-1 中,有

$$\begin{aligned}P(\{B\}\mid\{A\})&=\frac{P(\{A\}\cap\{B\})}{P(\{A\})}=\frac{P(\varnothing)}{P(\{A\})}\\&=0\neq P(\{B\})\end{aligned}$$

有点抽象,大家好好理解一下。

第二条基本命题,基本上来说,可以认为概率函数 P 为事件空间上的一个线性函数。因为

$$X\cup Y=X+Y-X\cap Y$$

从而

$$P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)$$

可以看到,通过上面两条基本命题,把几种事件之间的运算对应的概率联系起来了。还有,上面两条其实也可以归结为概率空间的定义的一部分;在完整的概率空间定义中,事件空间里事件之间的相互关系,以及事件对应的概率之间的关系还有很多条款限制。这里就不多考虑了,如果实在有必要,到时再考虑进来。

B.2 随机变量

定义 B-2(随机变量) 在概率空间$[\Omega,\mathcal{F},P]$中的样本空间上定义一个到实数域$\mathbb{R}$上的函数 X,要求取值相同的样本点组成的集合$\{\omega|X(\omega)=x\}\in\mathcal{F}$, $\omega\in\Omega$, $x\in\mathbb{R}$,则 X 为一个随机变量。

上面的定义中,对函数 X 的唯一一个限制是取值相同的样本点组成的集合$\{\omega|X(\omega)=x\}\in\mathcal{F}$, $\omega\in\Omega$, $x\in\mathbb{R}$,之所以有这个限制,是因为我们还要描述随机变量的概率,而概率只定义在事件上;若某个随机变量取值对应的样本点集合不是概率空间的一个事件,那如何确定该随机变量取值的概率呢?

例 B-2 概率空间$[\Omega,\mathcal{F},P]$,其中集合$\Omega=\{A,B,C\}$,集合

$$\mathcal{F}=\{\varnothing,\{A\},\{B\},\{C\},\{A,B\},\{B,C\},\{A,C\},\{A,B,C\}\}$$

集合$\mathcal{F}$上函数 P 为

$$P(\varnothing)=0,P(\{A\})=P(\{B\})=P(\{C\})=\frac{1}{3}$$

$$P(\{A,B\})=P(\{A,C\})=P(\{B,C\})=\frac{2}{3}$$

$$P(\{A,B,C\})=1$$

在样本点集合 Ω 上定义一个到实数域的函数 X,

$$X(A)=1,\quad X(B)=2,\quad X(C)=3$$

则 X 为一个随机变量。

看起来,随机变量的引入是为了简化概率空间的表述,以免用集合这些东西来描述。比如,集合中的样本本来可以是任何形式的,函数、向量、矩阵、天气、猫猫狗狗,但是现在都统一表示成实数域ℝ 上的数了。事实上,应该是先有变量的想法,概率空间只是一个抽象的公理化概括。另一方面,虽然这里的随机变量的定义要先以一个存在的概率空间为基础,这只是为了给一个严格的理论支撑,主要是想说任何一个随机变量一定可以看成由至少一个概率空间产生,但这个概率空间在实际应用中不一定需要明确确定出来。在实际应用和讨论中,经常你是不能明确地看到正在讨论的随机变量是基于哪个概率空间定义出来的;而是,直接由其他特征来刻画了,比如接下来要讲的分布函数,概率密度函数等等;不管怎么样,接下来事件的概率都将被换成随机变量的语言了。

B. 2. 1 随机变量的概率描述

定义 B-3(分布函数) 随机变量 X 上的函数

$$P(x) = P(X = x) = P(\{\omega | X(\omega) = x\}) \tag{B-3}$$

称为 X 的分布函数,有 $\sum_x P(x) = 1$。

例 B-3 以例 B-2 定义的随机变量 X 为例,该随机变量可以取值 1,2,3。概率分别为

$$P(1) = P(\{A\}) = \frac{1}{3}$$

$$P(2) = P(\{B\}) = \frac{1}{3}$$

$$P(3) = P(\{C\}) = \frac{1}{3}$$

上面的分布函数定义,适合在发生概率不为 0 的 X 仅为有限个的情况下使用。但是,当发生概率不为 0 的 X 有无穷多个时,每个特定取值的概率会趋于无穷小,不然所有概率之和不可能还等于 1。此时,引入累积分布函数(Cumulative Distribution Function, CDF)和概率密度函数(Probability Density Function, PDF)更方便些。

定义 B-4(累积分布函数) 随机变量 X 上的函数

$$C(x) = P(X \leqslant x) \tag{B-4}$$

称为 X 的累积分布函数。

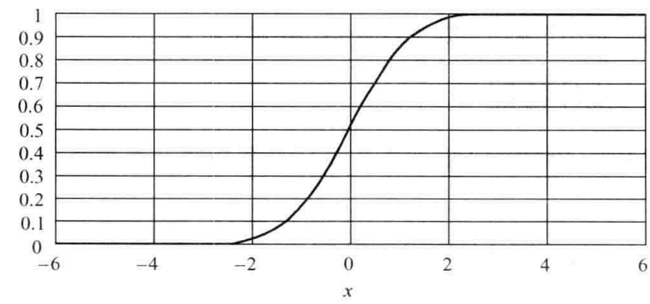


图 B-1 随机变量 X 的累积分布函数

利用累积分布函数,我们可以方便地查任何取值区间的随机变量发生的概率。例如,区间

$X\in[a,b]$的概率为 $C(b)-C(a)$。但是,当我们想分辨的区间粒度越来越小时,即$[a,b]$越来越窄时,问题又来了,因为我们发现 $C(b)-C(a)$ 又会趋于无穷小。比如,对于累积分布函数来说,某个点 $X=x_0$ 的概率为

$$P(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}C(x_0+\Delta x)-C(x_0)$$

$X=x_1$ 附近小区间的概率为无穷小,$X=x_2$ 附近小区间的概率为无穷小,也不方便。因为不管怎么样,它们总有差别嘛,总还是有大小关系嘛!那这个大小关系怎么体现出来?一种方法就是看各自的平均变化速度$\dfrac{C(b)-C(a)}{b-a}$。当 $b-a\to 0$ 时,即为概率密度函数。

定义 B-5(概率密度函数)随机变量 X 上的函数

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}=C'(x)$$

称为 X 的概率密度函数,此时有

$$P(X\leqslant a)=\int_{-\infty}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-}^{+}f(x)\,\mathrm{d}x=1$$

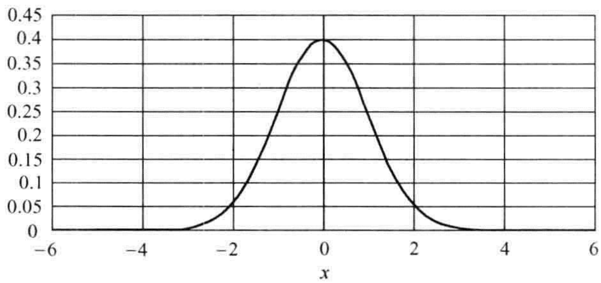


图 B-2 随机变量 X 的概率密度函数

可以发现概率密度函数是累积分布函数的导数。对于概率密度函数来说,某个点 $X=x_0$ 的概率为

$$P(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0)\Delta x$$

另外,上面三种刻画随机变量出现概率的函数 $P(x)$、$C(x)$、$f(x)$都是等价的,仅是使用方便程度上有差别。实际使用过程中,哪个好获得,用哪个吧。

B. 2. 2 随机变量的统计特征

定义 B-6(均值(Expectation))随机变量 X 的取值的统计平均我们用均值 $\mathrm{E}[X]$来表示,具体为

$$\mathrm{E}[X]=\sum_{x}xP(x)\qquad \text{有限情况} \tag{B-5}$$

或者

$$\mathrm{E}[X]=\int xf(x)\,\mathrm{d}x\qquad \text{无限情况} \tag{B-6}$$

均值也被称做期望。

相对于统计平均,我们都知道还有算术平均,算术平均是最早接触的平均概念了。几个数值的算术平均就是它们的和与它们总个数的比值。具体地,对于离散情况,假设有 N 个数 x_i, $i=0,\cdots,N-1$,它们的算术平均为

$$\frac{\sum_i x_i}{N}$$

显然,如果 x_i 出现的概率相同,都为 $1/N$,则统计平均等于算术平均。对于连续情况

$$f(x),\ \tau \leqslant x \leqslant \tau+T$$

求所有 $f(x)$ 的算术平均。和离散情况类似,先按离散情况依样画瓢把形式写出来。我们一步步来,先不求所有 $x \in [\tau,\tau+T]$ 上的 $f(t)$ 的算术平均,而是求 $[\tau,\tau+T]$ 上间隔为 Δt 的那些 $f(t)$ 的算术平均,这个算术平均为

$$\frac{\sum_{n \geqslant 0}^{\frac{T}{\Delta t}-1} f(\tau+n\Delta t)}{\frac{T}{\Delta t}} = \sum_n \frac{f(\tau+n\Delta t)\Delta t}{T} \tag{B-7}$$

显然,当 $\Delta t \to 0$ 时,$\tau+n\Delta t$ 可以覆盖整个区间$[\tau,\tau+T]$,也即所有 $f(t)$ 的算术平均为

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_n \frac{f(\tau+n\Delta t)\Delta t}{T} = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{B-8}$$

定义 B-7(方差(Variance))　一个随机变量 X 与它均值 $\mathrm{E}[x]$ 的平均距离,我们用方差 $\mathrm{Var}[X]$ 来表示,即

$$\mathrm{Vari}[X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])^2] \tag{B-9}$$

说明一下,可以证明 $\mathrm{E}[X]$ 是与随机变量 X 的取值平均距离最小的,并且这个最小值就是 X 的方差,即

$$\mathrm{E}[X] = \arg\min_c \mathrm{E}[(X-c)^2]$$

留做练习吧,有兴趣的同学自己动手应用前面讲过的极值求解方法推导证明一下。

B. 2. 3　随机变量的联合概率

可以将多个随机变量联合起来整体考虑,相应的分布函数称为联合分布函数。例如,两个随机变量 X 和 Y 的联合分布函数 $P(x,y)=P(X=x,Y=y)$ 表示所有可能的事件对$[X=x,Y=y]$中,每一对出现的概率,满足

$$1 = \sum_x \sum_y P(X=x,Y=y)$$

$$P(X=x) = \sum_y P(X=x,Y=y),\quad P(Y=y) = \sum_x P(X=x,Y=y)$$

同样,可以定义多个随机变量的联合概率密度函数。例如,两个随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数 $f(x,y)=f(X=x,Y=y)$ 满足

$$\int_{-}^{+}\int_{-}^{+} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$$

且有

$$P(X \leqslant a) = \int_{-}^{x=a}\int_{-}^{+} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad P(Y \leqslant b) = \int_{-}^{y=b}\int_{-}^{+} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意,多个随机变量独立考虑各自的分布函数或概率密度函数,与联合考虑分布函数等一般都是有差别的。为了区别,有些资料上会加个下标以示区别。比如关于随机变量 X 的分布函数写成 $P_X(X=x)$,引入边际分布的概念等。本书在不引起混淆的情况下,取消这个下标,读者朋友注意上下文区别就好了。

定义 B-8(条件概率) 随机变量 $Y=y$ 已经确定时,随机变量 $X=x$ 的概率为条件概率

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} \tag{B-10}$$

条件概率其实是由联合概率 $P(X,Y)$ 引导出来的一个概率。首先,当 $Y=y$ 确定,对于不同 $X=x$ 出现的可能性的相对关系本来就可以由联合概率 $P(X=x,Y=y)$ 来刻画。但一般我们讨论概率时,都要求所有参加讨论的事件的概率之和为 1。所以,我们把上面讨论的事件的概率归一化就可以得到条件概率。

性质 B-2

$$\sum_x P(X=x|Y=y)=1$$

另外,可以看到这里的条件概率形式上和前面讲事件的条件概率很相似,但我们已经说明是有区别的,提醒注意一下。

定义 B-9(独立随机变量) 如果两个随机变量的联合分布满足

$$P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y) \tag{B-11}$$

或者,联合概率密度满足

$$f(X=x,Y=y)=f(X=x)f(Y=y) \tag{B-12}$$

那么 X 和 Y 称为两个独立的随机变量。

这个定义只是独立随机变量的量化定义,实际意义是说,由 X 确定的任何事件发生的概率不以已知的任何关于 Y 的信息而发生改变,反之亦然。

那么,如果两个随机变量 X 和 Y 是定义在同一个概率空间上得到的随机变量,它们之间有可能独立吗?和上一节讲两事件之间的独立性时一样,没这个可能。

例 B-4 在例 B-1 中定义的概率空间 $[\Omega,\mathcal{F},P]$ 上,定义随机变量 X 和 Y。其中,X 的定义同例 B-2,定义随机变量 Y 如下:

$$Y(A)=1,\quad Y(B)=2,\quad Y(C)=2$$

则随机变量 Y 的分布函数为

$$P(1)=P(\{A\})=\frac{1}{3}$$

$$P(2)=P(\{B,C\})=\frac{2}{3}$$

考虑 $X=2,Y=2$ 同时出现的概率 $P(X=2,Y=2)$。首先,$X=2$ 表示 B 出现,$Y=2$ 表示或者 B 出现,或者 C 出现。那么,要想 $X=2,Y=2$ 同时出现,只能是 B 出现。从而 $X=2,Y=2$ 同时出现的概率等于 B 出现的概率,即

$$P(X=2,Y=2)=\frac{1}{3}\neq P(X=2)P(Y=2)=\frac{2}{9}$$

说到“同一个概率空间”,有必要多解释说明一下其意思。假设同时掷两个完全一样的股子,或同一个股子掷两次(两次实验),每次投掷里各点数出现的概率都是一样的。如果要写成概率空间的形式,两次投掷各自写出来的概率空间是相同的。但上面提到的“同一个概率空间”,不仅指写出来的概率空间数量形式相同,而且要求是刻画同一次实验的。这里描述的多次实验情形称为独立同分布,而不是同一概率空间的概念。显然,两个随机变量若是分别定义在两个独立同分布实验对应的概率空间上,那么它们肯定是独立的。

最后再做一点推广,我们把随机变量可以推广到随机向量,那么联合概率其实就是描述了随机向量的概率分布。特别地,我们把具有两个随机变量的随机向量可以定义成复随机变量来考虑,即两个随机变量 X 和 Y 可以看成一个复随机变量 $X+\mathrm{j}Y$。该复随机变量的概率分布就是联合概率分布 $P(X,Y)$。从而进一步,复随机变量可以推广成复随机向量。

定义 B-10(循环对称复随机变量)　对于复随机变量 $z=x+\mathrm{j}y$,其中 x,y 为实数随机变量。如果对于任意 θ,复随机变量 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}z$ 和复随机变量 z 的概率分布完全一样,那么称复随机变量 z 具有循环对称性。

举个例子来说,如果复随机变量 $z=x+\mathrm{j}y$ 是均值为 $\mathrm{E}[z]=0$ 的复数高斯变量,那么复随机变量 z 就是循环对称复随机变量。因为

$$z'=(x+\mathrm{j}y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=(x\cos\theta-y\sin\theta)+\mathrm{j}(x\sin\theta+y\cos\theta) \tag{B-13}$$

根据高斯变量的性质,可以检验 z' 的实部和虚部仍然是高斯变量,且功率不变,并且实部和虚部独立,所以 z 和 z' 概率分布相同。

定义 B-11(循环对称随机向量)　对于随机向量 $\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_m]$,其中 x_i 为复数随机变量。如果对于任意 θ,随机向量 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\boldsymbol{x}$ 和随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的概率分布完全一样,那么称随机向量 $\boldsymbol{x}$ 具有循环对称性。对于协方差为 $\mathrm{E}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}]=K_x$ 的循环对称高斯随机向量,被记做 $\mathcal{CN}(0,K_x)$。

举个例子来说,如果每个随机变量 $x_i=x_{iI}+\mathrm{j}x_{iQ}$ 是均值为 $\mathrm{E}[x_i]=0$ 的复数高斯变量,且相互独立,那么随机向量 $\boldsymbol{x}$ 就是循环对称复随机变量。

B.2.4　随机变量的函数

一个或多个随机变量的函数还是随机变量,比如 X^2、$X+Y$ 等,其分布函数或者概率密度函数之间关系如下,仅以一个或两个随机变量的函数情况为例说明,多个随机变量参与情况类似,因为多个总可以分解成多重两个。例如,三个变量 $X+Y+Z$,可以分解成 $(X+Y)$ 和 Z,即把 $X+Y$ 作为一个整体,$X+Y$ 本身又可看成两个。

性质 B-3　假设 X,Y 是随机变量,$g_1(X)$ 是随机变量 X 的函数,$g_2(X,Y)$ 是随机变量 X,Y 的函数,则 $g_1(X)$、$g_2(X,Y)$ 均是随机变量,且

$$P[g_1(X)=\alpha]=\sum P[X=g_1^{-1}(\alpha)]$$

$$P[g_2(X,Y)=z]=\sum_x P\{X=x,Y=g_2^{-1}(z)\mid_{X=x}\}$$

好像有点抽象,还是举两个例子吧。

例 B-5　假设 $g_1(X)=X^2$,那么

$$P[g_1(X)=a]=\sum_{x^2=a}P[X=x]$$

即所有平方等于 a 的那些概率之和。

例 B-6 假设 $g_2(X,Y)=X+Y$,那么

$$P[g_2(X,Y)=z]=\sum_x P(X=x,Y=z-x)$$

即所有之和等于 z 的联合概率之和。

B.2.5 随机变量间特征量刻画

性质 B-4(均值线性性) 不管随机变量独立与否,有如下线性关系:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\alpha X+\beta Y] &= \sum_{x,y}(\alpha x+\beta y)P(X=x,Y=y)\\ &= \alpha\mathrm{E}[X]+\beta\mathrm{E}[Y]\end{aligned} \tag{B-14}$$

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\alpha X+\beta Y] &= \sum_{X=x}\sum_{Y=y}(\alpha x+\beta y)P(X=x,Y=y)\\ &= \sum_{X=x}\sum_{Y=y}\alpha xP(x,y)+\sum_{X=x}\sum_{Y=y}\beta yP(x,y)\\ &= \sum_{X=x}\Big[\sum_{Y=y}\alpha xP(x)P(y\mid x)\Big]+\sum_{Y=y}\Big[\sum_{X=x}\beta yP(y)P(x\mid y)\Big]\\ &= \sum_{X=x}\alpha xP(x)+\sum_{Y=y}\beta yP(y)\\ &= \alpha\mathrm{E}[X]+\beta\mathrm{E}[Y]\end{aligned}$$

注意上面的推导中每一步变换都与 X 和 Y 之间是否独立无关,故成立。

性质 B-5 如果两个随机变量 X 和 Y 独立,则

$$\mathrm{E}[XY]=\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] \tag{B-15}$$

$$\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])]=0 \tag{B-16}$$

证明 直接用均值定义推导

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[XY] &= \sum_x\sum_y xyP(x,y)=\sum_x\sum_y xyP(x)P(y)\\ &= \Big[\sum_x xP(x)\Big]\cdot\Big[\sum_y yP(y)\Big]=\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]\end{aligned}$$

独立保证上面推导中 $P(x,y)=P(x)P(y)$。

性质 B-6 随机变量 X 的方差满足

$$\mathrm{Var}[X]=\mathrm{E}[X^2]-(\mathrm{E}[X])^2$$

证明 根据方差定义有

$$\mathrm{Var}[X]=\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])^2]=\mathrm{E}[X^2-2X\mathrm{E}[X]+(\mathrm{E}[X])^2] \tag{B-17}$$

再根据"均值线性性"性质得

$$\mathrm{Var}[X]=\mathrm{E}[X^2]-2\mathrm{E}[X]^2+\mathrm{E}[X]^2=\mathrm{E}[X^2]-(\mathrm{E}[X])^2$$

定义 B-12(协方差(Covariance)) 随机变量 X 和 Y 的协方差为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])]\\ &= \mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]\end{aligned} \tag{B-18}$$

特别地,若 X 和 Y 独立,则

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0 \tag{B-19}$$

性质 B-7(随机变量和的方差) 两个随机变量 X 和 Y 之和形成的随机变量 $X+Y$ 的方差 $\mathrm{Var}[X+Y]$ 满足

$$\mathrm{Var}[X+Y]=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y]+2\mathrm{Cov}(X,Y) \tag{B-20}$$

特别地,如果 X 和 Y 独立,那么

$$\mathrm{Var}[X+Y]=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y] \tag{B-21}$$

证明 仍然根据定义推导即可,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}[X+Y]\\
&=\mathrm{E}[((X+Y)-\mathrm{E}[X+Y])^2]\\
&=\mathrm{E}[((X-\mathrm{E}[X])+(Y-\mathrm{E}[Y]))^2]\\
&=\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])^2+(Y-\mathrm{E}[Y])^2+2(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])]\\
&=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y]+2\mathrm{Cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

仅需要一步步展开,再应用均值线性就行了。

定义 B-13(随机变量相关系数) 两个随机变量 X 和 Y,称

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])]}{\sqrt{\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])^2]}\sqrt{\mathrm{E}[(Y-\mathrm{E}[Y])^2]}} \tag{B-22}$$

为 X 和 Y 的相关系数。特别地,如果随机变量 X 和 Y 独立,

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0 \tag{B-23}$$

且称此时 X 和 Y 无关或不相关。如果随机变量 $X=CY$,C 为常数,那么

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=1 \tag{B-24}$$

且称此时 X 和 Y 完全相关。

证明 假设 X 和 Y 独立,应用上面讲的性质 B-5,展开分子得

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{\mathrm{E}[X-\mathrm{E}[X]]\mathrm{E}[Y-\mathrm{E}[Y]]}{\sqrt{\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])^2]}\sqrt{\mathrm{E}[(Y-\mathrm{E}[Y])^2]}}=0$$

假设 $X=CY$,则

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y)&=\frac{\mathrm{E}[(CY-\mathrm{E}[CY])(Y-\mathrm{E}[Y])]}{\sqrt{\mathrm{E}[(CY-\mathrm{E}[CY])^2]}\sqrt{\mathrm{E}[(Y-\mathrm{E}[Y])^2]}}\\
&=\frac{C\mathrm{E}[(Y-\mathrm{E}[Y])^2]}{C\sqrt{\mathrm{E}[(Y-\mathrm{E}[Y])^2]}\sqrt{\mathrm{E}[(Y-\mathrm{E}[Y])^2]}}=1
\end{aligned}$$

按照上面相关系数的定义,独立必然无关,但反过来不成立,即两个随机变量无关并不能说明两个随机变量独立。

B.3 随机信号

定义 B-14(随机过程) 随机过程就是对于一组自变量,每个自变量对应的函数值是一个随机变量的整体描述。“过程”二字,是说一般这一组随机变量我们会人为给它一个顺序来描述。当然,如果自变量就是时间,那过程二字更容易理解了。为简单表述,随机过程的一系列自变量,不管本来是否是时间,我们都称为时刻。

对于上面提到的一个随机过程,也可以看成一个随机信号 $\xi(t)$。随机过程每个时刻对应

的随机变量一旦确定了(已经发生了,实验做完了),所有时刻确定的值连起来就得到了一个确定信号,每一个可能的确定信号(出现的概率大于0那些)称为随机信号 $\xi(t)$ 的一个实现。

B.3.1 随机过程

对于随机信号的能量,功率定义要从统计意义上来看待,即对所有实现的能量或功率做统计平均:

$$E[\xi(t)] = E_{所有可能f(t)}\left\{\int f(t)^2 dt\right\} \tag{B-25}$$

$$P[\xi(t)] = E_{所有可能f(t)}\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(t)^2 dt}{T}\right\} \tag{B-26}$$

对所有可能实现取统计平均(Expectation)。请读者根据上下文注意区分 Expectation 和 Energy。对于一般的随机过程,只能按如上方法计算,大多数时候比较复杂,但对于(广义)平稳随机过程,可以由维纳-辛钦(Wienner-Khinchin)定理计算,其具体内容后面再讲,这里先简单介绍平稳随机过程。

定义 B-15 平稳随机过程(stationary random process) 随机过程 $\xi(t)$,对于任意的时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_n,\tau,n$,若其联合分布函数成立

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=f(t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)$$

则随机过程 $\xi(t)$ 为平稳的。

我们看看,上面的定义具体说了些什么:

- 当 $n=1$ 时,说明任何两点确定的随机变量同分布,但是没有关于这两个随机变量关系的约束或刻画。
- 当 $n=2$ 时,说明任何两点确定的随机变量的联合分布只与这两点的间隔有关,而与这两点的具体位置无关,这就对两个点之间的关系有了一定的刻画。当 n 继续增大,就有更多关系约束。

定义 B-16 广义平稳随机过程(wide-sence stationary process) 对于随机过程 $\xi(t)$,若对于任意的 t_1,t_2,τ,有

$$E[\xi(t_1)]=E[\xi(t_2)]$$
$$\mathrm{Cov}(\xi(t_1),\xi(t_2))=\mathrm{Cov}(\xi(t_1+\tau),\xi(t_2+\tau))$$

则随机过程 ξ 为广义平稳的。

定义 B-17 各态历经性(ergotic process) 一个(广义)平稳随机过程,如果每个时刻对应的随机变量的某个统计特性(比如均值、方差等)能够由该过程任一个实现的相应算术特性表现出来,称该过程对于某个统计特性来说具有各态历经性。例如,每个时刻对应随机变量的统计平均等于该随机过程任意一个实现的算术平均,即期望(Expectation)满足

$$E[\xi(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{\int_{T/2}^{T/2} f(t)dt}{T}$$

其中,$f(t)$ 为任意一个实现(另请回忆我们前面讲过的求连续值的算术平均的方法)。

通信系统中的噪声,一般认为是平稳且各态历经的。这样一个性质的好处是现实中干扰或者噪声过程中每一点的分布严格来说,是没办法统计的,是不可复现的,但可以使得简单采用多个点的样值来算术平均得到统计平均值。另一方面,后续我们讲概率相关的大数定律时,对比可以发现各态历经性是比大数定律要求更弱的一个命题,先在这儿提一下,到时再详细说明。

B.3.2　随机信号的相似性

随机信号也有相关函数的定义:随机过程 $\xi(t)$ 与 $\zeta(t)$ 的相关函数为

$$R_{\xi,\zeta}(t_1,\tau)=\mathrm{E}[\xi(t_1)\zeta(t_1-\tau)] \tag{B-27}$$

一般地,与 t_1,τ 都有关系。若两个随机过程是同一个随机过程,则称为自相关函数。特别地,平稳随机过程的自相关函数,对于任何 t_1 都相等,且只与间隔 τ 有关,而与 t_1 无关:

$$R(t_1,\tau)=\mathrm{E}[\xi(t_1)\xi(t_1-\tau)]=R(\tau)$$

这部分概率知识先讲到这儿,主要是为了说明一下随机信号相关的概念。

B.4　重要极限定理

B.4.1　中心极限定理

中心极限定理(Central Limit Theorem)的主要思想是,多个独立因素的效果理论上收敛于某种固定形式,而与单个因素长什么样关系不大。一个典型的这种情况如下命题:

性质 B-8(狭义中心极限定理)　无穷多个独立同分布(Identically Independent Distribution, IID)的均值为 0,方差为 σ^2 的随机变量 X_i 的如下形式平均 S_n 收敛于 Gauss 分布 $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$,即

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}}\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2) \tag{B-28}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{n}\sim\mathcal{N}\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right) \tag{B-29}$$

值得一提的是,上面狭义中心极限定理中的条件“独立同分布”只是一个充分条件而非必要,还有很多其他条件可以使得收敛于 Gauss 分布。另外,均值非 0 的随机变量总是可以转化为均值为 0 的随机变量。比如,均值为 μ,可以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}}=\mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

请大家自己思考及练习。

B.4.2　大数定理

大数定理(Law of Large Number)解决了这样一个问题,平时人们会觉得说一个事件发生的概率具体是多少没什么意义,它要么就发生了,要么就不发生。就是说大家对于概率的具体

数值通过当前少数几次情况很难体会。大数定理说,当次数足够多时,这个具体概率数值你就看得更清楚了。下面给两个大数定理的具体例子。

性质 B-9(概率与频率) 若一个试验,事件 A 出现的概率为 $P(A)$,那么独立地做 N 次实验,当 $N\to\infty$ 时,事件 A 在这 N 次实验中出现的次数为 $NP(A)$。

性质 B-10(算术平均与统计平均) 无穷多个独立同分布(Identically Independent Distribution, IID)的均值为 μ,方差有限(σ^2)的随机变量 X_i 的算术平均 S_n 收敛于统计平均,即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} X_i}{n} = \mu \tag{B-30}$$

当然,这个由中心极限定理基本上都能看出来,即 S_n 收敛于均值为 μ,方差为 $\sigma^2/n\to 0$ 的 Gauss 分布。回忆一下,方差是随机变量相对于其均值的平均距离,既然方差都为 0 了,那基本上就是确定等于 μ 了。

如果一个随机过程的各时刻是独立同分布的,那么该随机过程一定是平稳随机过程,同学们可以根据平稳随机过程的定义验证;并且也是各态历经的,这从上面算术平均与统计平均的关系已经能看出来了。但反之并不成立,即独立同分布是比平稳随机过程或各态历经性更严格的一个条件。

附录 C　第一部分数理推导

本附录把本书第一部分里涉及的很多具体数理推导单独分离出来放在这里，虽然以附录形式体现出来，但实际上是深入掌握第一部分内容的重要组成部分。甚至可以说，对于部分读者，放在这里的内容更有营养，希望读者朋友能一样重视。

C.1　信号的简单表示

C.1.1　略讲信号之间运算

信号之间的加减乘除运算，就是函数相应的运算，相信不必多介绍了。下面先简单回顾一下信号的平移变换和伸缩变换，这两个都可以看成信号的一元运算，再主要介绍大家可能不那么熟悉的两类二元运算——相关运算和卷积运算。

1. 平移变换

信号$f(t)$，其中$t_0<t<t_1$，在参考坐标轴不变的情况下，向右平移时间τ得到的信号$\tilde{f}(t)$，其中$t_0+\tau<t<t_1+\tau$，有没有可能用f信号表示$\tilde{f}$信号呢？怎么实现呢？

首先什么叫表示一个信号？无非是确定信号的自变量范围和相应函数取值。而信号$\tilde{f}(t)$的自变量取值区间已经明确知道是$t_0+\tau<t<t_1+\tau$，需要确定的只有该区间上每个自变量点对应的函数值。注意到，因为是平移，函数值整体上并没有改变。对于$\tilde{f}(t)$每一个自变量t，其对应的函数值是$f(t)$在$t-\tau$点对应的函数值平移过去的，所以对任意一个t，有

$$\tilde{f}(t)=f(t-\tau) \tag{C-1}$$

也就是说，$f(t)$向右平移τ后得到的信号为$f(t-\tau)$。

反过来看，对于$f(t-\tau)$要有意义，括号里面的自变量表达式需要满足

$$t_0<t-\tau<t_1$$

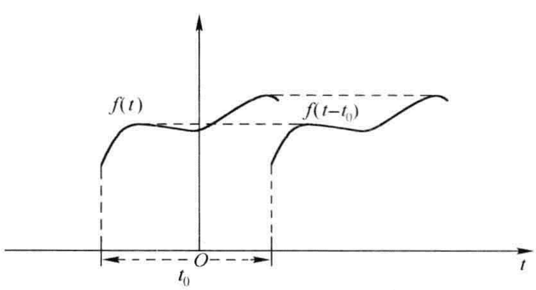


图 C-1　信号的平移变换

这也隐含了信号 $\tilde{f}(t)=f(t-\tau)$ 的自变量 t 的取值范围为 $t_0+\tau<t<t_1+\tau$。也就是说，信号 $f(t-\tau)$ 既表示了信号 $\tilde{f}(t)$ 的自变量范围，也表示了 $\tilde{f}(t)$ 在该范围相应的函数值。从而，用信号 f 完全表示了 $\tilde{f}$。另外，当 $\tau<0$ 时，其实是向左平移，不再单独描述了。

2. 伸缩变换

关于信号的伸缩变换，可以分为两种：一种是整个自变量范围内所有点对应的函数值都被放大或缩小；一种是自变量取值范围被压缩，但对应函数值不变。一般更多地是指第二种，当然两种可以同时存在。

第一种很简单，信号 $f(t)$ 函数值被放大 a 倍得到的信号为 $af(t)$，自变量范围不变。当然 $a<1$ 时，实际是缩小。

第二种稍微复杂点，信号 $f(t)$，其中 $t_0<t<t_1$，自变量被压缩 a 倍，即是使得得到的信号 $\tilde{f}(t)$ 的自变量范围为 $\frac{t_0}{a}<t<\frac{t_1}{a}$，但对应函数值不变。例如，$t_0+\tau$ 被压缩成了 $\frac{t_0+\tau}{a}$，它们的函数值应该相等，即

$$\tilde{f}\left(\frac{t_0+\tau}{a}\right)=f(t_0+\tau)$$

从而，一般情况有

$$\tilde{f}(t)=f(at) \tag{C-2}$$

和上面平移变换类似，要使得 $f(at)$ 有意义，括号里面的表达式满足

$$t_0<at<t_1$$

即信号 $\tilde{f}(t)=f(at)$ 隐含了自变量 t 的取值范围为 $\frac{t_0}{a}<t<\frac{t_1}{a}$。最后，信号 $bf(at)$ 表示由 $f(t)$ 自变量范围被压缩 a 倍，同时函数值放大 b 倍得到的信号，其函数曲线变化如图 C-2 所示。

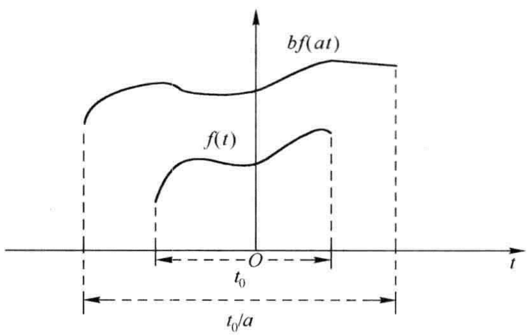


图 C-2 信号的缩放变换

3. 相关运算

给定两个信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，怎么刻画 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的线性相似度呢？或者怎么求 $f_1(t)$ 的基于 $f_2(t)$ 的平方误差最小的线性近似，即求 C 使得下式最小：

$$\int |f_1(t)-Cf_2(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{C-3}$$

在讲解如何求 C 之前，我们先补充点数学知识。

定义 C-1（极值点）　对于实函数 $f(t)$，如果存在一个区间（不论大小），在该区间内，如果某个点的函数值比它周围点的函数值都大或都小，那么该点称为 $f(t)$ 的一个极值点。比周围都大的点为极大值点；比周围都小的点为极小值点。

定义 C-2（最值点）　对于实函数 $f(t)$，在一个区间内，如果某个点的函数值比该区间内其他点的函数值都大或都小，那么该点称为 $f(t)$ 在该区间的一个最值点。比其他点都大的点为最大值点；比其他点都小的点为最小值点。

显然，给定一个区间，最值点对应的函数值只能有一个，达到最值的自变量点可能有多个；而该区间内的极值点可以有多个，这些极值点对应的函数值也可能大小不一。容易知道，最值是一个特殊的极值。也很显然，如果要找某个区间的最大值点，只需要把该区间里的所有极值点拿出来，挑对应函数值最大的那些就是了。

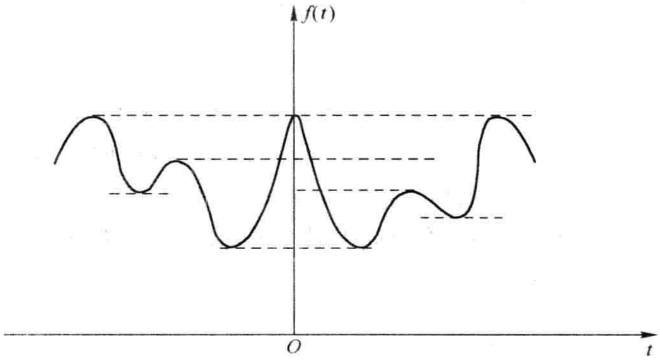


图 C-3　信号的最值点与极值点

定理 C-1（极值定理）　对于函数取值为实数的函数 $f(t)$，如果在区间 (a,b) 上可微（或可导），那么区间里一点 $t_0 \in (a,b)$ 是一个极值的充分必要条件是

$$f'(t_0)=0 \tag{C-4}$$

我们继续讨论两个信号的线性相似度问题。这里我们先假设 $f_1(t)$、$f_2(t)$ 都是函数值取值为实数的函数，C 也是实数。那么，把式（C-3）展开成变量 C 的函数，即

$$g(C) = \int f_1(t)^2\mathrm{d}t - 2C\int f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t + C^2\int f_2(t)^2\mathrm{d}t \tag{C-5}$$

要使 $g(C)$ 最小，即为找函数 $g(C)$ 一个最值点。而 $g(C)$ 是在任何有限点都可微（可导）的，所以先找出所有有限极值点比较即可。根据极点定理，对 $g(C)$ 关于 C 求导数得到 $g'(C)$，

$$g'(C) = -2\int f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t + 2C\int f_2(t)^2\mathrm{d}t \tag{C-6}$$

令 $g'(C)=0$，可得

$$C = \frac{\int f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t}{\int f_2(t)^2\mathrm{d}t} \tag{C-7}$$

观察到只有一个有限极值点，它可能是最值点。但是，注意还有正负无穷大没有考虑进来。当

C 趋于正无穷大或负无穷大时,有可能比求出来的有限极点的对应的函数值小吗?再结合一些基础知识可以这样判断,式(C-3)是关于变量 C 的开口向上的二次函数(高中数学二次函数应该大家都被折磨得比较多吧),只有一个最小值点,从而该极小值点一定是该最小值点。

根据上面的讨论,知道信号

$$\frac{\int f_1(t)f_2(t)\,\mathrm{d}t}{\int f_2(t)^2\,\mathrm{d}t}f_2(t) \tag{C-8}$$

是 $f_1(t)$ 关于 $f_2(t)$ 的最佳线性近似。假设把 $f_2(t)$ 固定,看其他不同信号与它的线性相似性,我们会发现差别在分子的乘积积分,既然如此,我们干脆把它定义成一种运算好了,即所谓的相关运算或相关函数。

定义 C-3(相关函数) 如下定义的函数:

$$R_{f_1,f_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t \tag{C-9}$$

称为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的相关函数。

也许有人发现,式(C-9)定义的相关函数和上面推导过程中的形式上有所变化,用了共轭号。没错,我们这里做了推广,把相关函数推广到了函数值可以取值为复数的函数上。特别地,当信号 $f_1(t)=f_2(t)$ 时,相关函数称为信号 $f_1(t)$ 的自相关函数。另外,上面的定义适合于能量信号,若 $f_1(t)$,$f_2(t)$ 为功率信号,在时间上做个平均即可,不细讲了。

另一方面,由 Cauchy - Schwarz 不等式知

$$|R_{f_1,f_2}(\tau)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int |f_1(t)|^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int |f_2(t)|^2\mathrm{d}t} \tag{C-10}$$

当且仅当 $f_1(t)=kf_2(t-\tau)$ 时取得等号,即完全满足线性关系时取得等号。特别地,若 $f_2(t)=f_1(t)$,什么时候 $f_1(t-\tau)$ 一定能保证和 $f_1(t)$ 完全满足线性关系呢?显然 $\tau=0$ 时一定能保证,从而

$$|R_{f_1f_1}(\tau)| \leqslant |R_{f_1f_1}(0)| \tag{C-11}$$

即自相关函数的模在零点取得最大值。

4. 卷积运算

先看一个组合恒等式,相信大家略有印象,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{a}{i}\binom{b}{n-i} = \binom{a+b}{n} \tag{C-12}$$

推导很简单,一共 $a+b$ 个不同的球,计算从中取出 n 个球的不同选取方法,显然一共有 $\binom{a+b}{n}$ 种不同方法;另一种操作方法,先把球分成两堆,一堆 a 个,另一堆 b 个,要选总共 n 个出来,可以先在 a 个的那一堆里挑 i 个,再从 b 个的那一堆里挑 $n-i$ 个出来一共 凑成 n 个,对所有可能的 i 求和,就得到所有的挑选方法,即等式左边。

再看一个更复杂的恒等式。

定理 C-2(Gould - Vandermonde 卷积) 对于任意的 α_1、α_2、$\beta\in\mathbb{C}$,$n>0$,成立

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta n+\alpha_1+\alpha_2}\binom{\beta n+\alpha_1+\alpha_2}{n}$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha_1}{\beta i+\alpha_1}\binom{\beta i+\alpha_1}{i}\frac{\alpha_2}{\beta(n-i)+\alpha_2}\binom{\beta(n-i)+\alpha_2}{n-i}$$

对 α_1、α_2、β、n 取具体值，可以得到很多特殊形式的等式，此处不一一列举。有兴趣的读者，可以想想还能找到和式(C-12)一样简单的解释吗？

上面这种形式的等式在组合数学里有很多，被统称为卷积。把上面的和式推广成积分，组合表达式推广到一般函数表达式，则得到函数之间的卷积运算。

定义 C-4(卷积运算) 信号 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积信号记为 $f\otimes g$，定义如下：

$$f\otimes g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{C-13}$$

卷积运算满足对称性

$$f\otimes g=\int f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int g(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau=g\otimes f \tag{C-14}$$

C.1.2 冲激函数与信号冲激分解

性质 C-3(信号的冲激表示) 任何信号 $f(t)$ 可以表示成不同时刻的冲激信号的无穷和(积分)

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(\tau-t)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{C-15}$$

证明 根据单位冲激信号 $\delta(t)$ 的定义，$f(t)$ 上任意一点 $t=t_0$ 的函数值可以表示成

$$f(t_0)=f(t_0)\times 1=f(t_0)\times\int\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=\int f(t_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t \tag{C-16}$$

又注意到

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)=f(t)\delta(t_0-t) \tag{C-17}$$

式(C-16)进一步可以写成

$$f(t_0)=\int f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=\int f(t)\delta(t_0-t)\mathrm{d}t \tag{C-18}$$

把记号写成一般变量的形式，$t_0\to t$，$t\to\tau$，得

$$f(t)=\int f(\tau)\delta(\tau-t)\mathrm{d}\tau=\int f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{C-19}$$

性质 C-4 冲激函数 $\delta(t)$ 在 $t=0$ 的取值 $\delta(0)$ 是与微分量的倒数等价的无穷大量，即

$$\delta(0)\sim\frac{1}{\mathrm{d}t} \tag{C-20}$$

证明 由冲激信号的定义 $\int\delta(t)\mathrm{d}t=1$ 退到积分最基本的定义，即有

$$\begin{aligned}\int_{-}^{+}\delta(t)\mathrm{d}t&=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{n}\delta(n\Delta t)\Delta t=\lim_{\Delta t\to 0}\delta(0)\Delta t\\&=\delta(0)\times\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t=\delta(0)\times\mathrm{d}t\\&=1\end{aligned}$$

可以看到 $\delta(0)$ 是与 $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}=\frac{1}{\mathrm{d}t}$ 等价的无穷大量。

C.2 傅里叶级数

这一节讨论第一部分里省略的关于傅里叶级数的数理推导与知识扩展。

性质 C-5 函数组

$$\{1,\cos(\omega_1 t),\sin(\omega_1 t),\cdots,\cos(n\omega_1 t),\sin(n\omega_1 t),\cdots\},\quad -\infty<t<\infty \tag{C-21}$$

在函数的常规内积下是一组正交向量组，且构成"所有"周期为 T_1/k 或角频率为 $k\omega_1$ 的实周期函数组成的线性空间的一组正交基，其中 $k>0$ 为整数。且有

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\cos(m\omega_1 t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & m=n\\0 & m\neq n\end{cases} \tag{C-22}$$

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\cos(m\omega_1 t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}T_1/2 & m=n\\0 & m\neq n\end{cases} \tag{C-23}$$

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\sin(m\omega_1 t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}T_1/2 & m=n\\0 & m\neq n\end{cases} \tag{C-24}$$

所以，如果周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数展开存在，根据正交基下坐标计算方法，我们有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{\int_{-}^{+}f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t}{\int_{-}^{+}\cos^2(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{N\to\infty}\frac{N\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t}{N\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\cos^2(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t}\\&=\frac{2}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{C-25}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{\int_{-}^{+}f(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t}{\int_{-}^{+}\sin^2(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{N\to\infty}\frac{N\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t}{N\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\sin^2(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t}\\&=\frac{2}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{C-26}$$

$$a_0=\frac{\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)\cdot 1\,\mathrm{d}t}{\int_{-T_1/2}^{T_1/2}1\,\mathrm{d}t}=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)\,\mathrm{d}t \tag{C-27}$$

性质 C-6（实信号频率幅度对称性） 如果 $f(t)$ 是实信号，那么

$$F(n\omega_1)^*=F(-n\omega_1) \tag{C-28}$$

$$|F(n\omega_1)|=|F(-n\omega_1)| \tag{C-29}$$

即幅度是关于正负频率对称的。

证明 如果 $f(t)$ 是实信号，那么 $f(t)=f(t)^*$，必然得到

$$\begin{aligned}F(n\omega_1)^*&=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}[f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}]^*\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}[f(t)]^*[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}]^*\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\,\mathrm{d}t=F(-n\omega_1)\end{aligned}$$

从而

$$|F(n\omega_1)| = |F(-n\omega_1)|$$

练习 C-1　相对于性质2-4，令 $\omega_2=\dfrac{\omega_0}{2}$，$T_2=2T_0$。显然，复指数函数集合

$$\{\dots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_2 t},\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_2 t},1,\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2 t},\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_2 t},\dots\},\qquad -\infty<t<\infty$$

也是一组正交向量组，且构成“所有”周期为 T_2/k 或频率为 $k\omega_2$ 的复周期函数组成的线性空间的一组正交基，其中 $k>0$ 为整数。显然，如果信号 $f(t)$ 是周期为 T_0 的信号 $f(t)=f(t+T_0)$，它也可以看成周期为 T_2 的信号 $f(t)=f(t+T_2)=f(t+2T_0)$。也就是说，信号 $f(t)$ 也可以由该组基线性表示。但是，我们已经知道，信号 $f(t)$ 可以由性质2-4里的复指数函数集合唯一线性表示。且另外注意到，性质2-4里的复指数函数集合是上面这个函数集合的子集，因为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2m\omega_2 t}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\omega_0 t}$$

那么，由

$$f(t) = \sum_n F(n\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} = \sum_m F(2m\omega_2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2m\omega_2 t}$$

可知 $f(t)$ 已经可以写成 $\{\dots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_2 t},\dots\}$ 这个函数集合的线性组合了，且观察到在基 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2m+1)\omega_2 t}$ 下的坐标为0；然而，根据正交基的特性，如果能由某个正交基表示，必然坐标唯一。那怎么从其他方面证明在基 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2m+1)\omega_2 t}$ 下的坐标为0呢？提醒，也许会用到下面这个小性质：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2 t} = -\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2\left(t+\frac{T_2}{2}\right)} \tag{C-30}$$

这个小性质的证明也留做练习吧。

知识扩展　数学大师陈省身大师说，表达式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1 \tag{C-31}$$

很优美，包含了所有特别的数e、i、π、1。那么，为什么会有虚数/复数呢？

数学家，特别是代数学家，总是希望把自然界所有研究的东西都用像“数”的东西来刻画，然后再在其上定义运算规则，最后所有问题都变成运算。解析几何就是这样一个应用之一。既然通常的一维数——实数，能够有简单的加减乘除运算、交换律、结合律、逆元等，那么，如果要同时处理两个数(两个参量)，即二维数组，可不可以也有这么简单且实用的运算呢？首先，把二维数的第二维数做个标记i，并且整体表示成 $x+\mathrm{i}y$ 的形式，其他所有的运算形式上都和包含两个项的多项式一样，还要求最后的结果只能是 $x+\mathrm{i}y$ 的形式，不能有 i^2，那现在唯一的工作就是确定 i^2。

现在要求任何非 $0+\mathrm{i}0$ 的二维数，一定存在另一个非 $0+\mathrm{i}0$ 的二维数和它相乘等于1(即存在乘法逆元)，会发现 $\mathrm{i}^2=-1$ 刚好可行。这样，二维数就有了像一元数一样的所有简单运算，也就变得有实际意义了。

接下来，任何一维数的函数扩展成二维数的函数，那么有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$，像一元数一样Taylor展开得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = 1+\mathrm{i}z+\frac{(\mathrm{i}z)^2}{2!}+\frac{(\mathrm{i}z)^3}{3!}+\cdots \tag{C-32}$$

其中的偶数次幂刚好是 $\cos z$ 的展开，奇数次幂提出i刚好是 $\sin z$ 的展开，从而有Euler公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z+\mathrm{i}\sin z$$

后续,其他人继续考虑把维数增加还能不能保持现在这样的性质,答案貌似否定的。比如,哈密尔顿(Hamilton)考虑了四元组,形如 $x+\mathrm{i}y+\mathrm{j}z+\mathrm{k}w$,差不多有这样的性质,但是乘法不满足交换律。

另外,值得一提的是,虽然把 i 这个虚数标记加进来,并定义它参与运算的规则,能理论上使得复数构成一个数域,使得理论运算分析处理简便,但现实中复数还是得由一个一个实数生成。

C.3 傅里叶变换

这一节补充第一部分里省略的关于傅里叶变换的数理推导,特别地,绝大多数傅里叶变换性质都放在这里了。

C.3.1 角频率与线频率傅里叶变换关系

角频率傅里叶变换实质是计算基$\{\dots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},\dots\}$下的坐标,而线频率傅里叶变换实质是计算基$\{\dots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft},\dots\}$下的坐标。这两组基其实是同一组基,只是形式不同,那么对于 $\omega=2\pi f$ 来说,在基 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$下的坐标和在基 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}$下的坐标应该相等,即

$$F(\omega)\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}=F_L(f)\,\mathrm{d}f \tag{C-33}$$

显然由于关系 $\omega=2\pi f$ 知,$\mathrm{d}\omega=2\pi\mathrm{d}f$,从而

$$F(\omega)=F_L(f),\ \omega=2\pi f \tag{C-34}$$

即,$F_{\mathrm{L}}(f)$等价于 $F(\omega)$自变量范围压缩 2π 倍,回忆讲过的伸缩变换知

$$F_L(f)=F(2\pi f) \tag{C-35}$$

C.3.2 傅里叶变换性质及其应用

性质 C-7(信号积分) 信号$f(t)$的积分

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(\omega)\big|_{\omega=0} \tag{C-36}$$

$$\int F(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 2\pi f(t)\big|_{t=0} \tag{C-37}$$

证明 观察知

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\cdot 0}\mathrm{d}t = F(0)$$

另一个类似,证明完毕。

这性质很有意思,其实前面傅里叶级数也有类似性质,只是没提,大家可以再返回去想想傅里叶级数对应于这个的性质应该是什么样的,留做练习。

性质 C-8(能量守恒) 同一能量信号的时域表示和频域表示,信号能量守恒,即

$$\int |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int |F(f)|^2\mathrm{d}f = \frac{1}{2\pi}\int |F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{C-38}$$

证明 首先还是假设$f(t)$是 $\tau\leqslant t\leqslant\tau+T_0$ 上信号,其中 $T_0\to\infty$。它可以由正交基

$$\{\dots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t},\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t},1,\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t},\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t},\dots\},\tau\leqslant t\leqslant\tau+T_0$$

来表示,其中 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T_0}$, $\omega_0\to 0$。由第一部分 2.2 节里傅里叶变换的推导知,$f(t)$在基

$$e^{j\omega t},\ \omega = n\omega_0, \tau \leqslant t \leqslant \tau + T_0$$

下的坐标为

$$F(\omega = n\omega_0)\frac{\omega_0}{2\pi}$$

而基信号的模(也就是能量)为

$$\int_{\tau}^{\tau+T_0} e^{jn\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

根据线性空间里向量模与坐标的关系,有

$$\int |f(t)|^2 dt = \sum_{\omega} \left| F(\omega = n\omega_0)\frac{\omega_0}{2\pi} \right|^2 \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{2\pi}\sum_{\omega} |F(\omega = n\omega_0)|^2 \omega_0$$

当 $\omega_0 \to 0$ 时,上式等于

$$\frac{1}{2\pi}\int |F(\omega)|^2 d\omega$$

线频率 f 的情形推导类似,故得证。

可以看到,能量守恒可以看成模与坐标关系的简单应用,也即还是线性空间理论的简单应用,但它有个专门名称叫帕斯瓦定理(Parseval' stheorem)。

除了上面几个性质,傅里叶变换还有很多特殊的性质,以及特殊的变换对,基本上都可以根据傅里叶变换定义公式变形得到。这里只给出常用的。另外,部分性质举例了一些技巧推导,剩下的大家也可以自己练习,关键是观察,灵活应用。

(1) 复指数函数的傅里叶变换

$$e^{j\omega_0 t} \sim 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{C-39}$$

回忆傅里叶变换实质是求 $e^{j\omega t}$ 基下坐标,信号 $e^{j\omega_0 t}$ 已经是这种形式了,就不用多此一举了。也就是说复指数信号 $e^{j\omega_0 t}$ 在其他基 $e^{j\omega t}$, $\omega \neq \omega_0$ 下的坐标为0,即

$$F(\omega) = 0,\ \omega \neq \omega_0$$

而在基 $e^{j\omega_0 t}$ 下的坐标为1,即

$$F(\omega_0)\frac{d\omega}{2\pi} = 1$$

从而

$$F(\omega_0) = \frac{2\pi}{d\omega} = 2\pi\delta(0)$$

上面用到式(1-5)所示性质 $\delta(0) = \dfrac{1}{d\omega}$,前面讲冲激信号性质时讲过,请回忆或复习一下。再由傅里叶变换 $F(\omega)$ 的积分

$$\int F(\omega) d\omega = \frac{2\pi}{2\pi}\int F(\omega) e^{j\omega \cdot 0} d\omega = 2\pi f(0) = 2\pi e^{j\omega_0 \cdot 0} = 2\pi$$

那么,和冲激信号定义1-3对比知,$F(\omega)$ 为在 $\omega = \omega_0$ 的一个幅度为 2π 的冲激,即

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

当然,也可以直接根据傅里叶变换的定义,计算积分试试。

(2) 时域平移,频域相位旋转

$$f(t - t_0) \sim F(\omega) e^{-j\omega t_0} \tag{C-40}$$

从公式计算上理解:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} &= \int f(t-t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int f(t-t_0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(t-t_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}]\mathrm{d}(t-t_0) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\frac{1}{2\pi}\int f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\end{aligned}$$

从向量空间理解：一般讨论向量时，我们都假设向量是从原点出发的。但实际中，平移到其他点出发后的向量仍然是实质等价的一个向量。现在问题变成，这些平移后的向量在原来确定的基下坐标怎样？

这样想，如果基也跟着平移 $t \to t-t_0$ 的话，坐标在平移后的基下肯定不会发生变化，即平移前有

$$f(t) = \sum_{\omega} F(\omega)\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

平移后必然有

$$f(t-t_0) = \sum_{\omega} F(\omega)\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_0)}$$

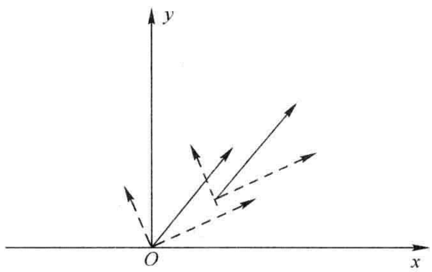


图 C-4 向量及基平移

但是，我们现在想要的是在原基下的坐标，即不允许基也跟着平移，那把上式写成原来基 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 的形式看看

$$f(t-t_0) = \sum_{\omega} F(\omega)\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

可以看到，在原来基下坐标为 $F(\omega)\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$，即

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

思考一下，这个性质的意义在哪儿？因为对于单个信号来说，无所谓时域平移不平移，因为你可以调整坐标。那就是说，当我们把时域坐标调整后，所谓的频域相位旋转又没了，那也就是说频域相位这个东西是可有可无的，是这样吗？暂时不公布答案。

这一条，还可以让我们看到，频域是绝对坐标，不是想调整就可以调整的，频点是多少就是多少。不同时刻发生的信号 $f(t)$ 和 $f(t-\tau)$ 本质应该是一样的，所以一定有某样东西是不变的，它们对应的频域自变量范围就反映了这一“不变”的东西。

(3) 时域旋转，频域平移

$$f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} \sim F(\omega+\omega_0) \tag{C-41}$$

可以像上面性质(2)同样的角度讨论，略。

（4）伸缩变换

$$f(at) \sim \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{C-42}$$

（5）时频斜对称

$$F(t) \sim 2\pi f(-\omega) \tag{C-43}$$

（6）时域卷积，频域乘积

$$\int f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \sim F_1(\omega)F_2(\omega) \tag{C-44}$$

（7）时域乘积，频域卷积

$$f_1(t)f_2(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int F_1(\hat{\omega})F_2(\omega-\hat{\omega})\mathrm{d}\hat{\omega} \tag{C-45}$$

直接用定义进行变换证明：

$$\begin{aligned}\int [f_1(t)f_2(t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t &= \int f_1(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int F_2(\hat{\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\hat{\omega}t}\mathrm{d}\hat{\omega}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1}{2\pi}F_2(\hat{\omega})\mathrm{d}\hat{\omega}\left[\int f_1(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\hat{\omega}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int F_1(\hat{\omega})F_2(\omega-\hat{\omega})\mathrm{d}\hat{\omega}\end{aligned}$$

（8）冲激信号与常数变换对

$$\begin{aligned}&\delta(t) \sim 1\\ &1 \sim 2\pi\delta(\omega)\end{aligned} \tag{C-46}$$

从公式计算上理解

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega 0} = 1$$

我们知道任何信号 $f(t)$ 总是可以写成和冲激信号 $\delta(t)$ 卷积的形式，那么从“时域卷积，频域乘积”性质看，有

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = F(\omega)\ \mathcal{F}\{\delta(t)\} = F(\omega) \times 1$$

故，必然有 $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$。

（9）正弦和余弦

$$\begin{aligned}\cos(\omega_c t) &\sim \pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]\\ \sin(\omega_c t) &\sim \mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)]\end{aligned} \tag{C-47}$$

利用正余弦的指数表示

$$\cos(\omega_c t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c t}}{2}$$

$$\sin(\omega_c t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c t}}{2}$$

再利用性质(1)可得。

（10）n 阶微分　如果信号 $f(t)$ 的 n 阶微分 $f^{(n)}(t)$ 存在，那么

$$f^{(n)}(t) \sim (\mathrm{j}\omega)^n F(\omega) \tag{C-48}$$

证明很简单，因为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega = \sum_{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

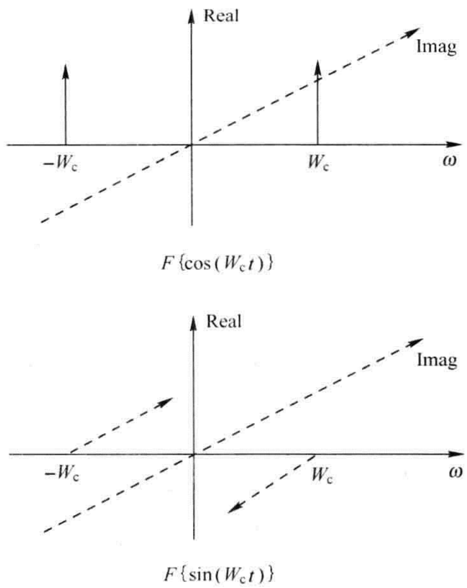


图 C-5　正余弦傅里叶变换频谱

则

$$f^{(n)}(t)=\sum_{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}F(\omega)\mathrm{d}^n\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}=\sum_{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}F(\omega)(\mathrm{j}\omega)^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

比较傅里叶变换定义得证。这个性质很有意思，结合线性时不变系统的知识，如果一个线性系统的传递函数为 $\mathrm{j}\omega$，那么一个可微分信号输入该系统后，输出信号就是该信号的微分。这样一个线性时不变系统也可以称为微分系统。

讲了这么多性质，举几个简单例子应用一下吧。

练习 C-2　假设信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$，请计算信号 $f(\alpha t+\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 的傅里叶变换？如果还不太熟练，我们一步一步来：首先，将信号 $f(t)$ 自变量伸缩变换到信号 $f(\alpha t)$，由"伸缩变换"性质知

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t)\}=\frac{1}{|\alpha|}F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

再将信号 $f(\alpha t)$ 的自变量向左平移 β/α 得到信号 $f\left(\alpha\left(t+\frac{\beta}{\alpha}\right)\right)=f(\alpha t+\beta)$，由"时域平移，频域旋转"性质知

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t+\beta)\}=\frac{1}{|\alpha|}F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\beta}{\alpha}}$$

最后，再将信号 $f(\alpha t+\beta)$ 进行相位旋转 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 得信号 $f(\alpha t+\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$，由"时域相位旋转，频域平移"性质知

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t+\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\}=\frac{1}{|\alpha|}F\left(\frac{\omega-\omega_0}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)\frac{\beta}{\alpha}}$$

总之，一个复杂的信号可以由一个简单信号一步步变换过来，在应用傅里叶变换性质的时候也可以分解为一个个的应用最后组合在一起。

练习 C-3　我们在本章的最开始就说了，表示论的一个目的是把同一个问题以不同的形

式表示出来,有时候在某些表示形式下更容易求解,比如下面这个例子:

求解满足微分方程的信号 $f(t)$,

$$\sum_n A_n f^{(n)}(t)=y(t)$$

如果我们在微分方程等式两边同时取傅里叶变换,可以得到

$$\sum_n A_n(\mathrm{j}\omega)^n F(\omega)=Y(\omega)$$

从这个方程,我们可以求得

$$F(\omega)=\frac{Y(\omega)}{\sum_n A_n(\mathrm{j}\omega)^n}$$

要想得到 $f(t)$,对 $F(\omega)$ 求傅里叶逆变换就好了。可以看到,一般来说微分方程是比较复杂一点的,但如果我们应用一下傅里叶变换,就可以把微分方程变成只含加减乘除的代数方程,大多数时候求解简单得多。

性质 C-9(轮转性质)　一个信号的傅里叶逆变换,与该信号的傅里叶变换关于自变量镜面对称,仅差一个函数值缩放系数,即

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(\omega)\}\big|_{t=-t} \tag{C-49}$$

证明　联合应用

$$\mathcal{F}\{f(t)\}=F(\omega)\quad 和\quad \mathcal{F}\{F(\omega)\}=2\pi f(-t)$$

知

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\},\quad f(-t)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(\omega)\}$$

观察比较可证。

注意,上面等式中自变量 ω、t 写成那样,只是为了符合习惯,把频域信号(被计算傅里叶逆变换的信号)的自变量写成 ω,而时域自变量记为 t 而已。大家应用时,不要被这个记号所捆饶哈。比如,我们还也可以把该性质写成

$$\mathcal{F}^{-1}\{f(t)\}=\frac{1}{2\pi}F(-\omega) \tag{C-50}$$

轮转性质其实是“时频斜对称”性质的一个变形,虽然容易推导出来,但是挺有用的。为什么呢? 因为一般人习惯正向记忆和计算傅里叶变换,但偶尔要计算逆傅里叶变换时,觉得不习惯。上面的性质可以照顾你的习惯,让你继续正向计算傅里叶变换,最后加个简单变换就得到逆傅里叶变换了。要不大家试试下面这个例子,体会一下。

练习 C-4　假设信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$,请计算信号 $f(\alpha t+\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 的傅里叶逆变换。

同时对于傅里叶变换的每一个性质,应用该轮转性质,可以方便地写出其对应的傅里叶逆变换形式,具体地请大家动手写一写吧。

C.3.3　方波信号与 sinc 信号

性质 C-10　定义标准单位方波信号为 $\mathrm{Rect}(t)$,

$$\mathrm{Rect}(t)=\begin{cases}1, & -\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ 0, & 其他\end{cases} \tag{C-51}$$

定义标准单位 sinc 信号 sinc(t)

$$\mathrm{sinc}(t)=\frac{\sin t}{t},\qquad -\infty\leqslant t\leqslant\infty \tag{C-52}$$

则有

$$\mathcal{F}\{\mathrm{Rect}(t)\}=\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{C-53}$$

证明 直接根据傅里叶变换定义计算:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\mathrm{Rect}(t)\}&=\int\mathrm{Rect}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_{-1/2}^{1/2}[\cos(-\omega t)+\mathrm{j}\sin(-\omega t)]\mathrm{d}t\\&=\left.\frac{\sin(-\omega t)}{-\omega}\right|_{-1/2}^{1/2}+\mathrm{j}\left.\frac{\cos(-\omega t)}{-\omega}\right|_{-1/2}^{1/2}\\&=\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

由傅里叶变换的"伸缩变换"以及"斜对称"性质进一步可得出下面的性质。

性质 C-11

$$\mathrm{Rect}(at)\sim\frac{1}{|a|}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2a}\right) \tag{C-54}$$

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)\sim 2\pi\mathrm{Rect}(\omega) \tag{C-55}$$

$$\mathrm{sinc}(at)\sim\frac{\pi}{|a|}\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{2a}\right) \tag{C-56}$$

注意,Rect(at)的自变量取值范围为

$$\frac{-1}{2}\leqslant at\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{-1}{2a}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2a}$$

我们很早就讲了冲激信号 $\delta(t)$,但没有很细节地讲有哪些手段可以帮助产生冲激信号。这里我们就讲讲借助方波信号和 sinc 信号来产生冲激信号。

性质 C-12 方波信号 $a\cdot\mathrm{Rect}(at)$,当 $a\to\infty$ 时,该方波信号为单位冲激信号,即

$$\lim_{a\to\infty}a\cdot\mathrm{Rect}(at)=\delta(t) \tag{C-57}$$

sinc 信号$\frac{a}{\pi}\mathrm{sinc}(at)$,当 $a\to\infty$ 时,该 sinc 信号为单位冲激信号,即

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a}{\pi}\mathrm{sinc}(at)=\delta(t) \tag{C-58}$$

证明 根据冲激信号定义验证即可,先证明方波信号部分:关于定义中取值条件很直观,当 $a\to\infty$ 时,渐渐地只有一个点有值,且为无穷大,其他值为0。关于积分稍微计算一下,

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\int a\mathrm{Rect}(at)\mathrm{d}t&=\lim_{a\to\infty}\mathcal{F}\{a\mathrm{Rect}(at)\}|_{\omega=0}\\&=\lim_{a\to\infty}a\cdot\left.\frac{1}{a}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2a}\right)\right|_{\omega=0}\\&=1\end{aligned}$$

故关于方波信号部分成立。同理,可以证明关于 sinc 信号部分也成立。 □

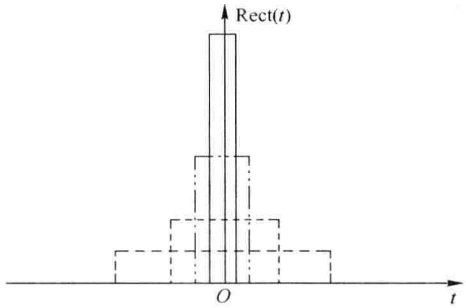


图 C-6　方波信号产生冲激信号过程

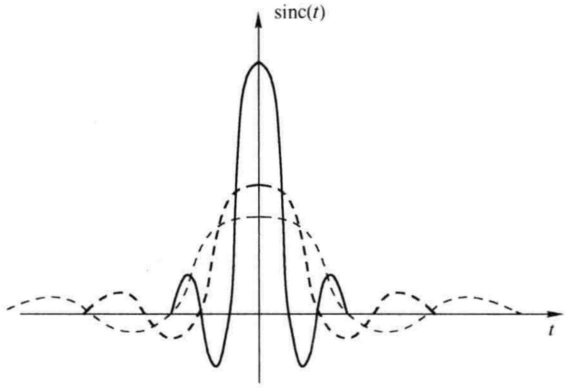


图 C-7　sinc 信号产生冲激信号过程

定理 C-13(维纳-辛钦定理)　广义平稳随机过程$\xi(t)$的自相关函数$R(t)$与功率谱$P(\omega)$是一对傅里叶变换：

$$P(\omega)=\int R(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t,\quad R(t)=\frac{1}{2\pi}\int P(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{C-59}$$

同时，由特殊情况

$$R(0)=\mathrm{E}[\xi(t)\xi(t)]=\frac{1}{2\pi}\int P(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{C-60}$$

我们可以得到如下结论：

性质 C-4　每个时刻所对应的随机变量均值为μ的平稳随机过程$\xi(t)$中每个时刻随机变量的方差等于该平稳随机过程的功率与均值平方的差，即

$$\mathrm{Var}[\xi(t)]=\frac{1}{2\pi}\int P(\omega)\mathrm{d}\omega-\mu^2 \tag{C-61}$$

证明　根据方差定义，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\xi(t)]&=\mathrm{E}[\xi(t)\cdot\xi(t)]-(\mathrm{E}[\xi(t)])^2\\&=R(0)-(\mathrm{E}[\xi(t)])^2=\frac{1}{2\pi}\int P(\omega)\mathrm{d}\omega-\mu^2\end{aligned}$$

C.4　换个角度从头再来——再发现采样定理

线性空间知识在前面的傅里叶级数和傅里叶变换等推导中，似乎是万能灵药一样，所向披靡啊。不知对于采样定理还灵不灵？嘿，你别说，只要会用，一样能制服采样定理。下面，大家一起来看看。

假设$F(\omega)$为角频率区间$-W/2\leqslant\omega\leqslant W/2$上的信号（可以是“虚拟”频谱区间），记

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$$

不妨设$F\left(-\dfrac{W}{2}\right)=F\left(\dfrac{W}{2}\right)=0$。根据性质2-4，那它可以由正交基

$$\left\{\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\frac{2\pi}{W}\omega},\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{W}\omega},1,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{W}\omega},\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\frac{2\pi}{W}\omega},\cdots\right\}$$

来表示，其中$-\dfrac{W}{2}\leqslant\omega\leqslant\dfrac{W}{2}$。或者，等价写成正交基

$$\left\{\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{2\pi}{W}\omega}\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{W}\right),\cdots\right\}$$

首先根据坐标计算方法,把信号 $F(\omega)$ 在该组基下的坐标写出来为

$$\frac{\int F(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{2\pi}{W}\omega}\mathrm{d}\omega}{\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}\mathrm{d}\omega} \tag{C-62}$$

注意到,上面坐标表达式的分子其实是 $F(\omega)$ 的傅里叶变换(仅仅是把常用的自变量 t 换成了 ω)在某个点的值(当然,你也可以看成傅里叶逆变换的某个值)。记

$$\mathcal{F}\{F(\omega)\} = \hat{F}(\hat{\omega}) = \int F(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\hat{\omega}\omega}\,\mathrm{d}\omega \tag{C-63}$$

那么,坐标表达式(C-62)的分子等于

$$\hat{F}\left(\frac{2n\pi}{W}\right)$$

然而,根据傅里叶变换的"斜对称"性质,又可以得到

$$\hat{F}(\hat{\omega}) = \mathcal{F}\{F(\omega)\} = 2\pi f(-\hat{\omega}) \tag{C-64}$$

则,最后得到信号 $F(\omega)$ 在该组基下的坐标为

$$\frac{2\pi f\left(-\frac{2n\pi}{W}\right)}{W} \tag{C-65}$$

那么,我们看到 $F(\omega)$ 居然能由 $f(t)$ 的一系列离散点的值和一组基线性组合表示出来,离散点可以看成是通过采样得到的,看来有戏:

$$F(\omega) = \sum \frac{2\pi f\left(-\frac{2n\pi}{W}\right)}{W}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{2\pi}{W}\omega}\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{W}\right)\right] \tag{C-66}$$

$$= \sum \frac{2\pi f\left(\frac{2n\pi}{W}\right)}{W}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{2\pi}{W}\omega}\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{W}\right)\right] \tag{C-67}$$

变换到时域信号 $f(t)$,则

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_n \frac{2\pi f\left(-\frac{2n\pi}{W}\right)}{W}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{2\pi}{W}\omega}\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{W}\right)\right]\right\} \tag{C-68}$$

$$= \sum_n \frac{2\pi f\left(-\frac{2n\pi}{W}\right)}{W}\left[\frac{W}{2\pi}\cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{W}{2}\left(t+\frac{2n\pi}{W}\right)\right)\right] \tag{C-69}$$

$$= \sum_n f\left(\frac{2n\pi}{W}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{W}{2}\left(t-\frac{2n\pi}{W}\right)\right) \tag{C-70}$$

记 $2\pi/W=T$,则

$$f(t) = \sum f(nT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)$$

可以看到,信号 $f(t)$ 能由其上等间隔点 $f(n\tau)$ 与一组和 $f(t)$ 无关的信号联合重构出来,这就是采样定理的实质。似乎成功了? 确实成功了! 可以看到,我们从线性空间理论照样可以推导出采样定理,关键还是多观察、多思考,总是能有所收获。

C.5 离散傅里叶变换

这一节补充第一部分里省略的关于离散傅里叶变换的数理推导，特别地，绝大多数离散傅里叶变换性质都放在这里了。

C.5.1 离散序列与其傅里叶变换采样点关系

对长度为 N 的离散序列 f_n 对应的傅里叶变换进行采样，采样点个数 N_c，这 N_c 个点为

$$F_k = F\left(\frac{2\pi k}{N_c}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{\frac{-j2\pi nk}{N_c}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N_c - 1 \tag{C-71}$$

下面分三种情形讨论什么时候序列 f_n 与 F_n 有一一对应关系。

1. 情形一：$N_c < N$

注意当 $n \geqslant N_c$ 时，

$$e^{\frac{-j2\pi nk}{N_c}} = e^{\frac{-j2\pi(n-N_c)k}{N_c}} \tag{C-72}$$

那就是说，当 $n \geqslant N_c$ 时，f_n 与 f_{n-N_c} 可以先合并成一项，即

$$\sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{\frac{-j2\pi nk}{N_c}} = \sum_{n=0}^{N-N_c-1} [f_n + f_{n+N_c}] e^{\frac{-j2\pi nk}{N_c}} + \sum_{n=N-N_c}^{N-1} f_n e^{\frac{-j2\pi nk}{N_c}} \tag{C-73}$$

所以，如果序列 $F\left(\frac{2\pi k}{N_c}\right)$ 对应序列 f_k，那么序列 $F\left(\frac{2\pi k}{N_c}\right)$ 必然也对应任何序列 f'_k。其中，当 $n \geqslant N_c$ 时，有

$$f_n + f_{n-N_c} = f'_n + f'_{n-N_c}$$

对于其他 $N - N_c \leqslant n < N_c$，$f_n = f'_n$。或者，等价地描述为，当 $0 \leqslant n \leqslant N - N_c - 1$ 时，有

$$f_n + f_{n+N_c} = f'_n + f'_{n+N_c}$$

对于其他 $N - N_c \leqslant n < N_c$，$f_n = f'_n$。因此，情形一不可能有一一对应关系。

2. 情形二：$N = N_c$

这次没有合并的情况，从序列整体上看，得到的采样点序列 $F\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = F_k$ 可以看成 f_n 与 N 个序列线性组合而来，这 N 个序列是原来连续基信号序列分别采样得到的序列，即

$$[e^{j\frac{2\pi n \cdot 0}{N}}, e^{j\frac{2\pi n \cdot 1}{N}}, \ldots, e^{j\frac{2\pi n \cdot (N-1)}{N}}]^T, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

如果这 N 个序列正交就好了，那我们就一定知道 F_n 只能唯一地由 f_n 得到。运气真好，它们确实是正交的。在证明之前，我们先介绍一个代数基本定理：

定理 C-15（N 次单位根） 方程 $x^N = 1$ 的 N 个根为

$$x_n = e^{j\frac{2n\pi}{N}}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{C-74}$$

并且

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} x_n^k = 0, & n \neq 0 \\ \sum_{k=0}^{N-1} x_n^k = N, & n = 0 \end{cases} \tag{C-75}$$

证明 先根据多项式分解有

$$x^N - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{N-1}) = 0 \tag{C-76}$$

当 $x\neq 1$ 时，必然有 $1+x+x^2+\cdots+x^{N-1}=0$。即取值非 1 的根的各幂次之和为 0，得证。

现在证明上面的序列正交，其两个不同序列内积为

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{2\pi k}{N}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\frac{2\pi k}{N}}\right)^* = \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{[\mathrm{j}(n-m)\frac{2\pi}{N}]k} = 0, \quad m \neq n \tag{C-77}$$

从而，情形二可以建立一一对应关系。

3. 情形三：$N_c > N$

采样得到的 N_c 个点可以写成

$$F\left(\frac{2\pi k}{N_c}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi nk}{N_c}} + \sum_{n=N}^{N_c-1} 0 \times \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi nk}{N_c}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N_c - 1 \tag{C-78}$$

当写成这种形式，它其实就是情形二了。根据情形二的讨论，我们知道序列 f'_n 和序列 $F\left(\frac{2\pi k}{N_c}\right)$ 一一对应，其中

$$f'_n = \begin{cases} f_n, & n < N \\ 0, & N \leqslant n \leqslant N_c - 1 \end{cases}$$

注意，序列 f'_n 后半截全是固定的 0，前半截完全等于 f_n，那么唯一确定了序列 f'_n 自然就确定了序列 f_n 了。所以，情形三也是能一一对应的。

把上面的讨论进行归纳，就可以得到 DFT/IDFT 理论了。

C. 5. 2 离散傅里叶变换性质及应用

列几个 DFT/IDFT 常用性质，大多数和（连续）傅里叶变换性质类似，我们只选其中部分证明，其他请大家自己动手（查资料或自己推导等）搞定。

（1）时域循环移位，频域相位旋转

$$x[(n-m)\bmod N] \sim X(n)\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2n\pi m}{N}} \tag{C-79}$$

为了更直观，我们假设 $N=3$，$m=1$ 来演示证明过程，不然 DFT 矩阵太大表示不清楚。

$$\mathrm{DFT}\{x[(n-m)\bmod N]\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 0\cdot 1}{3}} & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 0\cdot 2}{3}} \\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 1\cdot 1}{3}} & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 1\cdot 2}{3}} \\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 2\cdot 1}{3}} & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 2\cdot 2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 0\cdot 1}{3}} & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 0\cdot 2}{3}} & 1 \\ \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 1\cdot 1}{3}} & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 1\cdot 2}{3}} & 1 \\ \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 2\cdot 1}{3}} & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 2\cdot 2}{3}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 0\cdot 1}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 1\cdot 1}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 2\cdot 1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 0\cdot 1}{3}} & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 0\cdot 2}{3}} \\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 1\cdot 1}{3}} & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 1\cdot 2}{3}} \\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 2\cdot 1}{3}} & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi\cdot 2\cdot 2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi 0\cdot 1}{N}} \\ X_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi 1\cdot 1}{N}} \\ X_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi 2\cdot 1}{N}} \end{pmatrix}$$

（2）时域相位旋转，频域循环移位

$$x(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi mn}{N}} \sim X[(n-m)\bmod N] \tag{C-80}$$

(3) 时域循环卷积,频域乘积(1)

$$\hat{x}_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2[(n-k)\bmod N] \sim X_1(n)X_2(n) \tag{C-81}$$

其中,运算

$$\hat{x}_n = \sum_{k} x_1(k)x_2[(n-k)\bmod N] \tag{C-82}$$

表示两个序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的循环卷积,也记为 $x_1 \otimes x_2$。

证明 同样为了更直观,我们假设 $N=3$ 来演示证明过程。首先,采用矩阵形式,

$$\hat{x}_n = \begin{pmatrix} x_1(0) & x_1(2) & x_1(1) \\ x_1(1) & x_1(0) & x_1(2) \\ x_1(2) & x_1(1) & x_1(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \end{pmatrix}$$

那么有,

$$\mathrm{DFT}\left\{ \sum_{k} x_1(k)x_2[(n-k)\bmod N] \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & e^{\frac{-j2\pi\cdot 0\cdot 1}{3}} & e^{\frac{-j2\pi\cdot 0\cdot 2}{3}} \\ 1 & e^{\frac{-j2\pi\cdot 1\cdot 1}{3}} & e^{\frac{-j2\pi\cdot 1\cdot 2}{3}} \\ 1 & e^{\frac{-j2\pi\cdot 2\cdot 1}{3}} & e^{\frac{-j2\pi\cdot 2\cdot 2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) & x_1(2) & x_1(1) \\ x_1(1) & x_1(0) & x_1(2) \\ x_1(2) & x_1(1) & x_1(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \end{pmatrix}$$

注意到,上面式子中,中间那个矩阵的每一列实际上是序列 $x_1(n)$ 的不同循环移位,从而根据"时域循环移位,频域相位旋转"性质知,DFT 矩阵(上面式子中第一个矩阵)作用于其中每一列得到的是 $X_1(n)$ 的不同相位旋转,即上面式子等于

$$= \begin{pmatrix} X_1(0) & X_1(0)e^{\frac{-j2\pi\cdot 0\cdot 1}{3}} & X_1(0)e^{\frac{-j2\pi\cdot 0\cdot 2}{3}} \\ X_1(1) & X_1(1)e^{\frac{-j2\pi\cdot 1\cdot 1}{3}} & X_1(1)e^{\frac{-j2\pi\cdot 1\cdot 2}{3}} \\ X_1(2) & X_1(2)e^{\frac{-j2\pi\cdot 2\cdot 1}{3}} & X_1(2)e^{\frac{-j2\pi\cdot 2\cdot 2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \end{pmatrix}$$

仔细观察知,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} X_1(0) & X_1(0)e^{\frac{-j2\pi\cdot 0\cdot 1}{3}} & X_1(0)e^{\frac{-j2\pi\cdot 0\cdot 2}{3}} \\ X_1(1) & X_1(1)e^{\frac{-j2\pi\cdot 1\cdot 1}{3}} & X_1(1)e^{\frac{-j2\pi\cdot 1\cdot 2}{3}} \\ X_1(2) & X_1(2)e^{\frac{-j2\pi\cdot 2\cdot 1}{3}} & X_1(2)e^{\frac{-j2\pi\cdot 2\cdot 2}{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & X_1(1) & 0 \\ 0 & 0 & X_1(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{\frac{-j2\pi\cdot 0\cdot 1}{3}} & e^{\frac{-j2\pi\cdot 0\cdot 2}{3}} \\ 1 & e^{\frac{-j2\pi\cdot 1\cdot 1}{3}} & e^{\frac{-j2\pi\cdot 1\cdot 2}{3}} \\ 1 & e^{\frac{-j2\pi\cdot 2\cdot 1}{3}} & e^{\frac{-j2\pi\cdot 2\cdot 2}{3}} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{C-83}$$

代入继续看到,后两个结合又是一个标准的 DFT 变换,则继续化简为

$$\begin{pmatrix} X_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & X_1(1) & 0 \\ 0 & 0 & X_1(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2(0) \\ X_2(1) \\ X_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(0)X_2(0) \\ X_1(1)X_2(1) \\ X_1(2)X_2(2) \end{pmatrix}$$

证明完毕。

大家可以看到,证明过程中主要是多注意观察,灵活分拆与组合矩阵形式,大家多练习,熟能生巧,那把剩下的留给大家啦!

(4) 时域循环卷积,频域乘积(2)

$$\hat{x}_n=\sum_k x_1(k)x_2^*[(n-k)\bmod N] \sim X_1(n)X_2^*(-n) \tag{C-84}$$

(5) 时域循环卷积,频域乘积(3)

$$\hat{x}_n=x_1(n)\otimes x_2^*(-n) \sim X_1(n)X_2^*(n) \tag{C-85}$$

(6) 时域乘积,频域循环卷积

$$x_1(n)x_2(n) \sim \frac{1}{N}X_1\otimes X_2 \tag{C-86}$$

(7) 斜对称

$$X(n) \sim Nx[(-n)\bmod N] \tag{C-87}$$

(8) 共轭斜对称

$$x(n)^* \sim X[(-n)\bmod N]^* \tag{C-88}$$

(9) 时频能量守恒

$$\sum x_n^2=\frac{1}{N}\sum X_n^2 \tag{C-89}$$

上面所有的性质都是假设涉及的序列在复数域上成立的,而如果某个序列的所有数都是实数,还有一些额外的特殊性质,下面仅列举一个,其他的请大家根据实数的一些特殊性来自己思考。

性质 C-16 如果序列 $x(n)$, $n=0,\ldots,N-1$ 为实数序列,那么

$$X(n)=X^*[(-n)\bmod N] \tag{C-90}$$

证明 首先,“共轭斜对称”性质是对所有复数域上序列都成立的,即

$$x^*(n) \sim X^*[(-n)\bmod N]$$

当然实数序列也不例外。但是,另一方面,对于实数序列有

$$x^*(n)=x(n)$$

所以,它们各自的 DFT 后序列也相等,则

$$X^*[(-n)\bmod N]=X[n]$$

性质 C-17 记 DFT 矩阵为[DFT]。显然,可以证明 DFT 变换是线性变换,即有

$$X_1+X_2=[\mathrm{DFT}]x_1+[\mathrm{DFT}]x_2=[\mathrm{DFT}][x_1+x_2] \tag{C-91}$$

还可以证明知

$$[\mathrm{DFT}][\mathrm{DFT}]^{\mathrm{H}}=\mathrm{diag}\{N,\ldots,N\} \tag{C-92}$$

其中,diag{⋯}为对角阵。更进一步知,归一化后的 DFT 矩阵$\frac{1}{\sqrt{N}}$[DFT]为酉阵(复数域上的正交矩阵),即

$$\left[\frac{1}{\sqrt{N}}[\mathrm{DFT}]\right]\left[\frac{1}{\sqrt{N}}[\mathrm{DFT}]\right]^{\mathrm{H}}=I \tag{C-93}$$

从而,若两个序列 $x=[x_0,\ldots,x_{N-1}]$ 和序列 $y=[y_0,\ldots,y_{N-1}]$ 在时域正交,那么它们对应的频域序列[DFT]x 和[DFT]y 也是正交的。

逆变换 IDFT 及对应的矩阵也和 DFT 及对应矩阵有同样的性质,大家可以自己写一下。

练习 C-5 在频域奇数位上放序列 X_n, $n=0,\ldots,N$,偶数位为 0,或者相反。请问做 $2N$ 点 IDFT 后,时域出来的点有什么特征?并请推广。(提示:答案是某种序列的重复。)

附录 D　第三部分数理推导

本附录把本书第三部分里涉及的很多具体数理推导单独分离出来放在这里，虽然以附录形式体现出来，但实际上是深入掌握第三部分内容的重要组成部分。甚至可以说，对于部分读者，放在这里的内容更有营养，希望读者朋友能一样重视。并且，在理解上请注意结合和第三部分正文的内容。

D.1　香农熵的提出

定理 D-1　对于固定的 $a,b\geqslant 0$，$T\to\infty$，成立

$$\binom{Ta}{Tb}=\frac{\sqrt{a}\,a^{Ta}}{\sqrt{2\pi T}\,\sqrt{b(a-b)}\,b^{Tb}(a-b)^{T(a-b)}} \tag{D-1}$$

证明　首先，二项式系数展开有

$$\binom{Ta}{Tb}=\frac{(Ta)!}{(Tb)!(T(a-b))!} \tag{D-2}$$

其中，$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\cdots\times 1$ 表示阶乘。当 $T\to\infty$ 时，利用 Stirling 近似，

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \tag{D-3}$$

代入式(D-2)整理即得证。

定理 D-2　要用二进制比特序列给所有 K 个序列编号，那么平均一个信息符号 x_i 至少需要 $H(X)$ 比特才能把这些序列用不同的二进制比特序列表示区分开，该 $H(X)$ 被定义为香农熵，则

$$H(X)=\lim_{T\to\infty}\frac{\log_2 K}{T}=\sum_{i=1}^{N}-p_i\log_2 p_i \tag{D-4}$$

证明　首先，根据前面的定理 D-1，化简 K

$$\begin{aligned}K&=\frac{\sqrt{1}\,1^{T}}{\sqrt{2\pi T}\,\sqrt{p_1(1-p_1)}\,p_1^{Tp_1}(1-p_1)^{T(1-p_1)}}\times\frac{\sqrt{1-p_1}\,(1-p_1)^{T(1-p_1)}}{\sqrt{2\pi T}\,\sqrt{p_2(1-p_1-p_2)}\,p_2^{Tp_2}(1-p_1-p_2)^{T(1-p_1-p_2)}}\times\cdots\\&=\frac{1}{(\sqrt{2\pi T})^N\sqrt{p_1}\,p_1^{Tp_1}\cdots\sqrt{p_N}\,p_N^{Tp_N}}\end{aligned} \tag{D-5}$$

那么，要用二进制表示 K 需要 $\log_2 K$ 个比特，而序列包含 T 个符号，从而平均一个信息符号需要比特数为

$$H(X)=\frac{\log_2 K}{T}=\sum_i -p_i\log_2 p_i \tag{D-6}$$

D.2　高斯分布的熵计算

要得到高斯分布 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 的熵，直接用定义计算如下：

$$
\begin{aligned}
H(X) &= -\int f(x)\log_2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]dx \\
&= \left[-\int f(x)\log_2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}dx\right]+\left[-\int f(x)\log_2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\right] \\
&= -\log_2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}+\left[-\log_2 e^{\frac{1}{2}}\int f(x)\frac{-(x-\mu)^2}{\sigma^2}dx\right] \\
&= \log_2\sqrt{2\pi\sigma^2}+\log_2\sqrt{e}=\log_2\sqrt{2\pi e\sigma^2}
\end{aligned}
$$

这个积分看起来挺复杂的,实际上有些时候没那么复杂,所以大家在阅读过程中可以多动手尝试一下。

D.3 熵、联合熵、条件熵之间关系

定理 D-3 熵、联合熵、条件熵之间满足关系

$$H(X,Y)=H(X)+H(Y|X) \tag{D-7}$$

证明 根据联合熵的定义

$$
\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum_{x,y}P(x,y)\log_2 P(x,y) \\
&= -\sum_{x,y}P(x,y)\log_2 P(x)P(y|x) \\
&= -\sum_{x,y}P(x,y)[\log_2 P(x)+\log_2 P(y|x)] \\
&= H(X)+H(Y|X)
\end{aligned} \tag{D-8}
$$

证明完毕。

附录 E　第四部分数理推导

老生常谈，本附录把本书第四部分里涉及的很多具体数理推导单独分离出来放在这里，虽然以附录形式体现出来，但实际上是深入掌握第四部分内容的重要组成部分。甚至可以说，对于部分读者，放在这里的内容更有营养，希望读者朋友能一样重视。

E.1　SISO 快衰落信道容量计算

假设快衰落信道的通信模型为

$$y = hx + w$$

其中，信道衰落系数 h 是每个符号时刻独立随机变化的。这里我们可以通过计算互信息来得到信道容量，计算互信息也有两种方法：

- 如果能方便一步到位计算出转移概率，你就可以直接利用最简单模型来计算。
- 如果参与的随机变量太多，你可以用互信息的链式法则计算。

这里我们通过链式法则计算互信息来计算快衰落信道的信道容量如下，

$$\begin{aligned}
C &= \max_{P_x:\mathrm{E}[|x|^2]\leqslant P} I[x;y,h] = \max_{P_x:\mathrm{E}[|x|^2]\leqslant P}\left[I[x;h] + I[(x;y)\mid h]\right] \\
&= \max_{P_x:\mathrm{E}[|x|^2]\leqslant P}\left[0 + I[(x;y)\mid h]\right] = \max_{P_x:\mathrm{E}[|x|^2]\leqslant P} \mathrm{E}_{h_0}\{I[(x;y)\mid h = h_0]\} \\
&= \mathrm{E}_h\left\{\log\left(1 + \frac{|h|^2 P}{\sigma^2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

计算过程中，因为发射端信号和信道衰落 h 是独立的，所以它们之间的互信息为 0，即

$$I(x;h) = 0$$

E.2　常用接收算法介绍

E.2.1　ZF 算法应用于 ISI 信道

对于 ISI 信道

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} \tag{E-1}$$

$$= x_0\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_L \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_L \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_0 \\ \vdots \\ h_L \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_{N-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{N-2} \\ w_{N-1} \end{pmatrix} \tag{E-2}$$

把它单独看成 x_0 的 SIMO 信道，如果采用 ZF 算法，即要求找到 $[c_0,\ldots,c_{N-1}]$，使得

$$[c_0,\ldots,c_{N-1}]\left(x_1\begin{pmatrix}0\\h_0\\h_1\\\vdots\\h_L\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\0\\h_0\\\vdots\\h_L\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+x_{N-1}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\\h_0\end{pmatrix}\right)=0 \tag{E-3}$$

观察知道，如果存在一个公共的 $[c_0,\ldots,c_{N-1}]$ 分别和其他 x_i 对应的系数向量正交就好了。即在 N 维线性空间中，看是否能找到向量与那 $N-1$ 个向量生成的线性子空间正交。由线性空间理论或线性方程组理论知道，这样的向量 $[c_0,\ldots,c_{N-1}]$ 是存在的。对其他 x_i 同样处理，即得到 ZF 下各 x_i 的均衡值。

更进一步地，如果记 x_i 找到的 ZF 向量为 $[c_{i0},\ldots,c_{i(N-1)}]$，记

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0(N-1)}\\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1(N-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{(N-1)0} & c_{(N-1)1} & \cdots & c_{(N-1)(N-1)}\end{pmatrix} \tag{E-4}$$

那么，有

$$\boldsymbol{CH}=\boldsymbol{I} \tag{E-5}$$

即，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的逆矩阵。

E.2.2 LMMSE 算法推导

假设信号 $\boldsymbol{X}$ 经过信道后，得到

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{HX}+\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{W} \tag{E-6}$$

其中，Z 为干扰，W 为噪声。求 $\hat{\boldsymbol{X}}=[\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_t]^{\mathrm{T}}$，使得它与 $\boldsymbol{X}$ 的距离最小，其中 $\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{GY}$，则

$$<\boldsymbol{GY}-\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}>=0$$

从而由

$$\boldsymbol{G}\mathrm{E}[\boldsymbol{YY}^{\mathrm{H}}]-E[\boldsymbol{XY}^{\mathrm{H}}]=0$$

那么，可以得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}&=\mathrm{E}[\boldsymbol{XY}^{\mathrm{H}}]\mathrm{E}[\boldsymbol{YY}^{\mathrm{H}}]^{-1}\\&=\mathrm{E}[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}})]\mathrm{E}[(\boldsymbol{HX}+\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{W})(\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}})]^{-1}\\&=(\mathrm{E}[\boldsymbol{XX}^{\mathrm{H}}]\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}})(\boldsymbol{H}\mathrm{E}[\boldsymbol{XX}^{\mathrm{H}}]\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}+\mathrm{E}[\boldsymbol{ZZ}^{\mathrm{H}}]+\mathrm{E}[\boldsymbol{WW}^{\mathrm{H}}])^{-1}\\&=E_{\mathrm{s}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}(E_{\mathrm{s}}\boldsymbol{HH}^{\mathrm{H}}+R+\sigma^2 I)^{-1}\\&=\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{HH}^{\mathrm{H}}+E_{\mathrm{s}}^{-1}R+E_{\mathrm{s}}^{-1}\sigma^2 I)^{-1}\end{aligned} \tag{E-7}$$

上面的推导过程中用到如下记号，以及性质或假设：

- $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W}$ 之间相互无关，$\boldsymbol{X}$ 的分量 x_i 之间相互无关，$\boldsymbol{W}$ 的分量之间相互无关。
- $\mathrm{E}[\boldsymbol{XX}^{\mathrm{H}}]=E_{\mathrm{s}}I$，其中 E_{s} 为 $\boldsymbol{X}$ 每个分量的功率。
- $\mathrm{E}[\boldsymbol{WW}^{\mathrm{H}}]=\sigma^2 I$，其中 σ^2 为噪声功率。

- $E[\boldsymbol{ZZ}^{H}]=\boldsymbol{R}$ 为干扰协方差矩阵。
- $E[\boldsymbol{AZB}]=\boldsymbol{A}E[\boldsymbol{Z}]\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为常数矩阵,$\boldsymbol{Z}$ 为变量矩阵。

E.3　矩阵 SVD 分解性质推导

接下来,我们介绍一些从 SVD 分解能推导出来的性质。

性质 E.1　对于有 t 根发射天线,r 根接收天线的 MIMO 信道,记所有 t 根天线到第 i 根接收天线的信道衰落系数为 $\boldsymbol{h}_i=[h_{i1},h_{i2},\dots,h_{it}]$,信道矩阵

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{h}_1^{T},\boldsymbol{h}_2^{T},\dots,\boldsymbol{h}_r^{T}]^{T}=\boldsymbol{U}\sum\boldsymbol{V}^{H}$$

那么,所有 t 根天线到第 i 根接收天线的信道衰落系数

$$\boldsymbol{h}_i=\sum_{j=1}^{\min\{r,t\}}U_{ij}\lambda_j\boldsymbol{V}_j^{H} \tag{E-8}$$

进而有,

$$|\boldsymbol{h}_i|^2=\sum_{j=1}^{\min\{r,t\}}|U_{ij}|^2\lambda_j^2 \tag{E-9}$$

证明　简单的矩阵运算就可以得到该结论。首先,

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{U}\sum\boldsymbol{V}^{H}=\boldsymbol{U}[\lambda_1\boldsymbol{V}_1^*,\lambda_2\boldsymbol{V}_2^*,\dots]^{T} \tag{E-10}$$

那么,

$$\boldsymbol{h}_i=[U_{i1},U_{i2},\dots,U_{ir}][\lambda_1\boldsymbol{V}_1^*,\lambda_2\boldsymbol{V}_2^*,\dots]^{T}=\sum_{j=1}^{\min\{r,t\}}U_{ij}\lambda_j\boldsymbol{V}_j^{H} \tag{E-11}$$

进而,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{h}_i|^2&=\sum_j U_{ij}\lambda_j\boldsymbol{V}_j^{H}\Big(\sum_j U_{ij}\lambda_j\boldsymbol{V}_j^{H}\Big)^{H}\\&=\sum_j U_{ij}\lambda_j\boldsymbol{V}_j^{H}\Big(\sum_j \boldsymbol{V}_j\lambda_j^*U_{ij}^*\Big)\\&=\sum_j|U_{ij}|^2\lambda_j^2\boldsymbol{V}_j^{H}\boldsymbol{V}_j=\sum_j|U_{ij}|^2\lambda_j^2\end{aligned}$$

性质 E-2　信道矩阵 $\boldsymbol{H}$ 所有元素的模满足

$$\sum_{i,j}|h_{ij}|^2=\sum_i\lambda_i^2 \tag{E-12}$$

也即信道矩阵的相关矩阵 $\boldsymbol{HH}^{H}$ 的迹 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{HH}^{H})$ 满足

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{HH}^{H})=\sum_i\lambda_i^2 \tag{E-13}$$

证明　根据式(E-9),有

$$\sum_{i,j}|h_{ij}|^2=\sum_i|\boldsymbol{h}_i|^2=\sum_i\sum_j|U_{ij}|^2\lambda_j^2=\sum_j\lambda_j^2\sum_i|U_{ij}|^2=\sum_j\lambda_j^2$$

而 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{HH}^{H})=\sum_{i,j}|h_{ij}|^2$,得证。

E.4　信道奇异向量系统的信道容量

假设信道是不变的,即信道矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是固定的,且为发射端所知,其秩为 L。发射端采用信

道奇异向量系统进行数据发射 $k \leqslant L$ 个数据流，各个数据流独立编码，那么该系统的信道容量是多少？我们知道奇异值系统在接收端来看就等价于 k 个并行的 SISO 信道（MRC 合并前为 k 个并行的 SIMO 信道），而各个数据流独立编码，那么信道容量为 k 个并行信道容量之和。

假设发射端总功率为 P，第 i 个数据流经历的等价 SISO 信道等价于 $\lambda_i x_i + N_i$，第 i 路分得的信号功率为 P_i，$\sum_i P_i = P$，$N_i \sim \mathcal{CN}(0,\sigma^2)$。那么，第 i 个信道的信道容量为

$$\log_2\left(1+\frac{\lambda_i^{\ 2} P_i}{\sigma^2}\right) \tag{E-14}$$

从而该 MIMO 系统信道容量为

$$\sum_{i=1}^{k}\log_2\left(1+\frac{\lambda_i^2 P_i}{\sigma^2}\right) \tag{E-15}$$

达到该容量的编码方式为各数据流像在 AWGN 下各自达到信道容量即可。

特别地，当发射 L 个数据流，且各个流功率分配相等时，即 $P_i=\dfrac{P}{L}$，信道容量为

$$C=\sum_{l=1}^{L}\log_2\left(1+\frac{|\lambda_i|^2 P}{L\sigma^2}\right)=\log_2\det\left(\boldsymbol{I}+\frac{\mathrm{SNR}}{L}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) \tag{E-16}$$

其中，det 为行列式运算符。等式关系推导如下：

$$\begin{aligned}\det\left(\boldsymbol{I}+\frac{\mathrm{SNR}}{L}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)&=\det\left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{I}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}+\frac{\mathrm{SNR}}{L}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)\\&=\det\left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{I}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}+\frac{\mathrm{SNR}}{L}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\right)\\&=\det[\boldsymbol{U}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Sigma}')\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}]\\&=\det(\boldsymbol{U})\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Sigma}')\det(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}})\\&=\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Sigma})\\&=\prod_{l}\left(1+\frac{\mathrm{SNR}\ |\lambda_i|^2}{L}\right)\end{aligned} \tag{E-17}$$

其中，$\boldsymbol{\Sigma}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}'$ 为对角阵如下：

$$\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}\ \{\lambda_1^2,\dots,\lambda_L^2\}_{r\times r},\quad \boldsymbol{\Sigma}'=\mathrm{diag}\left\{\frac{\mathrm{SNR}}{L}\lambda_1,\dots,\frac{\mathrm{SNR}}{L}\lambda_L\right\}_{r\times r} \tag{E-18}$$

各位读者朋友，本书到此结束，若有没照顾到的，还请自行查阅资料。

参考文献

[1] 郑君里,应启珩,杨为理. 信号与系统[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2000.

[2] 樊昌信,曹丽娜. 通信原理[M]. 6 版. 北京:国防工业出版社,2006.

[3] 曹志刚,钱亚生. 现代通信原理[M]. 北京:清华大学出版社,1992.

[4] 沈世溢. 信息理论与编码[M]. 北京:科学出版社,2002.

[5] 佟学俭, 罗涛. OFDM 移动通信技术原理与应用[M]. 北京:人民邮电出版社,2003.

[6] Alan V Oppenheim, Alan S Willsky, S Hamid Nawab. 信号与系统[M]. 刘树棠,译. 2 版. 西安:西安交通大学出版社,1998.

[7] Thomas M Cover, Joy A Thomas. Elements of Information Theory[M]. New York: Wiley, 1991.

[8] Eric Dahlman, Stefan Parkvall, Johan Sköld, et al. 3G Evolution: HSPA and LTE for Mobile Broadband[M]. 2nd ed. London: Academic Press, 2008.

[9] Tse D, Viswanath P. Fundamentals of wireless communication[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

[10] Branka Vucetic, Jinhong Yuan. Space – Time Coding [M]. West Sussex: Wiley, 2003.

[11] Shannon C E. A mathematical theory of communication [J]. Bell System Technical Journal, 1948, 27: 379 – 429, 623 – 656.

[12] Shannon C E. Communication in the presence of noise [J]. Proceedings of the Institute of Radio Engineers, 1949, 37(1): 10 – 21.

[13] Nick LaSorte, W Justin Barnes, Hazem H Refai. The history of orthogonal frequency – division multiplexing [J]. IEEE Communication Magazine, 2009, 47(11): 26 – 35.

[14] Alamouti S M. A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1998, 16(8): 1451 – 1458.

[15] David James Love, Robert W Heath Jr. Limited feedback unitary precoding for spatial multiplexing systems [J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2005, 51(8): 2967 – 2976.

[16] Lizhong Zheng, Tse D. Diversity and multiplexing: a fundamental tradeoff in multiple – antenna channels[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2003, 49(5): 1073 – 1096.

[17] Tse D, Viswanath P, Lizhong Zheng. Diversity – multiplexing tradeoff in multiple – access channels[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2004, 50(9): 1859 – 1874.

[18] NTT DoCoMo, et al. Tdoc R1 – 050386: Views on OFDM parameter set for evolved UTRA downlink[S]. 3GPP TSG RAN WG1, 2005.

[19] 3rd Generation Partnership Project: Technical Specification Group Radio Access Network (E – UTRA). 3GPP TS 36.211 v9.0.0: Physical Channels and Modulation (Release 9)[S], 2009.

[20] 3rd Generation Partnership Project: Technical Specification Group Radio Access Network (E – UTRA). 3GPP TS 36.212 v9.0.0: Multiplexing and channel coding (Release 9)[S], 2009.

[21] 3rd Generation Partnership Project: Technical Specification Group Radio Access Network (E – UTRA). 3GPP TS 36.213 v9.0.0: Physical layer procedures (Release 9)[S], 2009.

[22] Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page.

机工出版社·计算机分社书友会邀请卡

尊敬的读者朋友：

感谢您选择我们出版的图书！我们愿以书为媒与您做朋友！我们诚挚地邀请您加入：

“机工出版社·计算机分社书友会”

以书结缘，以书会友

加入“书友会”，您将：

★ 第一时间获知新书信息、了解作者动态；

★ 与书友们在线品书评书，谈天说地；

★ 受邀参与我社组织的各种沙龙活动，会员联谊；

★ 受邀参与我社作者和合作伙伴组织的各种技术培训和讲座；

★ 获得“书友达人”资格（积极参与互动交流活动的书友），参与每月 5 个名额的“书友试读赠阅”活动，获得最新出版精品图书 1 本。

如何加入“机工出版社·计算机分社书友会”

两步操作轻松加入书友会

Step1

访问以下任一网址：

★ 新浪官方微博：http://weibo.com/cmpjsj

★ 新浪官方博客：http://blog.sina.com.cn/cmpbookjsj

★ 腾讯官方微博：http://t.qq.com/jigongchubanshe

★ 腾讯官方博客：http://2399929378.qzone.qq.com

Step2

找到并点击调查问卷链接地址（通常位于置顶位置或公告栏），完整填写调查问卷即可。

联系方式

通信地址：北京市西城区百万庄大街 22 号
机械工业出版社计算机分社
邮政编码：100037

联系电话：010-88379750
传　　真：010-88379736
电子邮件：cmp_itbook@163.com

敬请关注我社官方微博： http://weibo.com/cmpjsj

第一时间了解新书动态，获知书友会活动信息，与读者、作者、编辑们互动交流！