

信息科学与工程系列专著

# MIMO系统与空时编码

## ——分集的理论与实践

MIMO System and STC:  
The Theory and Practice of Diversity

邵朝 编著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

信息科学与工程系列专著

# MIMO系统与空时编码

## 分集的理论与实践

MIMO System and STC:  
The Theory and Practice of Diversity



邵朝 1955年生，西安邮电大学教授、硕士生导师。1982年1月获西安交通大学数学系学士学位；1991年3月获西安电子科技大学应用数学系硕士学位；1998年3月毕业于西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室，获工学博士学位（信号与信息处理专业）。2006年获得国家留学基金委的资助，到美国加州大学戴维斯分校（University of California Davis）做访问学者1年。主要研究领域：阵列信号处理算法，多输入多输出（MIMO）系统与空时编码等。主持完成国家自然科学基金1项、陕西省教育厅自然科学基金项目1项、国家重点实验室开放课题基金项目1项等；作为主要参与者完成国家级项目1项及省部级项目多项；在研项目有陕西省科技厅工业攻关计划项目“基于3GPP及I-METRA信道的空中接口解决方案”（2012K06-27）。出版独著1部，主编教材2部，发表学术论文40多篇。



策划编辑：张来盛  
责任编辑：毕军志  
封面设计：张昱

ISBN 978-7-121-19110-7



9 787121 191107 >

定价：59.00 元

信息科学与工程系列专著

# MIMO 系统与空时编码

## ——分集的理论与实践

**MIMO System and STC:  
The Theory and Practice of Diversity**

邵 朝 编著

电子工业出版社

**Publishing House of Electronics Industry**

北京 · BEIJING

## 内 容 简 介

本书在分析多输入多输出 (MIMO) 系统信道特性和容量的基础上, 系统阐述了 MIMO 系统与空时编码的相关理论、编码方案、性能分析、优化及应用。主要内容包括: 无线信道的传播和衰落特性分析与模拟、MIMO 信道的容量分析、空时分组码的设计原则、正交空时分组码编码及性能分析、空时格型码的编码原理及性能分析、分层空时编码原理及检测算法分析、准正交空时分组码和最小解码复杂度分析、MIMO 系统与正交频分复用及空时编码传输技术, 凸优化理论与 MIMO 系统收发机的设计。

本书内容的阐述循序渐进、条理清晰、系统性强, 书中重要结论、编码方案等均利用 MATLAB®软件平台进行编程实现; 各章均对重要知识点予以总结, 并附有练习题。

本书读者对象: 通信专业的高年级本科生和研究生, 以及相关专业技术人员 and 高校教师。

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。  
版权所有, 侵权必究。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

MIMO 系统与空时编码: 分集的理论与实践 / 邵朝编著. —北京: 电子工业出版社, 2013.1  
(信息科学与工程系列专著)  
ISBN 978-7-121-19110-7

I. ①M… II. ①邵… III. ①移动通信—通信系统—编码—研究 IV. ①TN929.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 285475 号

策划编辑: 张来盛 (zhangls@phei.com.cn)

责任编辑: 毕军志

印 刷: 涿州市京南印刷厂

装 订: 涿州市京南印刷厂

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1 092 1/16 印张: 23 字数: 588.8 千字

印 次: 2013 年 1 月第 1 次印刷

印 数: 3 000 册 定价: 59.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zllts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

# 前 言

在未来,大多数无线通信系统中应用具有适当的空时编码、调制、解调或解码的多天线技术似乎已成为必然。如今,最主要的问题就是如何应用多天线技术以及在某些特殊应用场合什么方法最为合适。在过去的几年里,学术界对空时编码和多输入多输出(Multiple Input Multiple Output, MIMO)系统的兴趣大增,众多研究人员投入该课题的研究和探索,其中既有的对空时编码背后的数学理论感兴趣的数学家,又有试图构造这样的实际系统的工程师。因而在理论深度上不仅包括了空时编码理论,而且空时编码与多输入多输出(MIMO)理论与实践方案也日渐成熟,包括对空时传播理论的研究、信道模型的建立、空时编码调制及接收机的设计等。人们对 MIMO 系统的容量潜能的认识以及对其实现的探究,大量能够深度挖掘 MIMO 系统容量的空时编码传输方案的提出,以及相应实验平台的建立与运作,都从各个方面印证空时编码与 MIMO 技术将成为未来通信发展的核心支撑之一。例如,目前的 2.5G 与 3G 通信标准都已集成了发送与接收空时分集技术,关于无线局域网(WLAN)的 IEEE 802.11 标准以及关于固定和移动无线通信的 IEEE 802.16 标准都将两端需要阵列天线的空间复用技术纳入其中。作者在与国内主要通信研发机构及设备制造商的接触中看到,他们在不同场合均表示了应用空时编码技术的强烈愿望。大家普遍深感空时编码与 MIMO 技术课题从理论探索到业界的工程实践居然发展得如此迅速,不得不令人惊奇。在国外,一些利用空时技术(如简单的波束形成及空间复用技术)的产品已经面市。另外, MIMO 系统的基本思想符合人类认识自然界及人类与自然界沟通的基本方式,它已渗透到相关学科与技术领域。因此,掌握和理解具有空时编码技术的 MIMO 系统,对于当前及将来的电子工程、通信工程、控制工程、计算机技术等不同专业的从业人员是重要的和必要的。

本书的定位是作为通信专业硕士研究生和高年级本科生的教材,以及通信领域从业人员的参考书。

本书形成的初衷是为研究生毕业论文选题进行一定的基础性准备和开拓他(她)们的学术视野。本书前半部分作为基础性内容,作者曾为西安邮电大学部分硕士研究生讲授多遍;这部分内容对于学习了大学《通信原理》的高年级本科生,也可作为应用其所学知识并加深理解其内容的拓宽性读物。在此基础上,本书结合作者多年教学和科研成果,对 MIMO 系统与空时编码的前沿理论、技术及应用(如空-时-频域分集、优化合并技术、最优化理论等)进行了介绍,并借鉴一些在相关领域或研究课题较有影响的作品,将作者对大家的思考问题、论述和演绎问题的认知渗透到相关章节中,力图使研究生在相关领域的选题能与该领域研究前沿相对接,以更好地适应研究生招生规模不断增长后他们在该领域选题范围的需求,满足通信领域的从业工程师对于了解未来通信发展动向、掌握潜在应用技术的需要。

编写本书的宗旨是,使电子工程、通信工程、控制工程、计算机技术等不同专业的学生及相应领域的从业工程技术人员,能够通过本书的学习,掌握 MIMO 系统及空时编码理论、原理,理解其基本的思想方法,并将其应用于各自的工程实践。同时,兼顾在校研究

生毕业论文选题需求,对相关问题能有一定深度的探究,体现理论的扎实与严谨,清晰可行的实践路线图。在这个原则指导下,取材及编写的理念是:内容力求深入浅出;叙述论点尽量环环紧扣;知识点尽量体现循序渐进;基础理论与实践相结合、相辅相成。对关键理论及知识点的阐述,注重背景分析及细节介绍,但不纠缠之。全书充分利用了 MATLAB<sup>®</sup> 软件平台来产生理论结果的直观描述或算法的模拟仿真展现,通过直观图形使理论说明一目了然,对算法性能的佐证有理有据。另外,也引导初学者注重培养严谨的学风、系统辩证的思维以及理论联系实际的方法,通过实践加深与强化对理论的理解和掌握。

基于这样一些考量,全书安排了下面的内容。

第 1 章主要内容是 MIMO 无线信道的传输特性论述。对无线信道,从天线结构分有单输入单输出 (SISO)、单输入多输出 (SIMO)、多输入单输出 (MISO) 和多输入多输出 (MIMO) 信道等;从传输环境分有室内和室外信道;从衰减特性分主要有大尺度衰落、小尺度衰落、频率平坦(也被称为频率非选择性)衰落和频率选择性衰落信道等;从多阵元天线的结构特征分有空域相关(互耦)和空域非相关(独立)信道等。这些林林总总的信道均有一定的数学模型逼近表示。为能将 MIMO 系统的论述简化为 MISO 系统问题,本章最后还介绍了几个重要的合并算法。

第 2 章详细地讨论了 MIMO 信道容量和影响 MIMO 信道容量的一些主要因素。例如,发送端已知信道状态信息时,能够实现最佳信道容量的注水算法、天线阵元间互耦对信道容量的影响、莱斯因子对信道容量的影响、极化对信道容量的影响、锁眼效应等。基于对 MIMO 信道容量的基础是循环对称复高斯随机矢量的分布密度函数及其信息熵的认识,在该章的预备知识中,讨论了循环对称复高斯随机矢量的一些基本概念和性质。

第 3 章主要是对空时编码的设计准则的讨论,它是后面几个章节的基础。以平均成对差错概率分析为依据,引入编码矩阵的行列式准则、迹准则、秩准则和最大互信息熵准则等,而以前三个准则最为实用。这样第 2 章从传输速率角度,给出 MIMO 系统与空时分集的效益;而第 3 章从传输可靠性角度展现 MIMO 系统与空时分集的有效性。结合第 2 章与第 3 章的讨论,就能很好地理解 MIMO 系统与空时编码对于提升通信系统整体性能是有效及有力的。

第 4 章讨论正交空时分组码 (Orthogonal Space Time Block Coding, OSTBC) 的设计理论和方法及其解码算法等。从总体衡量,本章具有中心位置,也具有承前启后的作用。OSTBC 的经典方案是 Alamouti 空时码。所以该章首先对 Alamouti 空时编码进行了详细的分析讨论,总结出 Alamouti 空时编码方案的一系列优点。以 Alamouti 空时编码方案为基准,讨论分析 OSTBC 的设计理论和解码算法。OSTBC 设计理论的核心是 Hurwitz-Radon 实正交设计理论。基于 Hurwitz-Radon 实正交设计理论,即使对于实 OSTBC,具有方形矩阵的 OSTBC 是严格受限的,即能提供满分集、全速率的 OSTBC 是严格受限的。但仅弱化全速率(或满分集)限制,则对于任意发射天线个数,均能设计出相应实或复的 OSTBC。本章详细论述了实 OSTBC 设计理论、广义实 OSTBC 设计理论、复 OSTBC 设计理论和广义复 OSTBC 设计理论。OSTBC 的另一个特点是,对应最大似然解码算法是最简单的单符号解码。本章详细讨论了对应最大似然 (Maximum Likelihood, ML) 解码算法以及对应符号判决统计量的构造等。OSTBC 能将编码的行列式准则、秩准则、迹准则等最佳设计准则以及最佳解码算法——ML 解码算法、最佳延迟传输和平均成对差错概率分析等一系列概念贯穿在一起,

这对理解和认知整个 MIMO 系统与空时编码体系是很有意义的。

第 5 章讨论了空时格型码 (Space Time Trellis Coding, STTC) 的设计方法。相比 OSTBC 而言, STTC 既有分集增益又有编码增益。其付出是 ML 解码算法的复杂度大幅度提升, 对应解码算法为 Viterbi 译码算法。STTC 编码器可等价为 一组并行的横截 (FIR, 有限长脉冲响应) 滤波器, 其移位器有寄存功能, 而加法器为“模”加法器; 基此形成空时格型编码器生成多项式以及生成矩阵的闭形表达式; 利用 STTC 编码器的生成矩阵, 将 STTC 编码器等价为一个“黑箱”系统, 只关注其对输入码序列的变换进而实现对 STTC 编码器的系统论认知。通过分析研究 STTC 输入/输出网格图, 对输入/输出关系加以分类, 可实现 Viterbi 译码算法复杂度降低。

第 6 章讨论了分层 (Layered) 空时码的设计思想和解码方法。分层空时码“侧重”于空时复用而“非”分集。由于分层空时码的解码算法与信道估计及多用户信号检测算法完全相同, 因此本章将分层空时码与信道估计问题融合在一起讨论。对于分层空时码的讨论主要以对应编码结构为主线展开, 分层结构有水平 (Horizontal) 分层与垂直 (Vertical) 分层, 水平分层中有对角 (Diagonal) 分层与线程 (Thread) 分层, 垂直分层中有 D-BLAST 和 V-BLAST。BLAST (Bell Laboratories Layered Space Time) 技术的关键是在设计空时码传输结构的同时考虑接收端信号处理、信道估计和符号解码算法。本章采用各个关键技术相割裂的论述方法, 在完成分层空时码编码结构讨论后详细论述了最大似然检测、最小均方误差 (MMSE) 检测和解相关 (Decorrelation) 或称为迫零 (Zero-Force) 检测等算法以及它们之间内在的联系。

第 7 章讨论准正交空时码 (Quasi-Orthogonal Space Time Coding) 编码方案和解码复杂度分析。从几种经典的准 (拟) 正交空时码论述开始, 通过分析计算其编码矩阵的距离增益矩阵的行列式, 揭示其非满分集特性, 引出所谓的“分集积”概念。利用调制符号星座图旋转变换, 使编码矩阵满足满分集特性, 求使分集积最大的最佳调制符号星座图旋转角度。准正交编码对应的最大似然解码算法是多个符号联合解码, 调制符号星座图旋转增加了最大似然解码搜索符号集的“集重”或“势”。因此, 调制符号星座图旋转的准正交空时码在两个维度增加了对应最大似然解码算法的复杂度。本章的中心议题是讨论对准正交空时码编码矩阵建立相应的线性变换, 降低对应最大似然解码算法的复杂度。

第 8 章讨论正交频分复用 (OFDM) 技术与 MIMO 系统的空时编码方案的结合问题, 实现 MIMO 系统的空—时—频编码以获得信号空—时—频分集或复用。这一技术被认为是未来通信技术的关键解决方案之一。本章内容可谓“三足鼎立”: OFDM 的基本原理和峰均值比问题、MIMO-OFDM 空—时—频编码系统成对差错概率分析、MIMO-OFDM 系统中空—时—频编码方案研究。本章详细地论述了 OFDM 峰均值比降低的三类方法、信号非线性形变方法、编码类方法; 加扰—选择方法。建立了 MIMO—OFDM 空—时—频编码系统成对差错概率分析的“闭—形”解析表达式, 并在空域相关信道情形实现计算机仿真。针对 MIMO 系统的空—时—频编码, 在频率选择性信道中从理论与实践两个方面演绎了 Lindskog-Paulraj 空频编码、Park-Kim-Baik 空—时—频编码和修正的 Lee-Williams 空—时—频编码等方法。

最优化理论贯穿整个 MIMO 系统与空时编码设计理论, 第 9 章论述凸优化在 MIMO 系统与空时编码中的应用。一般优化问题转化为凸优化最著名的方法是 Lagrange 乘子对偶理论和 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件, 前者能够实现问题简单地转化, 后者能保证转化前

后两个问题的解相同。利用接收端信号的均方误差、系统输出信—干—噪比、系统误比特率等指标度量实现线性解码器的最优设计。利用发送端发送功率约束的波束形成（预编码）技术实现发送滤波器的最优设计。

所有这些内容对于 MIMO 系统与空时编码技术是非常基础性的。然而，作者认为，从第 1 章到第 9 章，每一章节的内容其实都可以作为电子通信类专业硕士研究生阶段深入钻研的课题，特别是适合作为他们学习阶段的学期论文课题。对于欲做更高层次研究的研究生同学，通过本书的研读可能会较“全方位”理解 MIMO 系统与空时编码理论和技术，为向前拓展、深化研究奠定基础。对于电子通信类专业本科生同学，每一章中都可以分解出一些小的专题作为他们毕业论文设计的题目，对于他们综合运用及加深理解、认知大学期间所学课程，培养分析问题和解决问题的能力都是很好的选择。对于一般工程从业人员，本书作为一个深入浅出的启蒙，相信读者会从中获益。但同时，由于作者的知识结构有限，对问题认识片面及局限是难免的，读者如有不同的见解，可发邮件至 [shaochao@xupt.edu.cn](mailto:shaochao@xupt.edu.cn)，请不吝赐教，愿我们共同提高。

值得一提的是，本书的研究内容得到陕西省教育厅自然科学基金项目（08JK427）和陕西省科技厅科学工业攻关计划项目（2012K06—27）的资助，在此表示感谢；本书的部分内容历经了西安邮电大学多届硕士研究生的教学实践，多年来已有十多位研究生将 MIMO 系统与空时编码理论作为他们硕士论文的研究主题，并对本书初稿提出过许多比较中肯的建议或意见，特别是李伍洋、肖乾、范莉爽、张睿、莫增涛、王闯、赵龙凯、张成程、史鑫、徐春瑶和刘玉明等同学，他们反复阅读书稿，指出其中的差错，为保证本书的出版质量付出了艰辛的劳动，作者在此对他们表示谢意。还要深深地感谢我的家人，是他们一如既往的支持与理解，才使我在纷乱的日常工作中得以坚持，我衷心地与他们分享我的一切。

另外，作者仍计划将本书的内容作为西安邮电大学通信类专业硕士研究生阶段的课程，并有相应的幻灯片讲义。有类似计划的外校同行可来函电索取。对于相关领域的研究人员，只要在您的作品中注明引用本书作为参考，均可来函电索取相关资料。

邵 朝

2012 年 5 月于西安



## 主要符号表

$a$	标量 $a$	$\max\{\cdot\}$	取最大值
$\mathbf{a}$	矢量 $\mathbf{a}$	$\min\{\cdot\}$	取最小值
$\mathbf{A}$	矩阵 $\mathbf{A}$	$\sup\{\cdot\}$	取上确界
$(\cdot)^*$	复数取共轭	$\inf\{\cdot\}$	取下确界
$(\cdot)^T$	矩阵或矢量的转置	$\lambda \succ^w \mathbf{d}$	$\lambda$ 是弱优于 $\mathbf{d}$
$(\cdot)^H$	矩阵或矢量的共轭转置	$\mathcal{S}^n$	$n \times n$ 维对称矩阵集合
$\operatorname{Re}(\cdot)$ 和 $\operatorname{Im}(\cdot)$	复数取实部和虚部	$\mathcal{S}_+^n$	$n \times n$ 维对称半正定矩阵集合
$\log_a x$	$x$ 的以 $a$ 为底的对数	$\mathcal{S}_{++}^n$	$n \times n$ 维对称正定矩阵集合
$\arg(z)$	变量 $z$ 的相角	$(x)^+ = \max\{x, 0\}$	当 $x \geq 0$ , $(x)^+ = x$ ; 否则 $(x)^+ = 0$
$\operatorname{rank}(\cdot)$	矩阵的秩	$\odot$	矩阵或矢量的 Hadamard 积
$\det(\cdot)$	矩阵的行列式	$\otimes$	矩阵或矢量的 Kronecker 积
$\operatorname{tr}(\cdot)$	矩阵的迹	$\operatorname{vec}(\cdot)$	将矩阵按列变换成矢量
$\mathbf{X}_{(k,l)}$	矩阵 $\mathbf{X}$ ( $k, l$ ) 处的元素	$\lfloor x \rfloor$	取小于或等于 $x$ 的正整数
$\lambda\{\mathbf{X}\}$	矩阵 $\mathbf{X}$ 的特征谱	$\lceil x \rceil$	取大于或等于 $x$ 的正整数
$ \cdot $	复数的模值或取绝对值	$\langle \cdot, \cdot \rangle$	两个矢量内积的运算符号
$\ \cdot\ _p$	矢量的 $p$ 范数或矩阵的范数	$\gg$ 和 $\ll$	远大于和远小于
$\ \mathbf{X}\ _F$	矩阵 $\mathbf{X}$ 的 Frobenius 范数	$\mathbf{n} : \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 \mathbf{I}_N)$	$\mathbf{n}$ 为服从零均值 功率为 $\sigma_n^2$ 的 $N$ 维复高斯随机矢量
$\operatorname{diag}\{\mathbf{x}\}$	将向量 $\mathbf{x}$ 生成对角矩阵	$\mathbf{n} : \mathcal{N}(0, \sigma_n^2 \mathbf{I}_N)$	$\mathbf{n}$ 为服从零均值, 功率为 $\sigma_n^2$ 的 $N$ 维实高斯分布的随机矢量
$\mathbf{I}_N$	$N \times N$ 维的单位矩阵	$(\cdot)^\dagger$	Moore—Penrose 广义逆
$\mathbf{0}_{M \times N}$	$M \times N$ 维的零矩阵		
$E[\cdot]$	对随机变量求期望		
$\mathbf{R}^{m \times n}$	$m \times n$ 维的欧氏空间		
$\mathbf{C}^{m \times n}$	$m \times n$ 维的复空间		

# 目 录

第 1 章 无线信道的传播和衰落特性分析与模拟	1
引言	1
1.1 一些预备知识与概念	2
1.2 无线信道一般传播特性分析	3
1.2.1 大尺度衰落	6
1.2.2 小尺度衰落	13
1.3 单输入单输出信道模型	22
1.3.1 室内信道模型	23
1.3.2 室外信道模型	30
1.4 多输入多输出信道模型	45
1.4.1 多输入多输出信道统计模型	45
1.4.2 I-METRA 多输入多输出信道统计模型	54
1.4.3 SCM 多输入多输出信道模型	63
1.5 天线分集及合并算法	69
1.5.1 分集增益的一些概念	69
1.5.2 几种经典的合并算法	71
1.6 多输入多输出信道系统	75
1.7 本章要点总结	75
练习题	76
参考文献	77
第 2 章 MIMO 信道的容量分析	80
引言	80
2.1 一些准备	81
2.2 具有确定传输函数的多输入多输出高斯信道的容量分析	83
2.2.1 多输入多输出信道容量的定义	83
2.2.2 发送端未知信道参数时的信道容量	84
2.2.3 发送端已知信道参数时的信道容量	86
2.2.4 确定性信道的信道容量	88
2.2.5 随机性信道的信道容量	91
2.2.6 遍历性容量	91
2.2.7 中断容量	92
2.3 差错指数	93
2.4 影响信道容量的其他一些因素	94

2.4.1 衰落相关对信道容量的影响	94
2.4.2 直达波对信道容量的影响	96
2.4.3 交叉极化判别对信道容量的影响	97
2.4.4 信道蜕化—锁眼效应对信道容量的影响	99
2.4.5 频率选择性信道对信道容量的影响	100
2.5 模拟说明	103
2.6 本章要点总结	103
练习题	103
参考文献	104
<b>第 3 章 空时分组码的设计准则</b>	<b>105</b>
引言	105
3.1 秩和行列式准则	106
3.2 迹准则	112
3.3 最大互信息熵准则	114
3.4 本章要点总结	115
练习题	115
参考文献	116
<b>第 4 章 正交空时分组码编码及性能分析</b>	<b>117</b>
引言	117
4.1 Alamouti 空时编码方案	118
4.2 Alamouti 空时编码方案与最大比合并器的比较	122
4.3 实正交设计	124
4.4 广义实正交设计	133
4.5 复正交设计和广义复正交设计	139
4.6 OSTBC 的解码 (符号估计判决量的构造)	147
4.7 性能分析	149
4.7.1 正交空时码情形的性能分析	150
4.7.2 非正交空时码情形的性能分析	154
4.8 计算机模拟实验说明	157
4.9 本章要点总结	158
练习题	159
参考文献	161
附录 A 有关函数 $Q(x)$ 的几个结果	163
附录 B 编码矩阵 $\mathcal{H}_3$ 对信道参数的编码变换公式	164
<b>第 5 章 空时格型码的编码原理及性能分析</b>	<b>165</b>
引言	165
5.1 空时格型编码器的网格图	165

5.2 空时格型码编码器结构、生成多项式及生成矩阵	166
5.3 空时格型码的解码算法	172
5.4 空时格型码的性能分析	172
5.5 空时格型码的设计	174
5.6 本章要点总结	178
练习题	178
参考文献	179
<b>第 6 章 分层空时编码原理及检测算法分析</b>	<b>180</b>
引言	180
6.1 系统模型和层的概念	181
6.2 分层空时码的编码结构和原理	183
6.2.1 分层空时码的水平编码结构	183
6.2.2 分层空时码的垂直编码结构	190
6.3 分层空时编码的几个经典检测算法	192
6.3.1 最大似然检测器	193
6.3.2 迫零(解相关)检测器	193
6.3.3 最小均方误差检测器	194
6.3.4 基于 QR 分解的干扰逐个剔除接收机	195
6.4 分层空时编码的性能分析	197
6.4.1 水平分层空时码的性能分析	197
6.4.2 慢衰落信道的性能分析	198
6.4.3 快衰落信道的性能分析	198
6.5 信道估计问题	199
6.6 计算机模拟实验结果和说明	203
6.7 本章要点总结	207
练习题	207
参考文献	208
<b>第 7 章 准正交空时分组码和最小解码复杂度分析</b>	<b>209</b>
引言	209
7.1 拟(准)正交空时分组码的传输模型	210
7.2 拟(准)正交空时分组码的编码规则和解码算法	214
7.2.1 几种拟(准)正交空时分组码的编码方案	214
7.2.2 拟(准)正交空时分组码的星座图旋转编码与解码算法	216
7.2.3 拟(准)正交空时分组码的解码算法复杂度分析	222
7.3 通用的非奇异线性星座图符号变换公式	224
7.4 非奇异线性变换矩阵 $U_i$ 的设计	226
7.4.1 非奇异线性变换矩阵 $U_i$ 对最大似然解码为实符号对复杂度的充分必要条件	226
7.4.2 正方形 QAM 情形下的最佳线性变换	228

7.4.3 矩形 QAM (RQAM) 情形下的最佳线性变换	230
7.4.4 关于任何格点上的任意 QAM 调制符号星座图的非奇异线性变换	233
7.5 关于矩形 QAM 调制符号星座图和坐标交织正交设计的最佳线性变换	235
7.5.1 坐标交织正交设计编码的概念	235
7.5.2 坐标交织正交码的最优解码	237
7.5.3 坐标交织正交码的空时分集增益和编码增益	239
7.5.4 4-QAM 星座图的最佳旋转角	240
7.5.5 坐标交织正交设计的非奇异线性变换	240
7.6 计算机仿真和结论	242
7.7 本章要点总结	245
练习题	246
参考文献	248
附录 C 定理 7.1 的证明	251
附录 D 定理 7.2 的证明	254
附录 E 定理 7.3 的证明	259
附录 F 定理 7.7 的证明	263
<b>第 8 章 MIMO 系统与正交频分复用及空时频编码传输技术</b>	<b>264</b>
引言	264
8.1 正交频分复用 (OFDM) 技术的基本概念	265
8.2 正交频分复用 (OFDM) 技术的基本原理	266
8.2.1 正交频分复用 (OFDM) 信号的生成和表达式	267
8.2.2 OFDM 信号的数学表达式	268
8.2.3 保护间隔与循环前缀的插入	269
8.2.4 加窗函数对 OFDM 信号的意义	270
8.3 正交频分复用 (OFDM) 信号的接收与解码	271
8.3.1 OFDM 信号接收端结构分析	272
8.3.2 OFDM 信号在接收端的数学表示分析	273
8.4 OFDM 信号功率峰均值比 (PAPR) 问题	281
8.4.1 OFDM 信号峰均值功率比的分布	281
8.4.2 非线性形变类限幅法	282
8.4.3 编码类方法	288
8.4.4 加扰类方法	289
8.5 MIMO-STFC-OFDM 系统成对差错概率分析	292
8.5.1 系统模型及其分集特性	293
8.5.2 基于 OFDM 调制的发送端阵列天线系统与空时频编码	295
8.5.3 成对差错概率分析	296
8.5.4 空时频编码矩阵对成对差错概率的影响分析	301
8.5.5 接收数据矢量协方差分析	303

8.6 空—时—频分集增益的实现	306
8.7 关于成对差错概率的模拟分析	319
8.8 本章要点总结	321
练习题	322
参考文献	325
附录 G 接收信号数据矢量 $\mathbf{Y}$ 的 2 范数的计算公式推导	329
附录 H 成对差错概率的计算公式推导	330
<b>第 9 章 凸优化理论与 MIMO 系统收发机的设计</b>	<b>335</b>
引言	335
9.1 优化理论的一些基本概念	335
9.2 凸优化及其对偶理论	338
9.2.1 凸优化的定义和分类	338
9.2.2 将一般优化问题转化为凸优化问题	339
9.2.3 拉格朗日乘子对偶理论和 KKT 条件	340
9.3 MIMO 系统接收端的优化问题	341
9.3.1 MIMO 系统发送端和接收端信号模型	341
9.3.2 与线性接收滤波器有关的性能指标	342
9.3.3 最优线性接收滤波器	343
9.3.4 不同性能度量间的联系	344
9.4 MIMO 系统发送端波束形成优化问题	345
9.4.1 MIMO 系统发送端波束形成的凸优化处理	346
9.4.2 性能指标直接约束的发送端滤波器优化设计	346
9.4.3 广义性能指标约束的系统发送端滤波器优化设计	348
9.4.4 最小误比特率发送端滤波器优化设计	349
9.5 本章要点总结	350
练习题	351
参考文献	352

# 第 1 章 无线信道的传播和衰落特性分析与模拟

## 引言

无线通信的发展目标是使用者能够在任意地点、任何时间与任何人实现即时通信。其发展的瓶颈是无线频谱资源的短缺，而阻滞是信道的复杂时变特性，如多径衰落与多普勒频移等。

随着移动通信的演进发展，遇到的最大挑战之一是在系统频谱效率（计量单位为 bps/Hz）不变的情形下要求不断提升其传输速率（计量单位为 bit/s）。例如，20 世纪 90 年代普及的所谓第二代（2G）移动通信系统，在我国和欧洲的体制为 GSM（Global System for Mobile communications），北美的体制为 TDMA/136，其工作频带为 900~1800 MHz，需要支撑的传输速率为 22.8Kbit/s。而第三代（3G）移动通信系统在同样工作频带下需要支撑的传输速率至少为 384Kbit/s。另外，随着科学技术的发展，频谱资源的枯竭也是一个现实的障碍。表 1.1 及图 1.1 所示是第三代移动通信合作伙伴计划（Third-Generation Partnership Project, 3GPP）为通用陆地无线接入（Universal Terrestrial Radio Access, UTRA）以罗马数字命名的频分双工（Frequency Division Duplex, FDD）频带，表 1.2 所示是时分双工（Time Division Duplex, TDD）频带<sup>[1]</sup>。从图 1.1 中不难看出，有一些频带是重叠的。

表 1.1 由 3GPP 为 UTRA FDD 所定义的频带

频分双工频带	上行频带范围/MHz	下行频带范围/MHz	主要应用区域
I	1920~1980	2110~2170	欧、亚
II	1850~1910	1930~1990	美
III	1710~1785	1805~1880	欧、亚、美
IV	1710~1755	2110~2155	美
V	824~849	869~894	美
VI	830~840	875~885	日本
VII	2500~2570	2620~2690	欧
VIII	880~915	925~960	欧、亚
IX	1749.9~1784.9	1844.9~1879.9	日本
X	1710~1770	2110~2170	美

因而，新技术绝对不能再在频域加塞，必须从其他方面开垦资源。空时编码与多输入多输出结合技术就是不占用额外频谱资源，能够将移动无线的不利因素变为有利因素，且不需要对原系统做大的变动，它只是在无线通信的空中接口处进行一些小的技术改造，就能大幅度提高系统运行质量。因此，它是未来移动通信发展最具前途的技术之一。第三代

及第三代演进移动通信技术均将它作为首选关键技术。学习和理解这项技术，对于未来移动通信从业者是必要的。本章先从无线信道特性等基本概念入手，为理解空时编码与多输入多输出理论奠定基础。下面的讨论叙述方式较多地参考了文献[2-18]，关于信道较详细的讨论建议读者参考文献[19-22]。

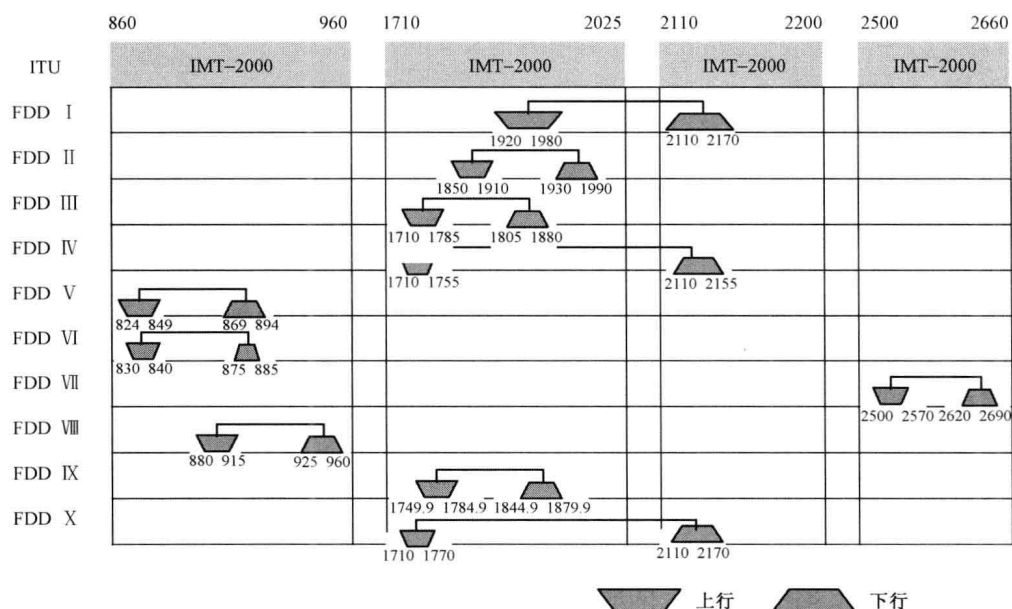


图 1.1 3GPP 为 UTRA FDD 所制定的工作频带

表 1.2 由 3GPP 为 UTRA TDD 所定义的频带

时分双工频带	频带范围/MHz	主要应用区域
(A)	1900~1920	欧、亚
	2010~2025	
(B)	1850~1910	美
	1930~1990	
(C)	1910~1930	美
(D)	2570~2620	欧

## 1.1 一些预备知识与概念

下面先给出经常用到的一些名词，以便于叙述的方便。

### 1. 单天线、多阵元天线系统

我们说多输入多输出 (Multiple Input Multiple Output, MIMO) 技术是破解现代通信瓶



颈与难题的首选，而与之相对的是所谓的单输入多输出（Single Input Multiple Output, SIMO）技术、多输入单输出（Multiple Input Single Output, MISO）技术、单输入单输出（Single Input Single Output, SISO）技术、多输入多输出多用户（Multiple Input Multiple Output Multiuser, MIMO-MU）系统。图 1.2 给出了它们结构的示意图。这些是系统的基本构架。

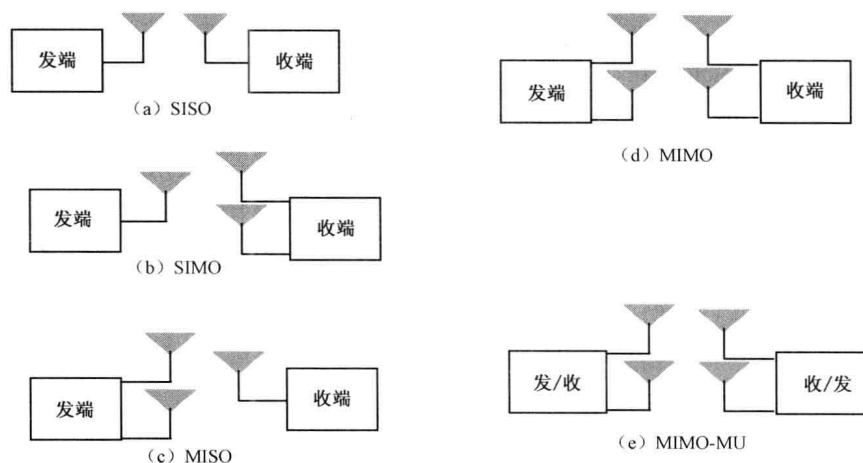


图 1.2 不同天线结构的空时系统

## 2. 天线增益

天线增益（Array Gain）是与系统内在结构有关的概念。所谓天线增益，是指发端、收端或同时在两端由于有多个天线阵元对信号的相干相加使信号平均信噪比的增加。若发送阵列天线已知信道参数，则它可以通过对发送信号做加权处理发送，使信号到达接收端保持同相位相加，即相干相加，这个增益我们称之为发送阵列天线增益。同样的，若接收阵列天线已知信道参数，则它可以通过对接收信号做加权处理接收，使信号实现同相位及同幅度相加，即相干相加，这个增益我们称之为接收阵列天线增益。从这两个方面，我们看到前提是要对信道信息已知。在通信系统中，一般移动终端要通过注册、请求服务等过程，所以一般可假设移动终端“已知”信道信息，即收端已知假设。而基站由于多窗口、被动式服务等特点的制约很难获得信道信息，即所谓的发端未知假设。我们在这两个假设成立条件下进行讨论。

### 1.2 无线信道一般传播特性分析

无线通信系统的性能主要受无线信道所处的环境支配。与有线信道的静态和“可预知”特性相反，无线信道是动态和“不可预知”的，因而无线通信系统的“恰当”分析通常是十分困难的。近年来，由于移动通信业务以及宽带移动互联网接入业务的迅猛增长，

无线通信系统的“优化”越来越关键。事实上，对无线信道的理解是构建高性能频谱有效无线通信技术的基础。在无线通信中，无线电波由发射机到达接收机称为无线电波的传播。在无线电波传播过程中，无线电波主要受三种不同模式的物理现象影响：反射、衍射和散射<sup>[2-3]</sup>。

### 1. 反射

若物体的尺寸远大于电磁波的波长，则电磁波遇到该物体就发生反射。这通常发生在地球表面或大的建筑物的墙壁。当电磁波在一个媒介中传播，遇到另一个电特性不同的介质就可能发生部分传播与反射。当平面波入射到一个完全绝缘体，其能量部分进入此绝缘体，部分被反射回，没有任何因吸收而导致的能量损失。当平面波入射到一个全导体，则所有的入射能量被反射回。反射和传播波的电场强度与入射介质的菲涅尔反射系数（Fresnel Reflection Coefficient）有关。这个系数是介质特性的函数，且依赖于波的极化、入射角和波的频率等。

### 2. 衍射

若电磁波入射到一个非规则物体表面，如尖锐的边缘，就可能发生衍射。无线电信号沿地球表面传播，超越地平线，绕过障碍物的现象也是电磁波的衍射现象。衍射使得当移动终端进入障碍物的阴影区时接收的电场强度虽迅速降低但仍能检测到该信号。衍射现象可用惠更斯原理（Huygens Principle）得以解释，该原理指出，所有波前上的点可视为产生二次子波的点波源，这些二次子波结合起来在波的传播方向产生一个新的波前，衍射是二次子波传播到阴影区域的现象。

### 3. 散射

若电磁波照射到一个由大量尺寸小于电磁波波长的物体构成的物体上就可能发生散射。图 1.3 所示是几种传播方式的示意图解释。

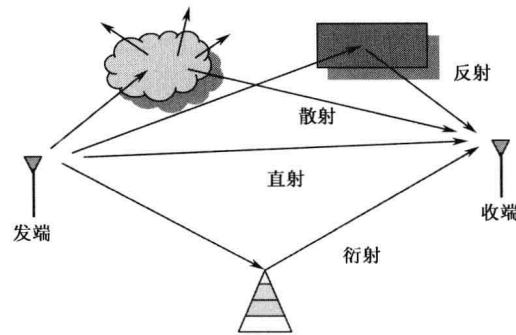


图 1.3 几种不同的无线传播方式

电磁波还有其他一些传播方式，如折射、吸收等，而且常见的是上述各方式相互结合、同时存在的传播现象，但反射、衍射、散射可认为是主要的无线传播方式。在无线信道中

有一个信号幅度随时间和频率变化的独特现象，称为“衰落”。与信号的蜕化是由于“加性”噪声成鲜明对比，衰落是由于信号的多径传播引起的——多路径衰落，或是由于无线电波传播过程中障碍物的阴影引起的——阴影衰落。无线通信信道中对信号多路径衰落的描述原本是 20 世纪五六十年代用以描述 HF（频率范围为 3~30MHz）、UHF（频率范围为 300~3000MHz）和 SHF（频率范围为 3~30GHz）频带的电磁传播蜕化现象的一个理论。当前，最通常的无线信道模型已经扩展到 800MHz~2.5GHz 频带上。例如，ITU-R<sup>[13]</sup>单输入单输出（SISO）信道模型以及 IEEE 802<sup>[10-11,20,23]</sup>、3GPP/3GPP2<sup>[26,41-43]</sup>、I-METRA<sup>[34,36-38]</sup>、SCM<sup>[27-28]</sup>和 Winner<sup>[12,44-45]</sup>这些协议建议组织或论坛所提议的能够提供分集增益、实现高速无线通信的多输入多输出（MIMO）信道模型基本上都在 UHF 及 SHF 频带范围。

衰落现象可大致分为两类：大尺度衰落和小尺度衰落。当移动终端相距发射台历经长距离移动，如相当于蜂窝尺寸的距离，信号将发生大尺度衰落<sup>[2-3]</sup>。大尺度衰落是指信号的传输路径损失是传输距离和传输距离间大型物体的“阴影”的函数。阴影是指传输距离间的建筑物、干涉地形地势和地面植被对传输信号的影响；阴影是在一个确定区域内由发射机与接收机之间传输媒质的路径损失引起的信号慢衰落过程。换句话说，大尺度衰落由平均传输路径损失和阴影确定。小尺度衰落是移动终端在较短距离内的运动而信号的幅度由于多路径传播的建设性加强或破坏性干扰引起的快速变化。小尺度衰落（由频率选择性或频率平坦性）刻画的是由于多径传播引起的信道频率选择性变化；快衰落和慢衰落（由于多普勒扩展）刻画的是信道在相对短时间内由于移动终端的运动而产生的时变特性。

大尺度衰落和小尺度衰落的关系如图 1.4 所示。在图 1.4 中有大尺度衰落和小尺度衰落以及阴影衰落。大尺度衰落刻画的是由平均路径衰落随距离增加的变化，同时阴影衰落随平均路径衰落而变化。

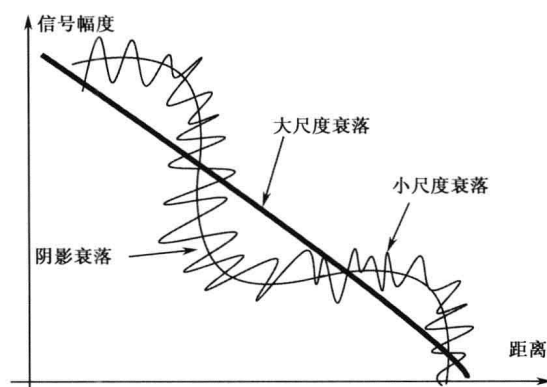


图 1.4 大尺度衰落与小尺度衰落对比说明

由于传输路径间障碍物的阴影，在相同传输距离接收信号的强度可能是不相同的。散射分量导致信号小尺度衰落，同时使经历阴影衰落的信号也发生短的时变。

链路预算是无线通信系统设计的一个重要工具。若能说明从发送端到接收端的无线链

路的所有增益和损失，将能使我们预知接收信号强度所需发送功率的边际。传输路径损失和衰落是链路预算需考虑的两个重要因素。

平均路径损失是一个可由发送端和接收端间距预估的决定性因素。而阴影和小尺度衰落是随机现象，仅能预估它们的概率分布，如阴影衰落服从对数正态分布。

由于衰落的随机特性，信号功率的边际必须确保接收信号的强度在期望值内，即我们所确定的功率边际一定要保证接收信号的功率在给定的设计目标速率（如 98%~99%）门限阈值范围内。一般大尺度和小尺度的边际的设定必须保证中断概率在 1%~2% 范围内，这就是说接收信号的功率低于设计目标设定值的概率为 0.02 或者更小<sup>[3-4]</sup>。在这个分析中，关键是刻画阴影以及路径衰落的概率特性。下面给出一些有关链路预算必须理解的大尺度和小尺度衰落信道模型。

## 1.2.1 大尺度衰落

### 1. 一般路径衰落模型

自由空间传播模型是用于预测在有直达波环境下接收信号的强度——发射机和接收机之间无障碍物情形下的信道模型。它常被用于卫星通信系统。设  $d$  表示发射机和接收机间距；采用一个传输增益为  $G_T$ 、接收增益为  $G_R$  的各向异性阵列天线，在距离  $d$  处接收信号功率为  $P_R(d)$ ，由著名的 Friis<sup>[5]</sup> 方程它可以表示为

$$P_R(d) = \frac{P_T G_T G_R \lambda^2}{(4\pi)^2 d^2 L} \quad (1.1)$$

式中， $P_T$  是发送信号功率 (W)； $\lambda$  是信号波长 (m)； $L$  是与传输环境无关的系统损失因子。系统损失因子表示由整个系统的硬件引起信号功率的蜕化或损失，包括系统传输线路、滤波器、天线阵元等。通常  $L > 1$ 。如果假设无系统硬件损失，则  $L = 1$ 。

由式 (1.1)，接收信号功率随距离  $d$  呈指数变化。设  $PL_F(d)$  表示自由路径损失，若无系统硬件损失 ( $L = 1$ )，由式 (1.1)， $PL_F(d)$  可以表示为

$$PL_F(d)[\text{dB}] = 10 \log \left( \frac{P_T}{P_R} \right) = -10 \log \left( \frac{G_T G_R \lambda^2}{(4\pi)^2 d^2} \right) \quad (1.2)$$

若进一步无天线增益（即  $G_T = G_R = 1$ ），由式 (1.2) 可得

$$PL_F(d)[\text{dB}] = 10 \log \left( \frac{P_T}{P_R} \right) = 20 \log \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right) \quad (1.3)$$

图 1.5 所示为当载波频率为  $f_c = 1500\text{MHz}$  时随着传输距离的变化，对不同天线增益自由空间的传输损失曲线。很明显，当天线增益减少时路径损失增加。

如在前面所述的自由空间模型，在所有实际传输环境中，接收信号平均功率随发送机与接收机间距  $d$  以对数形式减小。事实上，可以依据传输环境利用路径损失参量  $n$  修正自由空间模型得到更一般的对数距离路径损失模型。在该模型中路径损失随传输距离  $d$  的变化形式为

$$PL_F(d)[\text{dB}] = PL_F(d_0) + 10n \log\left(\frac{d}{d_0}\right) \quad (1.4)$$

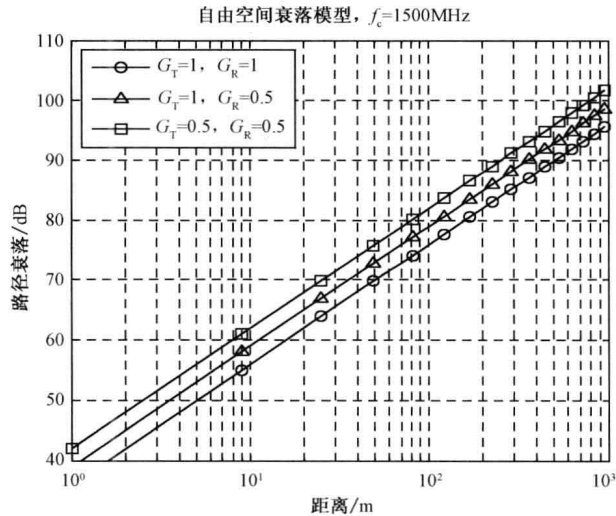


图 1.5 自由空间传输路径损失

式中， $d_0$  是一个参考距离，在此距离或其附近路径损失有着式 (1.2) 所示的自由空间的损失特征。如表 1.3 所示，路径损失分量依据传输环境可能从 2 到 6 变化。 $n=2$  对应于自由空间。当传输路径间的障碍物增加时  $n$  相应增大。同时参考距离  $d_0$  必须针对不同的传输环境适时地改变。例如，对于一个有较大覆盖范围的蜂窝系统（如覆盖半径为 10km 的蜂窝系统）， $d_0$  的标准是 1km。但对于一个蜂窝半径为 1km 的宏蜂窝系统或对于一个具有非常小蜂窝半径的微蜂窝系统， $d_0$  的取值或许是 100m 或 1m<sup>[6]</sup>。

表 1.3 不同传输环境路径损失参量  $n$  的取值<sup>[3]</sup>

环 境	路径损失参量 ( $n$ )
自由空间	2
城区无线蜂窝	2.7~3.5
城区阴影无线蜂窝	3~5
直达波	1.6~1.8
建筑完全遮挡	4~6
建筑部分遮挡	2~3

图 1.6 所示是当载波频率  $f_c = 1500\text{MHz}$  时式 (1.4) 所示的对数距离路径损失。很明显，即使收、发机间的距离不变，其路径损失也随路径损失参量  $n$  而增加。这说明相同半径覆盖区域内传输环境是不同的且不断变化的。然而，上面所述的路径损失模型均没有考虑这个特殊情形。

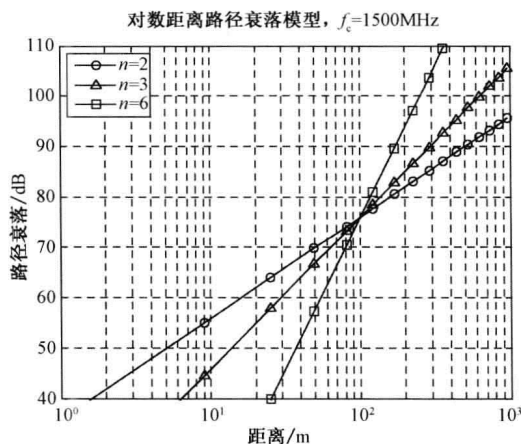


图 1.6 对数距离传输路径损失

对数正态阴影模型是一个更为接近实际传输环境的模型。设  $X_\sigma$  是一个具有零均值方差为  $\sigma$  服从正态分布的随机变量，对数正态阴影模型可表示为

$$PL(d)[\text{dB}] = \overline{PL}(d_0) + X_\sigma = PL_T(d_0) + 10n \log\left(\frac{d}{d_0}\right) + X_\sigma \quad (1.5)$$

换句话说，这个特殊模型的内涵在于相同距离  $d$  处的接收机可能有不同的路径损失，其差异由随机阴影因子  $X_\sigma$  表征。图 1.7 所示是对数正态阴影模型当载波频率  $f_c = 1500\text{MHz}$  正态方差  $\sigma = 3\text{dB}$  以及路径损失因子  $n = 2$  时的路径损失曲线随距离的变化，它演绎了阴影的随机性关于对数距离路径损失模型确定性的影响机理。

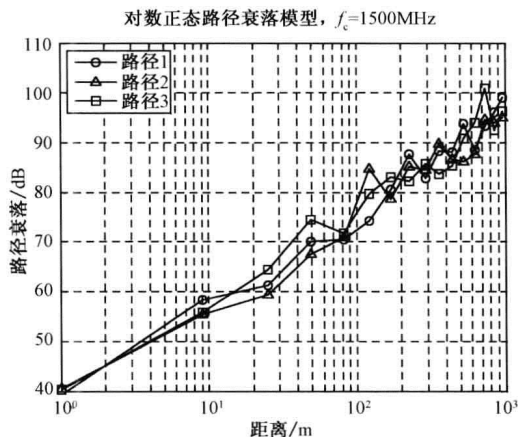


图 1.7 对数正态阴影传输路径损失

参考点  $d_0$  的选择必须满足远场条件，即  $d_0 \geq d_f$ ，其中  $d_f$  是所谓的 Fraunhofer 圆半径，定义为  $d_f = 2D^2 / \lambda$ （参数  $D$  为天线的最大尺寸，如线阵的长度； $\lambda$  为信号波长）；但  $d_0$  应小于移动终端实际使用的距离。 $P_R(d_0)$  由式 (1.1) 确定，而对于  $d > d_0$  点的接收信号功率由下式决定

$$P_R(d) = P_R(d_0) \left( \frac{d_0}{d} \right)^2, \quad d \geq d_0 \geq d_f \quad (1.6)$$

由于移动蜂窝通信系统覆盖范围为数平方千米，接收信号功率  $P_R(d)$  的幅度有很大的动态范围，所以其单位量纲为 dBm 或 dBW。dBm 是指功率以毫瓦为量纲，dBW 是指功率以瓦为量纲。例如

$$P_R(d) \text{ dBm} = 10 \log \left[ \frac{P_R(d_0)}{0.001 \text{ W}} \right] + 20 \log \left( \frac{d_0}{d} \right), \quad d \geq d_0 \geq d_f \quad (1.7)$$

式中， $P_R(d_0)$  以瓦为量纲。在系统工作频段为 1~2 GHz 时，室内环境参考值  $d_0$  大约为 1 m，室外环境  $d_0$  的参考值大约为 100 m 或 1000 m，这将使得式 (1.6) 或式 (1.7) 以 dB 为量纲很容易计算。

**例 1.1** <sup>[16]</sup> 求最大物理尺寸为 2 m，工作频率为 900 MHz 天线的远场距离。

**解：** 给定天线最大物理尺寸  $D = 2 \text{ m}$ ，工作频率  $f_c = 900 \text{ MHz}$ ，工作波长为

$$\lambda = c / f_c = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{900 \times 10^6 \text{ Hz}} = 0.33 \text{ m}$$

由远场距离或 Fraunhofer 区域半径  $d_f$  的定义，有

$$d_f = \frac{2D^2}{\lambda} = \frac{2 \times 2^2}{0.33} = 24.24 \text{ m}$$

**例 1.2** <sup>[16]</sup> 设发射天线产生 50 W 的功率，工作频率为 900 MHz，将发送功率用如下量纲表示：(1) dBm；(2) dBW。若将 50 W 应用于单位增益天线，求距离发射天线 100 m 以量纲 dBm 表示的接收功率；设接收天线增益等于 2 且无系统损耗，求  $P_R(10 \text{ km})$ 。

**解：** 给定  $P_T = 50 \text{ W}$ ，载波频率  $f_c = 900 \text{ MHz}$ ，由式 (1.7)，

(1) 发送功率

$$P_T \text{ (dBm)} = 10 \log [P_T \text{ (mW)} / (1 \text{ mW})] = 10 \log (50 \times 10^3) = 47 \text{ dBm}$$

(2) 发送功率

$$P_T \text{ (dBW)} = 10 \log [P_T \text{ (W)} / (1 \text{ W})] = 10 \log 50 = 17 \text{ dBW}$$

利用式 (1.1) 可得

$$P_R = \frac{P_T G_T G_R \lambda^2}{(4\pi)^2 d^2 L} = \frac{50 \times 1 \times 2 \times 0.33^2}{(4\pi)^2 \times 100^2 \times 1} = 6.9 \times 10^{-3} \text{ mW}$$

$$P_R \text{ (dBm)} = 10 \log P_R \text{ (mW)} = 10 \log (6.9 \times 10^{-3} \text{ mW}) = -21.6 \text{ dBm}$$

假设近距离参考点  $d_0 = 100 \text{ m}$ ，用量纲 dBm 表示在 10 km 处的接收功率，由式 (1.7) 得

$$P_R(10 \text{ km}) = P_R(100) + 20 \log \frac{100}{10000} = -61.6 \text{ dBm}$$

## 2. Okumura/Hata 模型

Okumura/Hata 模型也被称为 cost-231 模型，它是通过大量实验获得的有关移动通信系统的天线高度与覆盖范围关系的模型<sup>[7-8]</sup>，是一个在城市区域预测路径损失的最常用模型。它适用的系统频带范围为 500~1500 MHz，蜂窝半径约为 1~100 km，天线高度为 30~1000 m，Okumura 路径损失模型随距离  $d$  的变化关系为

$$PL_{Ok}(d)[dB] = PL_F + A_{MU}(f, d) - G_R - G_T + G_{Area}$$

式中,  $A_{MU}(f, d)$  为关于频率  $f$  媒质衰减因子;  $G_R$  和  $G_T$  分别是接收与发射天线增益;  $G_{Area}$  是特定传输环境的增益。天线增益  $G_R$  和  $G_T$  仅是天线高度的函数而没有考虑天线方向图等其他因素。因子  $A_{MU}(f, d)$  和  $G_{Area}$  可以由实际测量中获得的经验数据确定<sup>[7-8]</sup>。

Okumura/Hata 模型已经被推广到各种各样的传输环境, 包括城区、郊区和开阔区域。如对于发射天线高度  $h_T$  (m), 载波频率  $f_c$  (MHz), 接收距离  $d$  (m), 推广的路径损失模型为

$$PL_{Hata,U}(d)[dB] = 69.55 + 26.16 \log f_c - 13.82 \log h_T - C_R + (44.9 - 6.55 \log h_T) \log d$$

式中,  $C_R$  为依赖于覆盖范围的接收天线阵元的相关系数。对于小到中型尺寸覆盖对应的的相关系数  $C_R$  可以表示为

$$C_R = 0.8 + (1.1 \log f_c - 0.7) h_R - 1.56 \log f_c$$

式中,  $h_R$  为接收天线高度 (m)。对于大尺寸覆盖对应的的相关系数  $C_R$  取决于载波频率, 即

$$C_R = \begin{cases} 8.29[\log(1.54h_R)]^2 - 1.1, & 150\text{MHz} \leq f_c \leq 200\text{MHz} \\ 3.2[\log(11.75h_R)]^2 - 4.97, & 200\text{MHz} \leq f_c \leq 1500\text{MHz} \end{cases}$$

对于郊区和开阔区域, 路径损失与接收距离  $d$  的关系分别为

$$PL_{Hata,SU}(d)[dB] = PL_{Hata,U}(d)[dB] - 2[\log(f_c/28)]^2 - 5.4$$

和

$$PL_{Hata,O}(d)[dB] = PL_{Hata,U}(d)[dB] - 4.78[\log(f_c)]^2 + 18.33 \log f_c - 40.97$$

图 1.8 所示为 Okumura/Hata 模型的路径损失分别在城区、郊区和开阔区域的表现。显然城区的路径损失要大于郊区和开阔区域的路径损失, 这说明传输路径间的密集障碍物对信号传输是不利的。

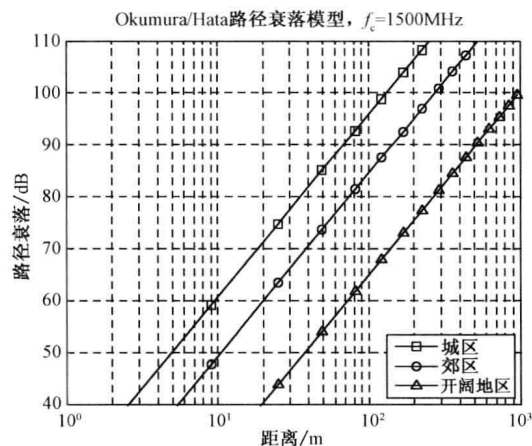


图 1.8 Okumura/Hata 模型路径损失曲线

### 3. IEEE 802.16d 模型

IEEE 802.16d 是基于对数正态阴影路径损失的模型。根据郊区宏蜂窝收发机之间的障碍物密度一共有三种不同类型, 它们分别是 A、B 和 C。表 1.4 所示是对这三种不同类型的特性描述<sup>[9-12]</sup>。



表 1.4 IEEE 802.16d 路径损失模型的分类描述

类型	分类描述
A	郊区宏蜂窝，屋顶至地面丘陵地形，具有中度树木密度
B	郊区宏蜂窝，屋顶至地面中度路径损失环境
C	郊区宏蜂窝，屋顶至地面地势平坦，具有轻度树木密度

IEEE 802.16d 路径损失模型公式为

$$PL_{802.16}(d)[\text{dB}] = PL_F(d)[\text{dB}] + 10\gamma \log\left(\frac{d}{d_0}\right) + C_f + C_R \quad (d > d_0) \quad (1.8)$$

式中， $d_0=100\text{m}$ ，参数  $\gamma = a - bh_T + c/h_T$ ，其中系数  $a$ 、 $b$  和  $c$  是表 1.5 所给随信道类型变化的常数， $h_T$  为发射天线的高度（10~80m）； $C_f$  是对应于载波频率  $f_c$ （MHz）的相关系数，其表达式为

$$C_f = 6\log_{10}(f_c/2000)$$

而  $C_R$  是接收天线阵元的相关系数，其表达式为

$$C_R = \begin{cases} -10.8\log_{10}(h_R/2) & \text{对类型 A 和 B} \\ -20.0\log_{10}(h_R/2) & \text{对类型 C} \end{cases} \quad (1.9)$$

或

$$C_R = \begin{cases} -10.0\log_{10}(h_R/3), & h_R \leq 3\text{m} \\ -20.0\log_{10}(h_R/3), & h_R > 3\text{m} \end{cases} \quad (1.10)$$

相关系数方程（1.9）是基于 AT&T 的测量结果，方程（1.10）是基于 Okumura 的测量结果。

表 1.5 信道 IEEE 802.16d 模型的类型 A、B 和 C 的参数

参 数	类型 A	类型 B	类型 C
$a$	4.6	4	3.6
$b$	0.0075	0.0065	0.005
$c$	12.6	17.1	20

图 1.9 所示是 IEEE 802.16d 路径损失模型当载波频率为 2000MHz，发射天线高度固定为 30m，接收机天线分别为 2m 和 10m，路径损失随接收距离变化的情形。从中可以看出，当接收机天线高度从 2m 变化到 10m，在接收距离 100m 处，路径损失曲线有一个间断点，导致路径损失与预测的不一致。即使在没有阴影的情形下，路径损失在 99~101m 有 8dB 的跳跃。这揭示了必须定义一个新的参考距离  $\eta_0$  来修正所述的模型<sup>[10]</sup>。

将路径损失方程（1.8）代入到自由空间损失方程（1.3）中得参考距离  $\eta_0$  的关系式为

$$20\log_{10}\left(\frac{4\pi\eta_0}{\lambda}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{4\pi d_0}{\lambda}\right) + 10\gamma \log_{10}\left(\frac{\eta_0}{d_0}\right) + C_f + C_R \quad (1.11)$$

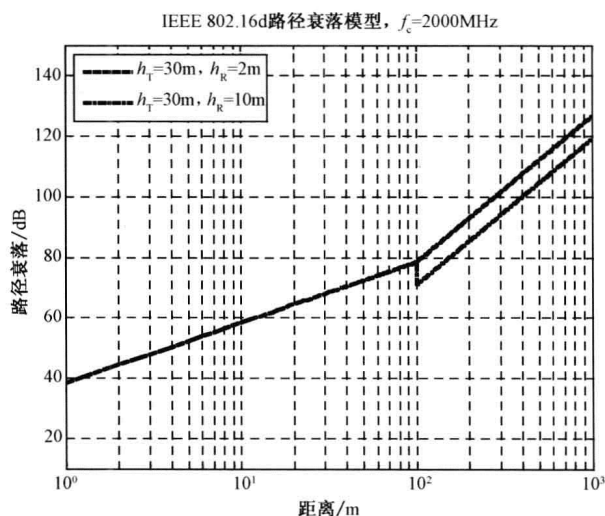


图 1.9 IEEE 802.16d 路径损失曲线

解参数  $\eta_0$  的方程 (1.11), 得

$$\eta_0 = d_0 10^{\frac{C_f + C_R}{10\gamma}} \quad (1.12)$$

将关系式 (1.12) 代入方程 (1.8), 修正的 IEEE 802.16d 模型为

$$PL_{802.16}(d)[\text{dB}] = \begin{cases} 20 \log_{10} \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right) & d \leq \eta_0 \\ 20 \log_{10} \left( \frac{4\pi \eta_0}{\lambda} \right) + 10\gamma \log \left( \frac{d}{d_0} \right) + C_f + C_R & d > \eta_0 \end{cases}$$

图 1.10 所示为修正的 IEEE 802.16d 模型的路径损失曲线, 显然图 1.10 中的间断点再没有出现。

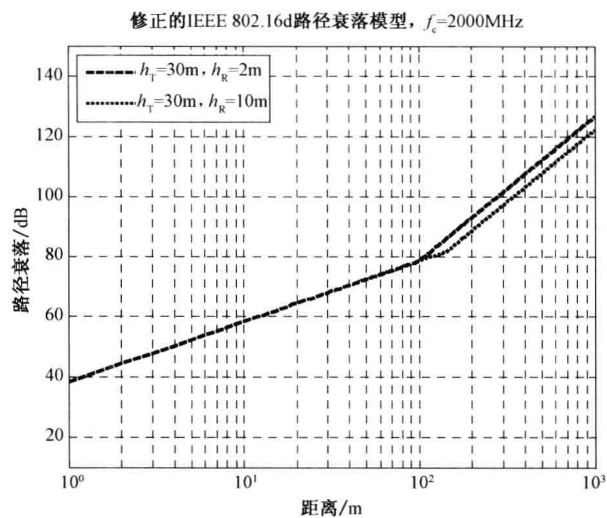


图 1.10 修正的 IEEE 802.16d 模型的路径损失曲线

## 1.2.2 小尺度衰落

除非与大尺度衰落相混淆，小尺度衰落<sup>[3,17]</sup>常简称为衰落。衰落是指在较短时间内、用户终端短距离移动情形下接收信号幅度发生剧烈变化的现象。它表征信号多径传输的影响，多径信号叠加到接收端时各路径信号的相位是不同的，这种差异会产生相干相加或抵消相加——加强或干扰。换句话说，接收信号幅度变化依赖于本区域散射体反射的各个信号的相对相位。更进一步，每一个路径的信号可能历经的变化依赖于终端以及周围物体的移动速度。总而言之，小尺度衰落是由多路径传输、终端及周围物体的移动速度、信号的传输带宽等因素决定的。

### 1. 描述小尺度衰落的参数

多径衰落信道常用功率延迟分布（Power Delay Profile, PDP）来刻画。表 1.6 所示为 ITU-R 行人信道模型的功率延迟分布参数，其中所列为 4 路径信号的相对延迟和平均功率。此处的相对延迟是相对于参考时间的过量延迟，而平均功率是对每一路径信号关于第一路径（延迟线）功率的归一化<sup>[13]</sup>。

表 1.6 ITU-R 行人信道模型的功率延迟分布参数

路径信号	相对延迟/ns	平均功率/dB
1	0	0.0
2	110	-9.7
3	190	-19.2
4	410	-22.8

#### 1) 平均过量延迟和均方根延迟扩展

平均过量延迟和均方根延迟扩展是能够对不同多路径衰减信道进行比较的非常有用的信道参数，是设计一个无线信道的一般准则。设  $\tau_k$  表示第  $k$  条路径的延迟时间， $a_k$  和  $P(\tau_k)$  分别表示对应的幅度和功率，则平均过量延迟  $\bar{\tau}$  定义为功率延迟分布的一阶矩

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_k a_k^2 \tau_k}{\sum_k a_k^2} = \frac{\sum_k \tau_k P(\tau_k)}{\sum_k P(\tau_k)}$$

而均方根延迟扩展  $\sigma_\tau$  定义为功率延迟分布二阶中心矩的均方根

$$\sigma_\tau = \sqrt{\tau^2 - (\bar{\tau})^2}$$

式中

$$\tau^2 = \frac{\sum_k a_k^2 \tau_k^2}{\sum_k a_k^2} = \frac{\sum_k \tau_k^2 P(\tau_k)}{\sum_k P(\tau_k)}$$

通常相干带宽表示为  $B_c$ ，它约等于均方根延迟扩展  $\sigma_\tau$  的倒数，即

$$B_c \approx \frac{1}{\sigma_\tau} \quad (1.13)$$

式 (1.13) 中的关系由于相干带宽的定义而可能变化。例如, 当相干带宽定义为相关性大于或等于 0.9 的带宽时 (如图 1.11 所示), 相干带宽  $B_c$  与均方根延迟扩展  $\sigma_\tau$  的关系为  $B_c \approx 1/(50\sigma_\tau)$ 。当相干带宽定义为相关性大于或等于 0.5 时的带宽时, 相干带宽  $B_c$  与均方根延迟扩展  $\sigma_\tau$  的关系为  $B_c \approx 1/(5\sigma_\tau)$ 。

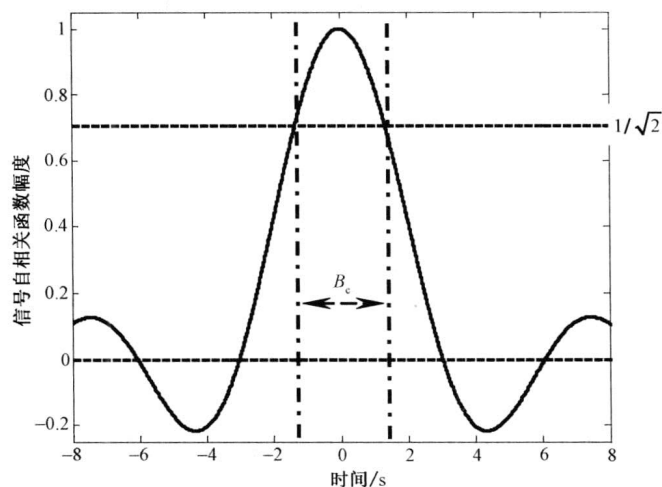


图 1.11 对信号相干时间或相干带宽的一个解释图

图 1.11 所示为相干时间或相干带宽的一个几何解释, 即说明相干时间或相干带宽的取值与预设信号相关的阈值有直接关系。

图 1.12 给出的是对平均过量延迟、均方根过量延迟扩展、最大过量延迟等概念的一个图示性解释<sup>[16]</sup>。从图中可以看出这些概念的基本含义以及它们之间的关系, 也有助于我们比较深入地辨析、理解它们。

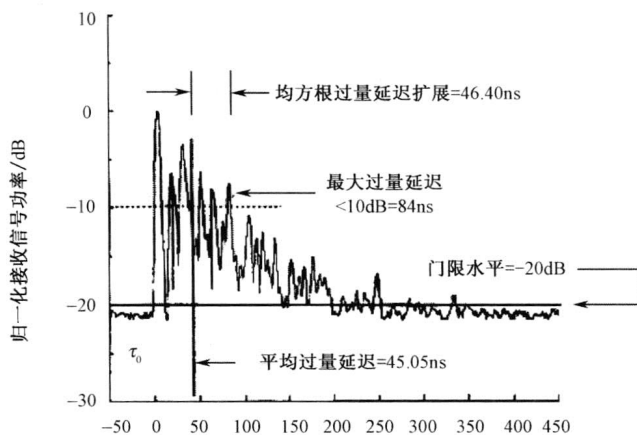


图 1.12 一个室内功率延迟分布图例

## 2) 时间弥散与频率弥散衰落

当终端处于运动状态时，对应接收信号的具体衰落类型不但取决于传输方式而且也与信道特性有关。传输方式是指信号参数，如信号带宽、符号周期等。同时，无线信道能被两个属性不同的参数刻画，它们分别是多径延迟扩展与多普勒扩展，它们均能引起信号时散和频散。根据信号时散与频散的程度，分别称为信号发生频率选择性衰落（时散）或时间选择性衰落（频散）。

### 3) 由时间弥散引起的衰落：频率选择性信道

由于时散，传输信号可能在频域发生选择性或非选择性衰落，分别称为频率选择性衰落和频率非选择性（频域平坦）衰落。对于给定的信道频率响应，频率选择常由信号带宽决定，如图 1.13 所示<sup>[3]</sup>，它直观地解释了信道特性在频域内如何受信号带宽的影响。由于多径引起的时散，信道响应随频率变化。当信号带宽足够窄，以至于它经过平坦响应信道传输，这样传输信号服从频率非选择性衰落。与之相反，当信号带宽足够宽，以至于它可能被有限信道带宽滤波掉，这样传输信号服从频率选择性衰落。如图 1.13 (a) 所示，接收信号历经频率非选择性（频域平坦）衰落。当且仅当无线信道的带宽大于信号带宽，同时在通带内保持常数幅度和线性相位响应。信号带宽历经常数幅度导致平坦衰落，或称为频率非选择性衰落。此处较窄的带宽意味着符号周期  $T_s$  大于多径信道  $h(t, \tau)$  延迟扩展  $\tau$ 。只要  $T_s$  大于  $\tau$ ，当前符号就不会怎么影响随后符号周期内的符号。也就是符号间干扰是可忽略的。在平坦衰落信道中信号幅度随时间缓慢变化，由于信号带宽远窄于信道带宽，故称其为窄带信道。综上所述，满足下面条件时信号服从频率非选择性衰落<sup>[3]</sup>：

$$B_s \ll B_c \text{ 且 } T_s \gg \sigma_\tau$$

式中， $B_s$  和  $T_s$  分别为发送信号的带宽和符号周期； $B_c$  和  $\sigma_\tau$  分别表示相干带宽和均方根延迟扩展。

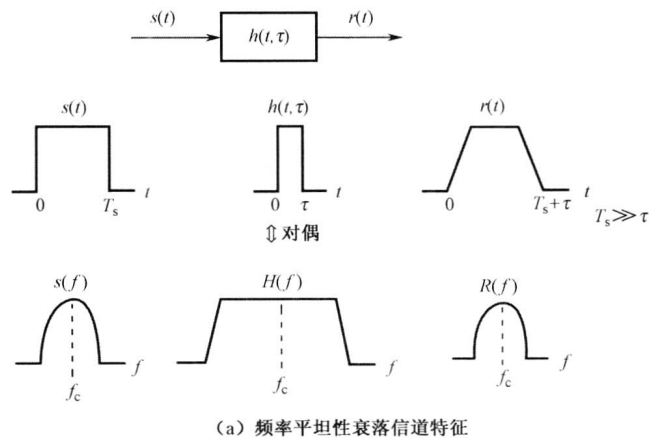
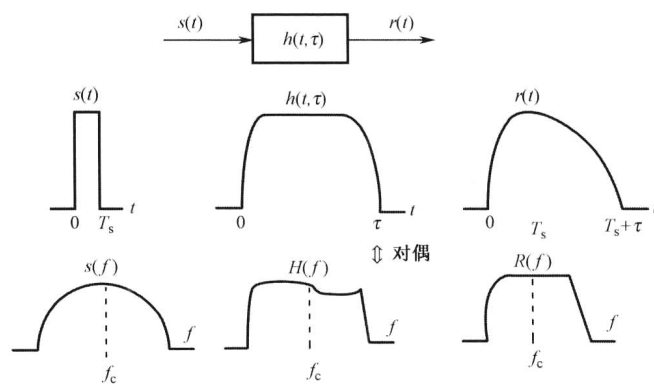


图 1.13 频率（非）选择性衰落信道时频域特征及传输影响示意图



(b) 频率选择性衰落信道特征

图 1.13 频率（非）选择性衰落信道时频域特征及传输影响示意图（续）

正如前面所述，当无线信道有一个常数幅度和线性相位的响应，且其带宽小于信号带宽时，发送信号经历频率选择性衰落。在此情形，信道脉冲响应有一个大于传输符号周期的延迟扩展。由于符号周期小于多径延迟扩展，同一传输符号的多径延迟模板与后续符号互相重叠，产生不可忽视的符号间干扰（Inter-Symbol Interference, ISI），称为频率选择性信道，与频率平坦特性相反，频率响应的幅度随频率变化。如图 1.13 (b) 所示的直观解释，由于信道延迟扩展  $\tau$  远大于符号周期以致所发生的符号间干扰在时域是很明显的。这意味着信号带宽  $B_s$  大于信道相干带宽  $B_c$ ，因此接收信号在频率响应中将有不同的幅度（即历经频率选择性衰落）。在频率选择性衰落信道中，信号带宽大于信道脉冲响应带宽，故称其为宽带信道。总结上面的观察论述，在如下条件满足时传输信号服从频率选择性衰落<sup>[20]</sup>：

$$B_s > B_c \text{ 且 } T_s < \sigma_\tau$$

信号究竟服从哪种衰落还取决于调制方式。例如，当一个信号的采样周期与均方根延迟扩展满足关系  $\sigma_\tau > 0.1T_s$  时，常被归类为频率选择性衰落。

#### 4) 由频率弥散引起的衰落：时间选择性衰落信道

接收信号历经快衰落或慢衰落，取决于多普勒扩展的强度。在一个快衰落信道中，信道相干时间小于符号周期，即信道脉冲响应在一个符号周期内剧烈地变化。信道时域变化与发送端或接收端的相对运动有关，相对运动引起频域扩展，称为多普勒频移。设  $f_m$  为最大多普勒频移， $B_d$  为多普勒谱的带宽，则有  $B_d = 2f_m$ 。设  $T_c$  表示相干时间，它与多普勒扩展成反比，即

$$T_c \approx \frac{1}{f_m} \quad (1.14)$$

因此  $T_s > T_c$  意味着  $B_s < B_d$ 。所以在如下条件满足时发送信号历经快衰落<sup>[20]</sup>：

$$T_s > T_c \text{ 且 } B_s < B_d$$

另外，考虑信道脉冲响应相对于基带传输信号的变化较慢时的情形。假设信道在一个

或若干个符号周期内是不变的，称为静态信道。这意味着多普勒扩展相对于基带传输信号带宽是非常小的。所以当如下条件满足时传输信号历经慢衰落<sup>[3]</sup>：

$$T_s \ll T_c \text{ 和 } B_s \gg B_d$$

当相干时间定义为相关值大于或等于 0.5 的带宽<sup>[3]</sup>时，式 (1.14) 可改写为

$$T_c \approx \frac{9}{16\pi f_m} \quad (1.15)$$

注意到式 (1.15) 是在瑞利衰落信号慢变假设下推得，而式 (1.14) 是在信号快变假设下的结论。相干时间最常用的定义是采用式 (1.14) 和式 (1.15) 的几何平均<sup>[2]</sup>，其表达式为

$$T_c = \sqrt{\frac{9}{16\pi f_m^2}} \approx \frac{0.423}{f_m}$$

关键是无论快衰落或慢衰落都与时散引起的衰落无关。换句话说，无线信道的频率选择性不能够仅仅用快衰落或慢衰落特性来评定，这是因为信道快衰落仅归因于终端移动引起的信道波动。

**例 1.3** <sup>[16]</sup>计算平均过量延迟，延迟扩展的均方根，最大过量延迟 (10dB)；其中功率延迟分布  $P(\tau)$  如图 1.14 所示，估计信道的相干带宽  $B_c$ 。

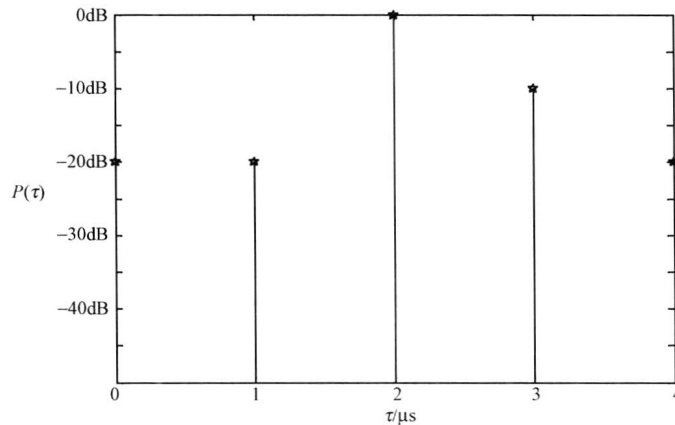


图 1.14 例 1.3 的多径分布图

**解：**利用最大过量延迟的定义 (10dB)，可得  $\tau_{10\text{dB}} = 3\mu\text{s}$ 。所以平均过量延迟为

$$\bar{\tau} = \frac{0.01 \times 0 + 0.01 \times 1 + 1 \times 2 + 0.1 \times 3 + 0.01 \times 4}{0.01 + 0.01 + 1 + 0.1 + 0.01} = \frac{2.35}{1.13} = 2.08\mu\text{s}$$

对于给定的功率延迟分布，其二阶矩为

$$\overline{\tau^2} = \frac{0.01 \times 0^2 + 0.01 \times 1^2 + 1 \times 2^2 + 0.1 \times 3^2 + 0.01 \times 4^2}{0.01 + 0.01 + 1 + 0.1 + 0.01} = \frac{5.07}{1.13} = 4.49\mu\text{s}$$

所以延迟扩展的均方根为

$$\sigma_\tau = \sqrt{4.49 - (2.08)^2} = 0.4\mu\text{s}$$

相干带宽为

$$B_c = \frac{1}{\sigma_\tau} = \frac{1}{0.4\mu\text{s}} = 2.5\text{MHz}$$

因此，当通信系统工作在频带 2.5MHz 内时，它不需要均衡器。

### 5) 角度扩展——空域选择性衰落

角度扩展是用于多输入多输出系统的一个概念，在后面有一节专门讨论多输入多输出信道特性时还将进一步深入分析。在此，仅就其基本含义做一些说明。

角度扩展，在接收端为多径分量到达接收天线的来向角 (Angle of Arrival)；而在发送端为多径分量的离开角 (Angle of Departure)。若用  $\theta$  表示来向角，则角度扩展的分析方法与时延扩展的完全一致，差别仅为用  $\theta$  代替  $\tau$ 。设  $P_A(\theta)$  为  $\theta$  的分布密度函数，称为角度谱，假设它是归一化的，即  $\sum_k P_A(\theta_k) = 1$ ，则角度扩展的均方根为  $\sigma_\theta = \sqrt{\overline{\theta^2} - (\bar{\theta})^2}$ 。而  $\bar{\theta}$ 、 $\overline{\theta^2}$  的计算公式分别为

$$\bar{\theta} = \sum_k \theta_k P_A(\theta_k); \quad \overline{\theta^2} = \sum_k P_A(\theta_k) \theta_k^2$$

类似于相干带宽在延迟扩展中的地位，我们提出相干距离  $D_c$  的概念。角度扩展引起空间选择性衰落，即接收信号的强度依赖于接收天线所在的空间位置。空间选择性衰落由相干距离  $D_c$  刻画，它定义为空域衰落的自相关系数减小到 0.7 时的距离 (此处可以参照图 1.13 对相干时间和相干带宽的解释)。它是反比于角度扩展的，即

$$D_c \propto 1/\theta_{\text{RMS}}$$

$D_c$  的变化范围在基站为 10 ~ 16 个波长，在移动终端为 3 ~ 5 个波长。这是因为基站点于较高的位置，信号达到基站时其方位角是相近的，所以角度扩展较小，即  $\theta_{\text{RMS}}$  较小。

图 1.15 所示是一个典型的角谱函数的形状图。从图中可以看出它是在一个角度范围内有有效响应的，图中大约对应于  $(-5^\circ, +15^\circ)$  内。可以将其理解为多径信号在一个角度范围内到达接收端。以图 1.15 为例可以计算  $\bar{\theta}$ 、 $\overline{\theta^2}$  及  $D_c$ 。

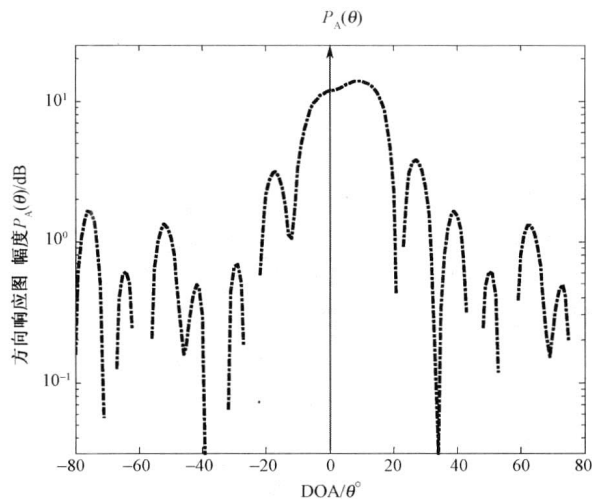


图 1.15 典型的角谱函数  $P_A(\theta)$  的形状图



最后将小尺度衰落的有关概念及关联效应应用图 1.16 表示<sup>[17]</sup>，以便于读者理解和记忆，也是对这些设计信道基本特性的概念的一个总结。关于信道特性较全面论述的文献可以参阅文献[3,18-19]。

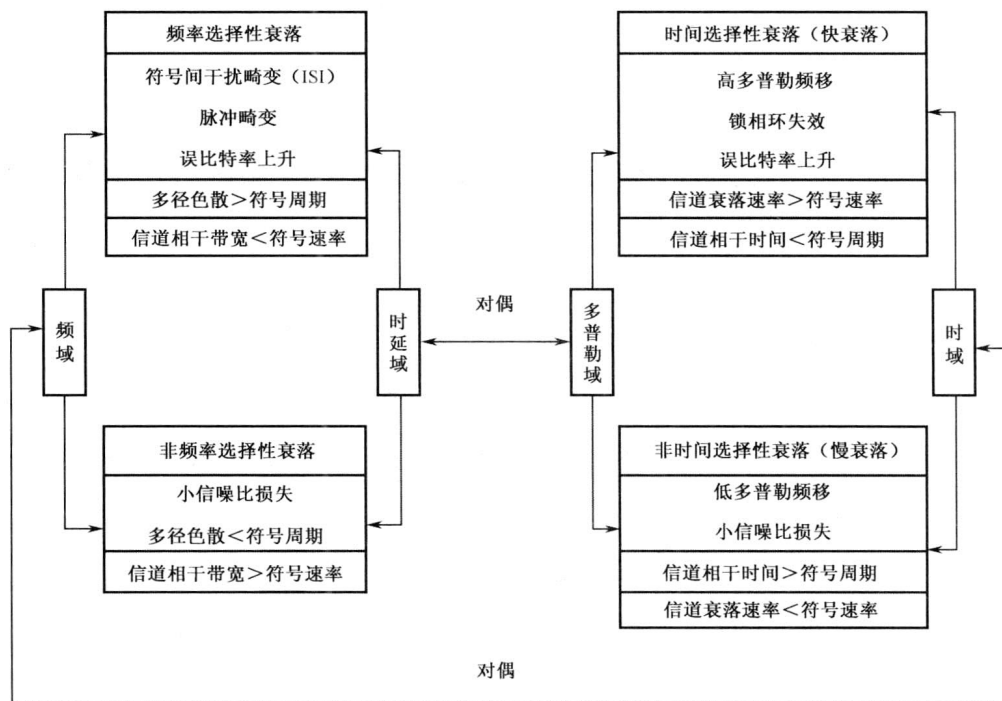


图 1.16 小尺度衰落的机理及效应

## 2. 衰落信道统计特征及生成

### 1) 衰落信道的统计特性

衰落信道的统计模型归功于 Clarke，是他统计性地论述了当接收终端运动经过一散射区域时其接收信号的电磁场变化<sup>[14]</sup>。在 Clarke 的模型中有  $N$  个平面波，在每个平面波具有相同平均功率的假设下它们可来自任意不同方位，具有任意载波相位<sup>[14-15]</sup>。

图 1.17 演示了一平面波以波达角  $\theta$  到达一运动速度  $v$  的终端的情形。图中所有波都是在以  $x-y$  构成的平面上传播的。当终端移动时，所有平面波均历经多普勒频移。设  $x(t)$  为基带传输信号，则相应传送通带信号为

$$s(t) = \text{Re}[x(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

式中，符号  $\text{Re}[\cdot]$  为相应分量取实部； $f_c$  为载波频率。当传输信号经过具有不同多普勒频移的  $I$  个传输路径，则接收信号可以表示为

$$r(t) = \text{Re} \left[ \sum_{i=1}^I \alpha_i e^{j2\pi(f_c + f_i)(t - \tau_i)} s(t - \tau_i) \right] \quad (1.16)$$

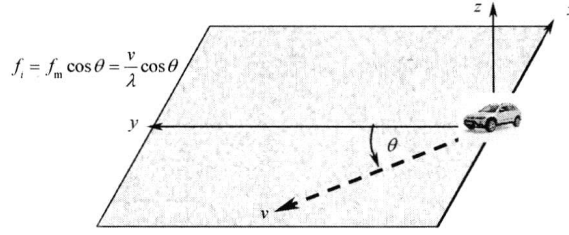


图 1.17 终端以速度  $v$  移动时到达终端的平面波的变化

式中,  $\alpha_i$ 、 $\tau_i$  和  $f_i$  分别表示第  $i$  传输信道的增益、延迟和多普勒频移。对于以速度  $v$  运动的终端和波长为  $\lambda$  的传输信号, 对应多普勒频移为

$$f_i = f_m \cos \theta = \frac{v}{\lambda} \cos \theta$$

式 (1.16) 的接收基带信号可以表示为

$$r(t) = \sum_{i=1}^I \alpha_i e^{-j\varphi_i(t)} s(t - \tau_i) \quad (1.17)$$

式中,  $\varphi_i(t) = -2\pi(f_c + f_i)(t - \tau_i)$ 。依照式 (1.17), 对应信道可以表示为如下的复基带脉冲响应线性时变滤波器:

$$h(t, \tau) = \sum_{i=1}^I \alpha_i e^{-j\varphi_i(t)} \delta(t - \tau_i) \quad (1.18)$$

式中,  $\delta(\cdot)$  是 Dirac delta 函数。只要路径延迟远小于信号采样周期  $T_s$ , 路径延迟  $\tau_i$  可以近似为  $\bar{\tau}$ , 则式 (1.18) 可以表示为

$$h(t, \tau) = h(t) \delta(t - \bar{\tau})$$

式中,  $h(t) = \sum_{i=1}^I \alpha_i e^{-j\varphi_i(t)}$ 。假设  $s(t) = 1$ , 则接收的带通型信号可以表示为

$$r(t) = \text{Re}\{[h_I(t) + jh_Q(t)]e^{j2\pi f_c t}\} = h_I(t) \cos(2\pi f_c t) - h_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

式中,  $h_I(t)$  和  $h_Q(t)$  分别表示  $h(t)$  的同相分量和正交分量, 它们具有表达式:

$$\left. \begin{aligned} h_I(t) &= \sum_{i=1}^I \alpha_i \cos \varphi_i(t) \\ h_Q(t) &= \sum_{i=1}^I \alpha_i \sin \varphi_i(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

假设传输路径数  $I$  足够大, 由中心极限定理式 (1.19) 中的  $h_I(t)$  和  $h_Q(t)$  分别可以逼近一个高斯随机变量。因此, 当信号历经具有散射体很丰富的传输环境时, 接收信号的幅度  $|r(t)| = \sqrt{h_I^2(t) + h_Q^2(t)}$  服从瑞利分布。衰落过程的功率谱密度 (Power Spectrum Density, PSD) 由接收信号  $r(t)$  的自相关函数的傅里叶变换得到<sup>[13]</sup>:

$$S_{rr}(f) = \begin{cases} \frac{\Omega_p}{4\pi f_m} \frac{f_m}{\sqrt{f_m^2 - (f - f_c)^2}} & |f - f_c| \leq f_m \\ 0 & |f - f_c| > f_m \end{cases} \quad (1.20)$$

式中,  $\Omega_p = |r(t)|^2 = \sum_{i=1}^I \alpha_i^2$  实际为总传输路径增益。式 (1.20) 的功率谱密度常被称为“经典多普勒谱”。如果传输信道中有些散射体散射强度远超其余散射体, 衰落过程不再服从瑞利分布。在此情形, 接收信号的幅度  $|r(t)| = \sqrt{h_1^2(t) + h_0^2(t)}$  服从莱斯分布, 相应的衰落过程称为莱斯衰落过程。最强的散射分量通常对应于直达波 (Line-of-Sight, LOS) 分量 (也被称为镜面分量)。除直达波分量外, 其余分量被称为非直达波分量或散射分量。设  $P_{\text{AoA}}(\theta)$  为散射分量波达角的概率密度函数,  $\theta_0$  为直达波信号的波达角, 则关于所有分量的概率密度函数为

$$P(\theta) = \frac{1}{K+1} P_{\text{AoA}}(\theta) + \frac{K}{K+1} \delta(\theta - \theta_0) \quad (1.21)$$

式中,  $K$  为莱斯因子, 定义为直达波分量功率  $D^2$  与散射分量功率  $\sigma^2$  之比, 即

$$K = \frac{D^2}{\sigma^2} \quad (1.22)$$

式 (1.21) 也被称为“经典莱斯密度”。

## 2) 衰落信道的生成

对于任何无线信道的传输环境, 无论室内还是室外, 可能有直达波分量也可能不存在直达波分量。如前面所述, 对于存在直达波分量的环境, 接收信号幅度通常服从莱斯分布, 否则, 接收信号幅度服从瑞利分布。图 1.18 所示是对这两种不同传输环境的物理现象的演绎解释。

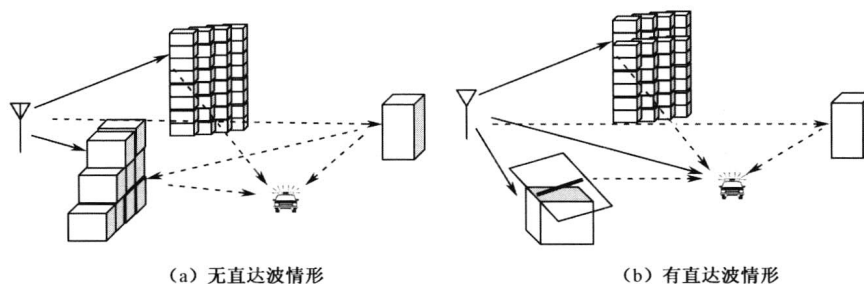


图 1.18 有、无直达波传输环境示意

在典型城市区域, 无线信道中的任何接收信号均可表示为具有无限个散射分量的信号之和的形式, 由中心极限定理, 接收信号可以表示为一个高斯随机变量。换句话说, 服从图 1.18 (a) 衰落环境的无线信道可以表示为一个复高斯随机变量  $\xi + j\eta$  的形式,  $\xi$  和  $\eta$  是独立同分布高斯随机变量, 具有零均值方差为  $\sigma^2/2$ 。所以,  $X = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  服从瑞利分布, 其对应概率密度函数为

$$f_X(t) = \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (t \geq 0) \quad (1.23)$$

$X$  也被称为服从指数为 2 的  $\chi^2$  分布。这样信道参数的生成问题实质为随机变量  $X$  的

生成。首先，我们产生两个独立同分布的标准高斯随机变量  $Z_1$  和  $Z_2$ ，即  $Z_1, Z_2: N(0,1)$ ，令

$$X = (\sigma / \sqrt{2}) \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$$

则  $X$  具有式 (1.23) 的瑞利分布。

在如图 1.18 (b) 所示的有直达波信号的情形中，这时有一个信号特强的传输路径，它不服从诸如反射、散射和衍射任意一种衰落，接收信号可以表示为  $X = \alpha + \xi + j\eta$  的形式。其中， $\alpha$  表示直达波信号分量， $\xi$  和  $\eta$  是独立同分布高斯随机变量，具有零均值方差为  $\sigma^2 / 2$ ，表示非直达波信号分量。这时  $X$  是莱斯随机变量，具有如下的概率密度函数：

$$f_X(t) = \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + \alpha^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\alpha t}{\sigma^2}\right) \quad (1.24)$$

式中， $I_0(\cdot)$  是第一类修正的零阶 Bessel 函数。注意，式 (1.24) 可以表示为式 (1.22) 定义的莱斯  $K$  因子。当不存在直达波分量的情形（对应于  $K=0$ ，即  $\alpha=0$ ），式 (1.24) 蜕化为式 (1.23) 的瑞利分布。当存在直达波分量，即  $K \neq 0$ ，且当  $K$  值增加时，式 (1.24) 趋向于高斯分布密度函数。一般来说，当  $K$  的值约等于  $-40\text{dB}$ ，信道为瑞利型； $K > 15\text{dB}$ ，时，信道为高斯型。图 1.19 所示是瑞利分布与莱斯分布密度曲线对比。从图中结果可见与上面分析是一致的。

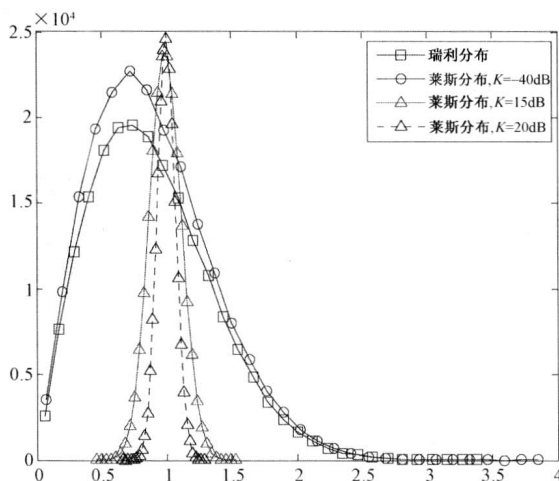


图 1.19 瑞利分布密度及莱斯分布密度函数曲线

### 1.3 单输入单输出信道模型

在上面已经讨论了无线信道的大尺度衰落，包括路径损失和阴影，也介绍了一些基本信道特征，如延迟扩展和相干时间，用以刻画信道的短时衰落性质。为了能够精确地模拟特定区域内的信道特性，我们必须知道任意特定时间内反射信号的功率，以及该区域反射体的特性、位置和运动信息。但在现实中获得这些完整信息是不可能的，我们只能简单地

归结为统计信道模型，此模型代表给定情形下一个典型的或平均的信道条件。这个信道模型能够随着收发天线结构而变（如单个天线或多天线系统）。特别是近年来发展的多输入多输出（MIMO）系统，需要一个完全不同的信道模型来刻画它们的空一时特征（多个收发天线之间不同路径信号的相关性），本小节讨论单输入单输出（SISO）系统——收发天线均为单个天线阵元的信道模型。我们论述两种不同情形——室内、室外单输入单输出（SISO）系统的短时衰落现象。

### 1.3.1 室内信道模型

室内信道对应于建筑内小覆盖区域，如写字楼、大型商场等。因为这样的环境完全被包围在一个墙体内，功率方位谱（Power Azimuth Spectrum, PAS）趋向于均匀分布（散射分量是以全方位、相同功率到达接收天线）。更进一步，由于终端设备局限于室内，因而移动速度较慢，所以信道是静态的。然而即使是室内环境，信道条件也是随时间、地点改变的，也需要功率延迟分布（Power Delay Profile, PDP）参数来表示信道的延迟和对应的平均功率。通常，静态信道是指在给定时间、区域环境内的数据传输过程中，信道的条件是不变的。与之完全对立的是时变信道——即使用户终端是静止的，但是收发机周围的散射体（人或物体）处在不断运动的过程中的环境。在无线数字通信系统中，信号强度的“时变程度”是与“符号周期”有关的。换句话说，若信道时变程度相对于符号周期较小时，信道就可认为是静态的，或称为准静态。下面讨论分析服从静态或准静态的多路径延迟室内信道模型。

#### 1. 一般室内信道模型

我们考虑两个最普遍的室内信道模型：2-传输子路径模型和指数模型。在 2-传输子路径模型中，有两个电磁波到达接收机，其一是具有零延迟的直达信号（即  $\tau_0 = 0$ ）；其二是具有非零延迟的反射信号（即  $\tau_1 > 0$ ），它们具有相同的传输功率，如图 1.20 (a) 所示是它的 PDP。在这个模型中，最大过度延迟  $\tau_{\max} = \tau_1$ ，而平均过度延迟  $\bar{\tau} = \tau_1 / 2$ 。显然均方根延迟等于平均过度延迟（即  $\bar{\tau} = \sigma_{\tau} = \tau_1 / 2$ ）。换句话说，第二条路径参数是唯一刻画这个特定模型的参数。无论如何，这可能是不精确或简单的，因为通常第二条路径的幅度远小于第一条路径的幅度。

在指数模型中，信道平均功率随信道延迟指数律衰减：

$$P(\tau) = \frac{1}{\tau_d} e^{-\tau/\tau_d} \quad (1.25)$$

式中， $\tau_d$  是唯一确定功率延迟分布（PDP）的参数。图 1.20 (b) 解释了指数模型的一个典型功率延迟分布。这个模型被公认为是最恰当比拟室内信道环境的。平均过度延迟  $\bar{\tau}$  和均方根延迟扩展  $\sigma_{\tau}$  是相等的，即  $\bar{\tau} = \tau_d$  以及  $\bar{\tau} = \sigma_{\tau} = \tau_d$ 。而最大过度延迟由下式确定

$$\tau_{\max} = \tau_d \cdot \ln A$$

式中， $A$  是最大过度延迟时刻的信号功率与第一条传输路径信号功率之比，即

$$A = P(\tau_{\max}) / P(0) = \exp(-\tau_{\max} / \tau_d)$$

式 (1.25) 可以表示为如下的以  $T_s$  为采样周期的离散时间模型:

$$P(k) = \frac{1}{\sigma_\tau} e^{-kT_s/\sigma_\tau}, k = 0, 1, \dots, p_{\max} \quad (1.26)$$

式中,  $k$  是离散时间指标;  $p_{\max}$  为最后一条传输路径指标, 即  $p_{\max} = \lceil \tau_{\max} / T_s \rceil$ 。以式 (1.26) 为功率延迟分布的信号总功率为

$$P_{\text{total}} = \sum_{k=0}^{p_{\max}} P(k) = \frac{1}{\sigma_\tau} \frac{1 - e^{-(p_{\max}+1)T_s/\sigma_\tau}}{1 - e^{-T_s/\sigma_\tau}} \quad (1.27)$$

为了归一化方程 (1.27) 总功率, 式 (1.26) 可修正为

$$P(k) = P(0)e^{-kT_s/\sigma_\tau}, k = 0, 1, \dots, p_{\max} \quad (1.28)$$

式中,  $P(0)$  是第一条传输路径的功率, 由式 (1.27) 和式 (1.28) 可得  $P(0) = 1 / (P_{\text{total}} \sigma_\tau)$ 。  $P(k)$  的变化如图 1.20 (b) 所示, 是指数衰减的。

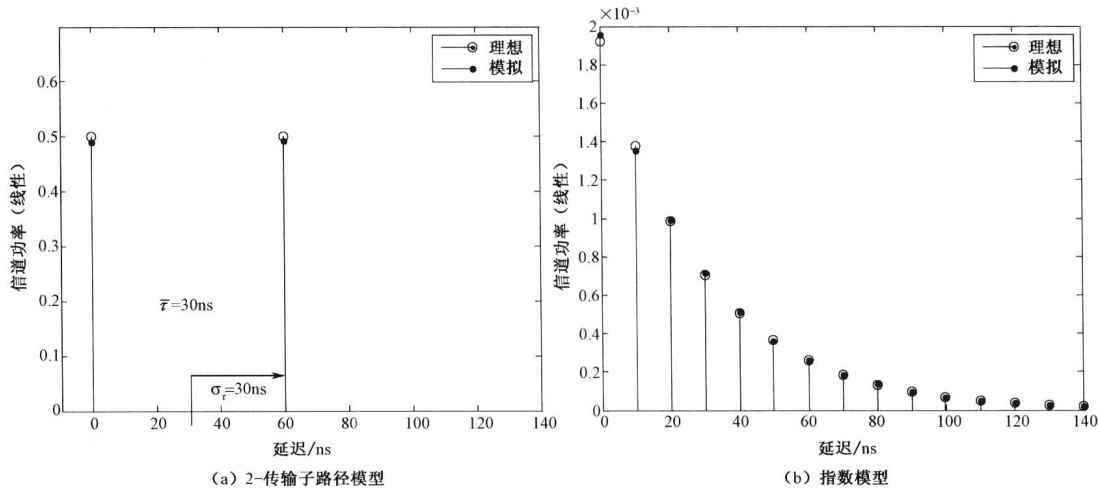


图 1.20 2-传输子路径与指数模型

## 2. IEEE 802.11b 信道模型

IEEE 802.11 工作组已经采纳 2.4GHz 的室内传输信道环境模型为指数模型<sup>[20]</sup>。它的功率延迟分布服从上面的指数模型。其信道脉冲响应可以表示为有限长脉冲响应 (FIR) 滤波器, 此处, 每个信道延迟线为高斯随机变量, 其均值为服从指数功率延迟分布的平均功率; 而每条信道延迟线的时间指标是采样周期的整数积。换句话说, 最大路径数由均方根延迟扩展  $\sigma_\tau$  和采样周期  $T_s$  确定

$$P_{\max} = \lceil 10\sigma_\tau / T_s \rceil$$

设第  $k$  信道延迟线具有均值零、方差  $\sigma_k^2 / 2$ , 其脉冲响应为

$$h_k = z_1 + jz_2, k = 0, 1, \dots, p_{\max}$$

式中,  $z_1$  和  $z_2$  是统计独立的高斯随机变量, 即服从  $\mathcal{N}(0, \sigma_k^2 / 2)$ 。与指数模型的最大过度延迟由最小不可忽略功率的路径计算的定义相左, IEEE 802.11 信道模型的最大过度延迟固定

为 10 倍均方根延迟扩展。在此情形下，每条信道延迟线的功率为

$$\sigma_k^2 = \sigma_0^2 e^{-kT_s/\sigma_\tau}, k = 0, 1, \dots, p_{\max}$$

式中， $\sigma_0^2$  是第一条信道延迟线的功率， $\sigma_0^2$  由接收信号平均功率归一化确定，即

$$\sigma_0^2 = \frac{1 - e^{-T_s/\sigma_\tau}}{1 - e^{-(p_{\max}+1)T_s/\sigma_\tau}}$$

在 IEEE 802.11 信道模型中，采样周期  $T_s$  必须至少小于  $1/4 \mu\text{s}$ 。

图 1.21 所示是 IEEE 802.11 信道模型的信道平均功率和信道频率响应曲线。由于信道的均方根延迟扩展在此例中较小，频域最大功率变化不超过 15dB，这说明该信道的频率选择性不明显。

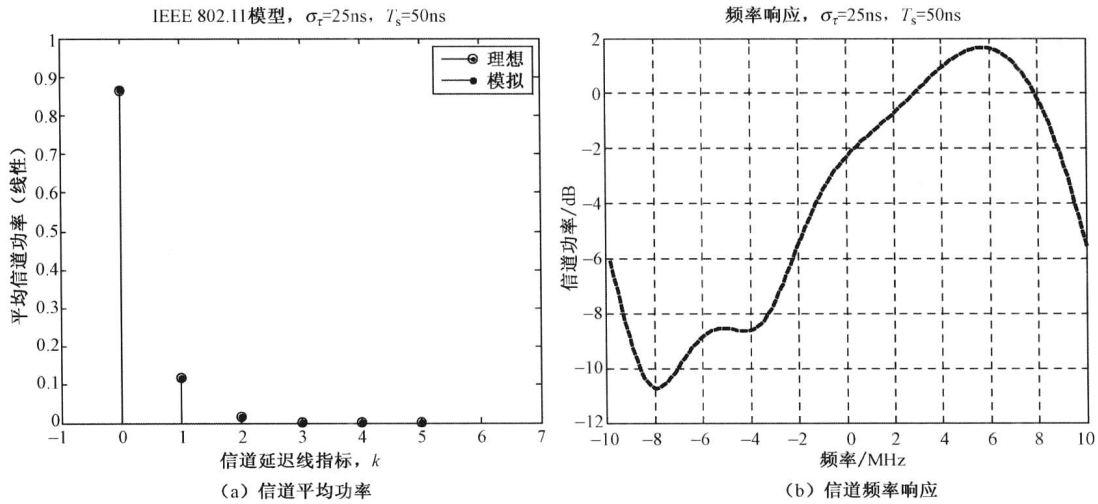


图 1.21 IEEE 802.11 信道模型

### 3. Saleh-Valenzuela (S-V) 信道模型

已经通过大量实测证实，室内多径延迟分量是一个泊松过程。更明确地说 Saleh 和 Valenzuela 通过实际测量，发现室内传输有许多“簇”，每簇内有延迟分布的多个波，称为 S-V 信道模型<sup>[21]</sup>。图 1.22 解释了具有多个“簇”，每簇内有多个延迟波的 S-V 信道。每个簇及簇内的每个传输路径的到达时刻独立同泊松分布。因而，各条路径的延迟间隔是相当任意的而非采样周期的整数积。进一步，记第  $m$  簇中的第一个波的到达时刻为  $T_m$ ，簇的平均到达速率为参数  $\Lambda$  的泊松过程，而簇内传输路径的平均到达速率为参数  $\lambda$  的泊松过程。则可以证明，簇及簇内波的到达时间的分布分别服从如下指数分布：

$$f_T(T_m | T_{m-1}) = \Lambda \exp[-\Lambda(T_m - T_{m-1})], m = 1, 2, \dots \quad (1.29)$$

和

$$f_\tau(\tau_{r,m} | \tau_{r-1,m}) = \lambda \exp[-\lambda(\tau_{r,m} - \tau_{r-1,m})], m = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots \quad (1.30)$$

式中， $\tau_{r,m}$  为第  $m$  个簇中第  $r$  个传输路径的到达时刻。第  $m$  个簇中的第一个波的到达时刻  $\tau_{0,m}$  定义为第  $m$  个簇的到达时刻  $T_m$ （即  $\tau_{0,m} = T_m$ ）。设  $\beta_{r,m}$  和  $\theta_{r,m}$  分别表示第  $m$  个簇中第  $r$

个传输路径的幅度和相位，则信道单位脉冲响应可表示为

$$h(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \beta_{r,m} e^{j\theta_{r,m}} \delta(t - T_m - \tau_{r,m}) \quad (1.31)$$

式中， $\theta_{r,m}$  是均匀分布于  $[0, 2\pi]$  的随机变量； $\beta_{r,m}$  是独立同如下瑞利分布的随机变量

$$f_{\beta}(x) = \frac{x}{2E\{\beta_{r,m}^2\}} e^{-x^2/E\{\beta_{r,m}^2\}} \quad (x \geq 0) \quad (1.32)$$

式中， $E\{\beta_{r,m}^2\}$  是第  $m$  个簇中第  $r$  个传输路径的平均功率，由下式给定，

$$E\{\beta_{r,m}^2\} = E\{\beta_{0,0}^2\} e^{-T_m/\Gamma} e^{-\tau_{r,m}/\gamma} \quad (1.33)$$

式中， $\Gamma$  和  $\gamma$  分别表示簇和传输路径的指数衰减的时间常数。而  $E\{\beta_{0,0}^2\}$  为第 1 个簇中第 1 个传输路径的平均功率。如图 1.22 所示，在式 (1.33) 中，S-V 信道是一个双指数模型，其簇的平均功率以指数形式  $e^{-T_m/\Gamma}$  衰减，同时簇内每条传输路径的平均功率以指数形式  $e^{-\tau_{r,m}/\gamma}$  衰减。一旦给定第 1 个簇中第 1 个传输路径的平均功率  $E\{\beta_{0,0}^2\}$ ，则其余传输路径的平均功率由式 (1.33) 确定。进而可以由式 (1.32) 确定服从瑞利分布的信道系数。不失一般性，将第 1 个簇中第 1 个传输路径的平均功率设定为 1。在式 (1.32) 中，即使在信道脉冲响应中有无数个簇或传输路径，在实际中仅有有限个是不可忽略的。因此可以限定簇和传输路径的个数分别为  $M$  和  $R$ ，同时在式 (1.31) 中引入一个服从对数正态分布的随机变量  $X$ ，即  $20 \log_{10}(X) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2)$ ，来反映长期衰落的影响，即得

$$h(t) = X \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \beta_{r,m} e^{j\theta_{r,m}} \delta(t - T_m - \tau_{r,m}) \quad (1.34)$$

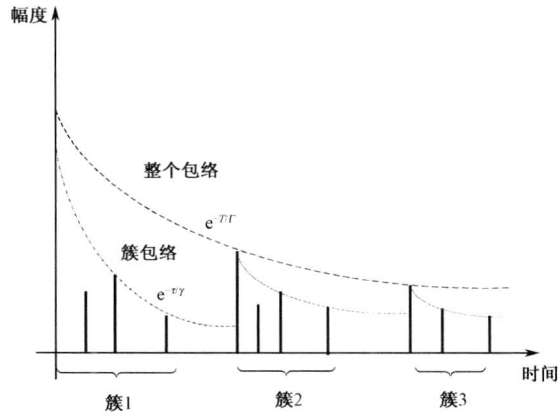


图 1.22 对 S-V 信道模型一个解释说明

图 1.23 设定参数  $A = 0.0233$ 、 $\lambda = 0.0233$ 、 $\Gamma = 7.4$ 、 $\gamma = 4.3$  和  $\sigma_x = 3 \text{ dB}$  以生成 S-V 信道模型。图 1.23 (a) 和 (b) 所示分别为簇和波的到达时间的分布曲线（包括理论与模拟两条曲线吻合得非常好）。其中，第  $m$  个簇到达时间为  $T_m$ ，第  $m$  个簇中的第  $r$  个波到达时间为  $\tau_{r,m}$ ，它们分别由式 (1.29) 和式 (1.30) 的指数律生成。图 1.23 (c) 所示是 S-V 信道的脉冲响应幅度。图 1.23 (d) 所示是由 1000 次模拟试验得到的 S-V 信道的功率分布曲线，可以看出它服从对数正态分布。



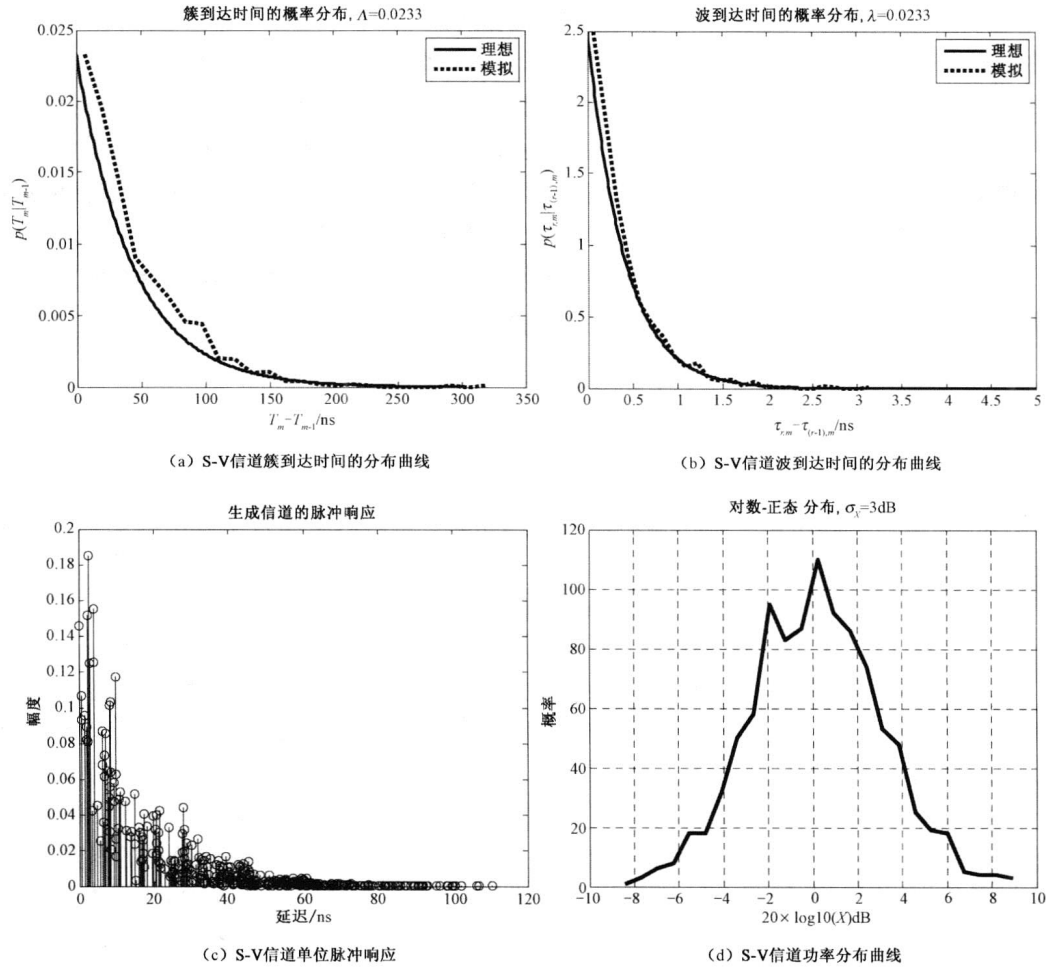


图 1.23 S-V 信道模型一个演示

#### 4. 超宽带 (UWB) 信道模型

依据对室内宽带信道的测量,发现其多径衰落的幅度服从对数正态或 Nakagami 分布<sup>[22]</sup>, 而不再服从常见的瑞利分布, 即使它们也有 Saleh-Valenzuela 信道模型中的簇现象。基于这些认知, SG3a 建议修正 Saleh-Valenzuela 信道模型使之成超宽带室内多径信道模型。修正后其簇信号服从独立对数正态分布, 而每个簇中的信号服从独立对数正态衰落<sup>[23]</sup>。超宽带多径信道模型的离散脉冲响应的第  $i$  个样本函数为

$$h_i(t) = X_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{r,m}^{(i)} \delta(t - T_m^{(i)} - \tau_{r,m}^{(i)}) \quad (1.35)$$

式中,  $X_i$ 、 $\alpha_{r,m}^{(i)}$ 、 $T_m^{(i)}$  和  $\tau_{r,m}^{(i)}$  与式 (1.34) 中的定义一致, 指标  $i$  表示第  $i$  次生成的采样函数。为了简明将省去式 (1.35) 中的指标  $i$ 。正如 S-V 信道模型的式 (1.29) 和式 (1.30), 簇和波的到达时间服从独立不同参数的泊松分布, 超宽带信道模型的簇和波的到达时间服从独立不同参数的对数正态分布。确切地说, 信道参数为

$$\alpha_{r,m} = p_{r,m} \xi_m \beta_{r,m} \quad (1.36)$$

式中,  $\xi_m$  为第  $m$  个簇具有方差  $\sigma_1^2$  的对数正态衰落系数;  $\beta_{r,m}$  为第  $m$  个簇中的第  $r$  个波是以方差为  $\sigma_2^2$  服从对数正态分布的衰落系数, 由假设, 传输路径簇和传输路径的衰落是相互独立的;  $p_{r,m}$  为二进制离散随机变量, 用以表示服从反射规律的脉冲的随机任意反向, 即等概率地取值 +1 或 -1。相对于均匀分布于区间  $[0, 2\pi]$  式 (1.31) 所示的 S-V 信道相位系数, 超宽带信道模型的相位系数取值  $-\pi$  或  $+\pi$ , 因此其信道系数为实数。由于每个波的幅度由相互独立的对数正态随机变量  $\xi_m$  和  $\beta_{r,m}$  的乘积确定, 而相互独立的对数正态随机变量的乘积仍服从对数正态分布, 所以, 信道参数  $|\xi_m \beta_{r,m}| = 10^{(\mu_{r,m} + z_1 + z_2)/20}$  服从对数正态分布, 即有

$$20 \log_{10} |\xi_m \beta_{r,m}| = \mathcal{N}(\mu_{r,m}, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

其平均功率为

$$E\left\{|\xi_m \beta_{r,m}|^2\right\} = \Omega_0 e^{-T_m/\Gamma} e^{-\tau_{r,m}/\gamma}$$

式中,  $\Omega_0$  为第一个簇中第一条传输路径的平均功率。而信道中第  $m$  个簇中的第  $r$  个传输路径的平均幅度为

$$\mu_{r,m} = \frac{10 \ln(\Omega_0) - 10T_m/\Gamma - 10\tau_{r,m}/\gamma - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \ln 10}{20}$$

刻画和理解超宽带信道模型, 除了与 S-V 信道参数的相同的, 如传输路径簇的到达速率  $\Lambda$ 、传输路径的到达速率  $\lambda$ 、传输路径簇的衰减常数  $\Gamma$ 、传输路径的衰减常数  $\gamma$ 、服从对数正态分布多径阴影的标准差  $\sigma_x$  外, 还有诸如传输路径簇和传输路径的标准差  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ 。

式 (1.35) 给定的一个完整的多径信道模型  $h(t)$  是实的。在超宽带信道模型的模拟试验研究中还需诸如变频、滤波变换等的修正。另外, 刻画超宽带信道模型的参数还包括平均过量延迟、均方根延迟扩展、峰值功率超过 10dB 的有实际影响的多径数(记为  $\text{NP}_{10\text{dB}}$ )、PDP 等必须确定, 以便与实际测量相一致。

图 1.24 所示是超宽带信道模型的一个实验演示, 其中图 1.24 (a) ~ (f) 所示分别是信道单位脉冲响应、过度延迟、均方根延迟、给定门限的有效路径数、平均功率衰落分布和信道能量的变化等。借助于此图可以直观认知各个信道特征参数的物理含义。

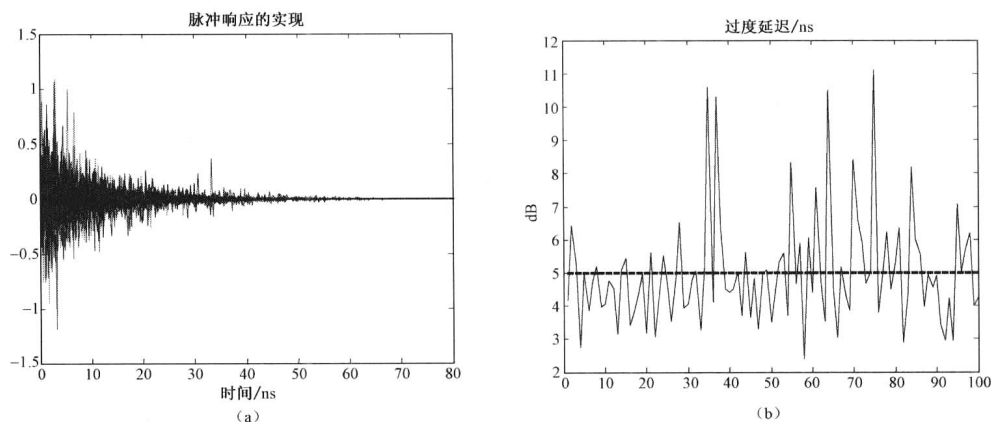


图 1.24 超宽带信道模型 (CM1) 的几个参数的实验演示

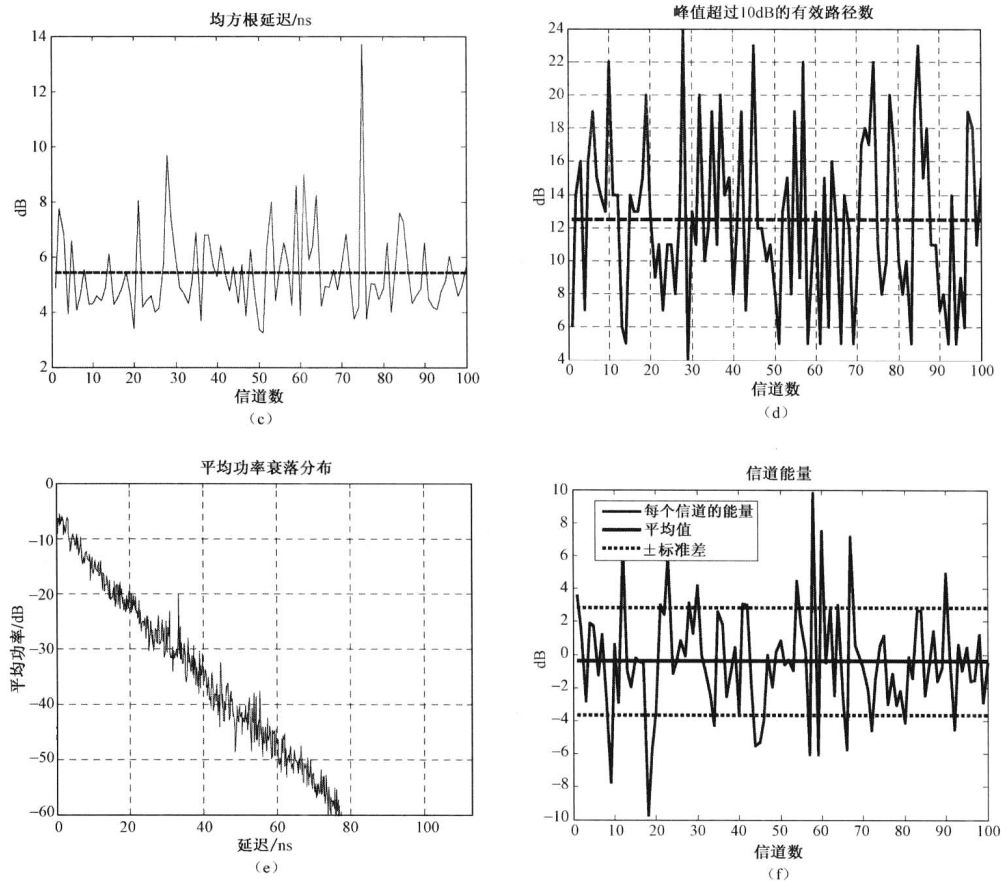


图 1.24 超宽带信道模型 (CM1) 的几个参数的实验演示 (续)

表 1.7 总结了代表四种不同的超宽带信道模型的 SG3a 参数和特征, 分别记为模型 1、模型 2、模型 3 和模型 4。其中每个信道模型依据距离以及是否有直达波而变。表中多路径 (85%) 表示包含总能量 85% 的多路径分量。模型 1 和模型 2 是基于距离 0~4m 有及无直达波环境的测量结果; 模型 3 是基于距离 4~10m 无直达波环境的测量结果; 模型 4 没有涉及真实信道的测量结果, 通过故意设置长的均方根延迟扩展以便模拟最差无直达波环境。

表 1.7 UWB 信道参数特征

目标信道特征	信道模型 1	信道模型 2	信道模型 3	信道模型 4
$\bar{\tau}$	5.05	10.38	14.18	
$\sigma_{\tau}$	5.28	8.03	14.28	25.0
$NP_{10dB}$			35.0	
$NP(85\%)$	24	36.1	61.54	
$\lambda$	0.0233	0.4	0.0667	0.0667
$\lambda$	2.5	0.5	2.1	2.10

续表

目标信道特征	信道模型 1	信道模型 2	信道模型 3	信道模型 4
$\Gamma$	7.1	5.5	14.0	24.0
$\gamma$	4.3	6.7	7.9	12.0
$\sigma_1$	3.3941	3.3941	3.3941	3.3941
$\sigma_2$	3.3941	3.3941	3.3941	3.3941
$\sigma_x$	3.0	3.0	3.0	3.0

模型 1 所涉及的是短距离有直达波均方延迟扩展为 5.28ns 的最好信道特征。模型 2 所涉及的是距离等同于模型 1，均方延迟扩展稍长于模型 1 约为 8.03ns 的无直达波环境信道特征。模型 3 是无直达波距离较长，均方延迟扩展为 14.28ns 的较差信道。

设置超宽带信道、将连续时间超宽带信道转换成离散时间超宽带信道、生成超宽带信道模型的信道参数均列于表 1.8。其中的超宽带信道模型 1 经 100 次模拟试验生成，采样周期设定为 167ns。在当下测量中，均方延迟扩展大约为 5ns，它与表 1.7 所列模型 1 目标值几乎一致。对平均过量延迟有同样的观察。总而言之，说明模拟信道很好地实现了目标信道特征。

表 1.8 UWB 信道模型特征

模型信道特征	信道模型 1	信道模型 2	信道模型 3	信道模型 4
$\bar{\tau}$	5.0	9.9	15.9	30.1
$\sigma_{\tau}$	5.0	8.0	15.0	25.0
$NP_{10dB}$	12.5	15.3	24.9	41.2
$NP(85\%)$	20.8	33.9	64.7	123.3
平均功率	-0.4	-0.5	0.0	0.03
功率标准差	2.9	3.1	3.1	2.7

### 1.3.2 室外信道模型

与室内的静态或准静态信道环境相反，室外信道通常由时变的信道增益刻画，这取决于终端的移动速度。依据终端移动速度，信道增益的时变性由多普勒谱支配，多普勒谱决定信道增益时域相关性。本节讨论与时间相关的信道如何随着终端的移动而变化，我们着眼于给出一些实现包括频域平坦和频率选择性室外信道的实际方法。

#### 1. 过滤高斯白噪声 (FWGN) 信道模型

室外信道将主要由支配信道增益时变特性的多普勒谱刻画。各种各样的多普勒谱能由一过滤的高斯白噪声 (FWGN) 模型生成。过滤高斯白噪声模型是一个最常用的室外信道模型。最简单且常用的室外信道模型应是 Clarke/Gans 模型，Clarke/Gans 模型是一基准过滤高斯白噪声 (FWGN) 模型，根据时域或频域多普勒滤波器的特性它能修饰成其他各种

类型。所以这里先讨论 Clarke/Gans 模型，然后再讨论时域或频域多普勒滤波器的各种变形衍生的信道模型。

### 1) Clarke/Gans 模型

Clarke/Gans 模型设定围绕移动台的散射分量是均匀分布的，每个分量具有相等功率<sup>[24]</sup>。图 1.25 所示是生成 Clarke/Gans 模型的原理框图，其中有两个分支分别生成实部和虚部。在每个分支中第一步先产生频域复高斯噪声，然后经多普勒滤波器产生多普勒频移，最后再送入 IFFT 模块将多普勒频移的高斯噪声转化成时域信号。由于要求 IFFT 模块输出为实信号，所以输入信号应满足共轭对称条件。将输出的实虚部相加构成复信道增益，这样一个满足瑞利幅度分布的信道参数就生成了。

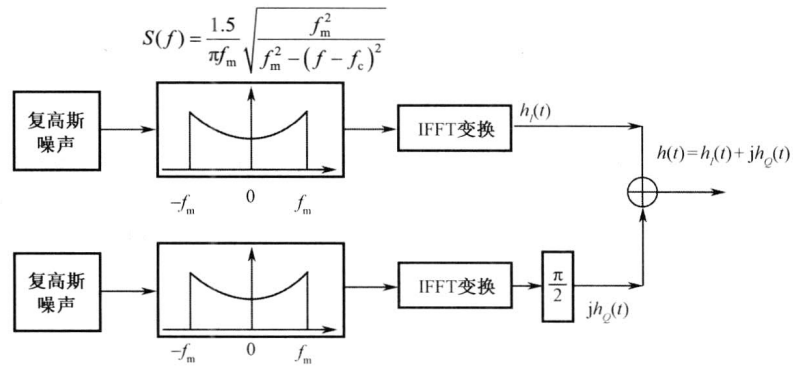
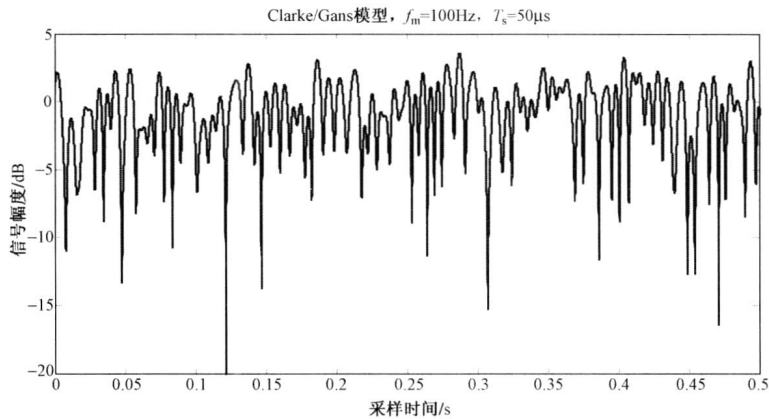


图 1.25 生成 Clarke/Gans 模型的原理框图

图 1.26 (a) 所示是多普勒频率为  $f_m = 100\text{Hz}$  以及采样周期  $T_s = 50\text{ms}$  的频率选择性信道的时域特征曲线。图 1.26 (b)、(c) 分别是 Clarke/Gans 信道模型的幅度分布和相位分布图。从图中可以看出，信道增益的时变特性是幅度服从瑞利分布、相位服从均匀分布。随着多普勒频率的增加，信道幅度变化随之更为剧烈，其反映的是信道的快衰落特性。



(a) Clarke/Gans信道模型时域脉冲响应曲线

图 1.26 Clarke/Gans 信道模型时域响应和幅度、相位分布图

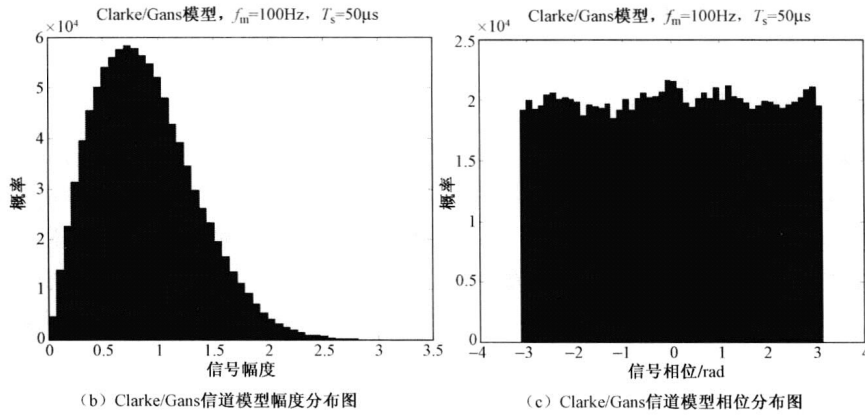


图 1.26 Clarke/Gans 信道模型时域响应和幅度、相位分布图 (续)

### 2) 修正的频域 FWGN 模型 (I-METRA 模型)

如图 1.25 所示, Clarke/Gans 模型采用了两个 IFFT 模块, 因此它具有较高计算复杂度。在 Clarke/Gans 模型的众多变形模型中, 这里介绍一个 I-METRA 曾采用的模型。图 1.27 所示是离散多普勒谱的一个生成过程。设  $f_d = f_m$  表示多普勒谱, 时域采样对应于频域周期延拓, 奈奎斯特重复周期为  $2f_d$ , 如图 1.27 (a) 所示。如图 1.27 (b) 所示, 当以因子  $N_{OS}$  做过采样, 多普勒谱的展宽为  $B_D = 2N_{OS}f_d$ , 其倒数为时域采样间隔  $\Delta t = 1/B_D$ , 它对应于衰落信道的相干时间。将多普勒带宽分为  $N_F = N_{Fad}$  个子带, 每个子带宽度为  $\Delta f_m = B_D/N_F$ ; 因而整个衰落信道的长度为  $T_{Fad} = 1/\Delta f_m = N_{Fad}/B_D$ 。如图 1.27 (c) 所示为离散频率多普勒谱和与之等价的离散时间衰落信道。

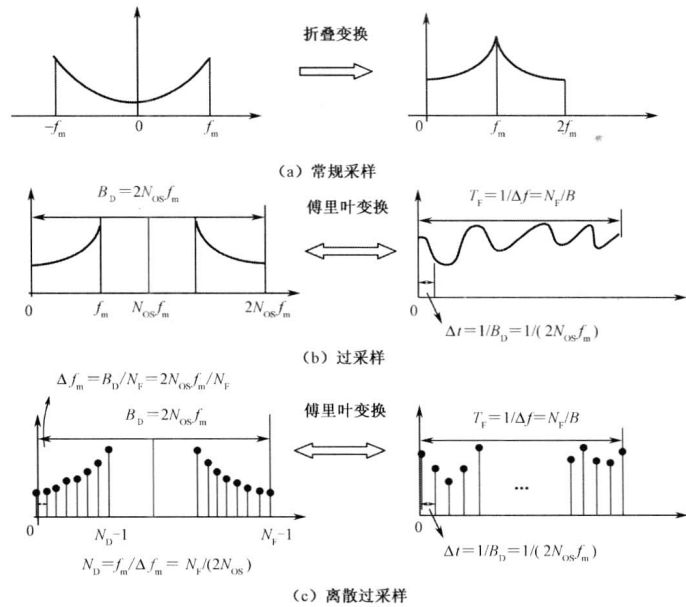


图 1.27 离散多普勒谱的生成过程演绎

对于长度等于  $N_F$  的 IFFT，多普勒谱的频率间隔为  $\Delta f_m = 2N_{OS}f_d / N_F$ 。整个多普勒谱的离散时间频率采样数等于  $N_D = f_d / \Delta f_m = N_{Fad} / (2N_{OS})$ 。这个特殊的方法没有考虑最大多普勒频率，使得生成的衰落信号持续  $T_{Fad}$  时刻。其优势是时域信号可以通过最大多普勒频率  $f_{max,d}$  插值得到。更明确地说，多普勒带宽内的离散频率采样数  $N_D$  由衰落信道的采样数  $N_F$  和过采样因子  $N_{OS}$  决定。一旦生成没有考虑最大多普勒频率的  $N_F$  个衰落信道信号，根据最大多普勒频率  $f_{max,d}$  改变采样间隔  $\Delta t$  就可以生成模拟的衰落信道信号。事实上  $N_D = f_{max,d} / \Delta f_m = N_{Fad} / (2N_{OS})$  扮演最大多普勒频率的角色，而  $f_{max,d}$  仅用于决定采样间隔  $\Delta t = 1 / (2N_{OS}f_d)$ 。这样具有任意相位信道响应的一个幅度便能从多普勒谱求得，每一路的信道响应的时域表达式为

$$h[n] = \sum_{k=-N_{Fad}/2}^{+N_{Fad}/2-1} \sqrt{S[k]} e^{j\theta_k} e^{j2\pi nk / N_{Fad}} \quad (1.37)$$

式中， $S[k]$  是在离散点  $k = f / \Delta f_m$  处的多普勒采样； $n = t / \Delta t$  是离散时间指标； $\theta_k$  是均匀分布于  $[0, 2\pi]$  的随机变量。通过给多普勒滤波器强加一个均匀相位，将得到一个比注入高斯随机变量的 Clarke/Gans 模型更为灵活的时域衰落过程。如果将一个复高斯随机变量而非均匀相位附加到式 (1.37)，则要生成一个灵活的衰落过程还需一低通滤波器。

依据实测信道，不同的信道环境服从相应的多普勒谱。最大多普勒频移以及多普勒谱关于每一个传输路径都可能是变化的。图 1.28 (a) 和 (b) 所示的是由修正的具有标准多普勒谱的时域和频域 FWGN 模型生成的具有最大多普勒频移分别为 100Hz 和 10Hz 两条不同传输路径。

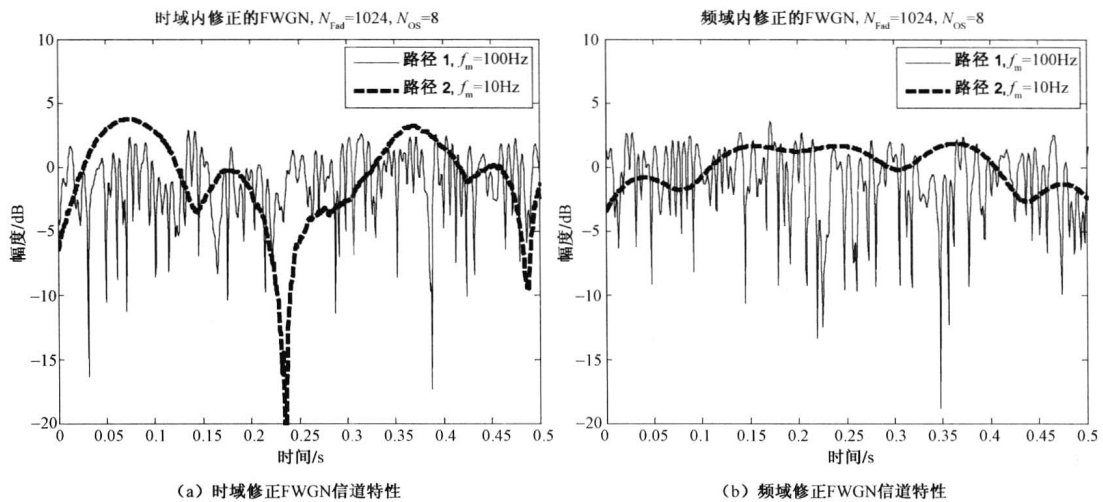


图 1.28 对不同多普勒频率修正的 FWGN 信道的脉冲响应曲线

### 3) 时域 FWGN 模型

如图 1.29 所示, 我们利用频率响应具有多普勒谱的时域滤波器过滤复高斯随机过程生成衰落信道。由于时域 FWGN 模型的各种优越性, 它常被应用于商业信道模拟器。

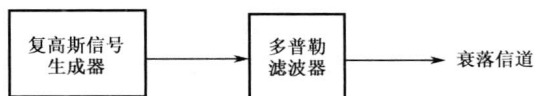


图 1.29 FWGN 衰落信道的生成原理流程

通常频域 FWGN 模型的信道衰落周期由频域过采样因子  $N_{Os}$  以及 IFFT 的长度  $N_{Fad}$  决定, 而时域 FWGN 模型的信道衰落周期由时域 FWGN 模型内复高斯信号的长度决定。由于模拟区间的扩展可以简单地通过增加服从于多普勒滤波的复高斯随机采样实现, 这给模拟实验带来很大灵活性。当多普勒滤波器由一个有限长单位脉冲响应 (FIR) 滤波器来实现时, 其计算复杂度随延迟线数指数增长。为减少延迟线数, IEEE 802.11n 工作组在信道模拟中采用无限长单位脉冲响应 (IIR) 滤波器, 但考虑到无限长单位脉冲响应 (IIR) 滤波器的稳定性, 较多地还是采用有限长单位脉冲响应 (FIR) 滤波器。

另外, FWGN 信道模型可以采用各种类型的多普勒谱, 包括平坦多普勒谱和拉普拉斯多普勒谱。平坦多普勒谱具有常数功率谱密度函数, 即

$$S(f) \propto 1, |f| \leq f_{\max,d}$$

拉普拉斯多普勒谱由如下功率谱密度函数定义:

$$S(f) \propto \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \left\{ \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left| \cos^{-1}(f - \varphi) \right| \right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left| \cos^{-1}(f + \varphi) \right| \right) \right\}, |f| \leq 1$$

式中,  $\sigma$  是功率方位谱 (PAS) 的标准差;  $\varphi$  是终端移动方向与信号波达方向差;  $f$  是经  $f_{\max,d}$  归一化频率参数。与经典和平坦多普勒谱不同, 在拉普拉斯多普勒谱中考虑了终端移动方向。

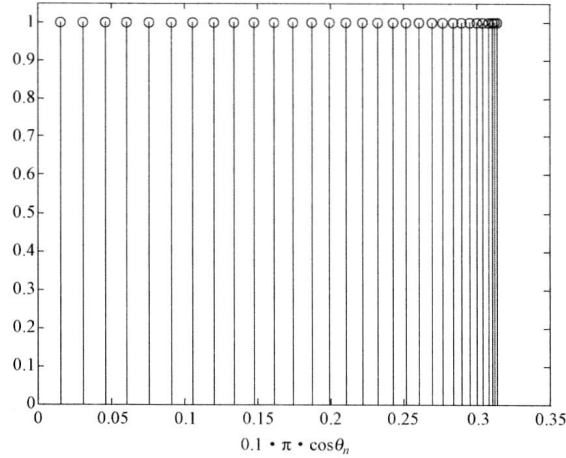
## 2. Jakes 模型

服从于给定多普勒谱的一个瑞利衰落信道可以通过合成正弦信号生成。正弦信号的个数必须足够大以使合成信号的幅度逼近瑞利分布。还需对各正弦信号加权以便生成理想的多普勒谱。这就是 Jakes 模型的生成原理<sup>[25]</sup>。图 1.30 解释了 Jakes 信道模型的实现原理。其中图 1.30 (a) 所示是 Jakes 信道模型中各个正弦振荡器的角频率分布样本; 图 1.30 (b) 所示是 Jakes 信道模型生成流程图。

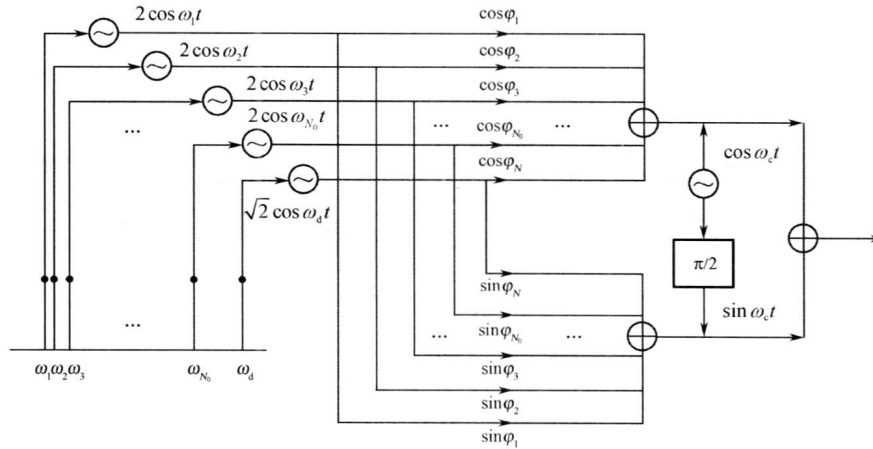
这里用  $N_0+1$  个平面波逼近所有从各个方向均匀到达移动终端的散射分量。定义  $N_0 = (N/2-1)/2$ , 其中  $N/2$  限定为奇数。设  $\theta_n$  为第  $n$  个平面波的波达方向,  $\theta_n = 2\pi n/N$  ( $n=1,2,\dots,N_0$ )。如图 1.30 (b) 所示, 将  $N_0$  个具有不同多普勒频移频率为  $\omega_n = \omega_d \cos \theta_n$  ( $n=1,2,\dots,N_0$ ) 复正弦振荡器的输出相加, 再叠加到频率为  $\omega_d = 2\pi f_{\max,d}$  振荡的输出上。复正弦振荡器总和的实虚部可以分别表示为



$$\left. \begin{aligned} h_I(t) &= 2 \sum_{n=1}^{N_0} (\cos \varphi_n \cos \omega_n t) + \sqrt{2} \cos \varphi_N \cos \omega_d t \\ h_Q(t) &= 2 \sum_{n=1}^{N_0} (\sin \varphi_n \cos \omega_n t) + \sqrt{2} \sin \varphi_N \cos \omega_d t \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$



(a) Jakes信道模型种子角频率的分布图



(b) Jakes信道模型生成流程图

图 1.30 Jakes 信道模型生成原理图

式中， $\varphi_n$  和  $\varphi_N$  分别为第  $n$  个多普勒频移以及最大多普勒频移  $f_{\max,d}$  正弦波的初始相位。初始相位的选择必须使衰落信道的相位服从均匀分布<sup>[24]</sup>。例如，初始相位可选为

$$\varphi_N = 0, \varphi_n = \pi n / (N_0 + 1), n = 1, 2, \dots, N_0$$

Jakes 模型可表示为

$$h(t) = \frac{E_0}{\sqrt{2N_0 + 1}} [h_I(t) + jh_Q(t)]$$

式中,  $E_0$  是衰落信道的平均功率。多普勒频移的正弦波的频率  $\{\omega_n\}_{n=1}^{N_0}$  可表示为

$$\omega_n = \omega_d \cos \theta_n = 2\pi f_{\max,d} \cos(2\pi n / N), n = 1, 2, \dots, N_0$$

多普勒频移的正弦波的个数  $N_0$  必须足够大以使衰落信道的幅度逼近瑞利分布。一般  $N_0 = 8$  已足够。容易证明方程 (1.38) 满足如下关系:

$$E \left\{ \frac{E_0 h_I(t)}{\sqrt{2N_0 + 1}} \right\} = E \left\{ \frac{E_0 h_Q(t)}{\sqrt{2N_0 + 1}} \right\} = \frac{E_0^2}{2} \quad (1.39)$$

$$\left. \begin{aligned} E \{ h^2(t) \} &= E_0^2 \\ E \{ h(t) \} &= E_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

$$E \{ h_I(t) h_Q(t) \} = 0 \quad (1.41)$$

式 (1.40) 确保生成的 Jakes 衰落信号具有平均幅度  $E_0$  和平均功率  $E_0^2$ 。式 (1.39) 和式 (1.41) 表明 Jakes 衰落信号的实虚部皆具平均功率  $E_0^2 / 2$  且相互独立。根据图 1.30 所示的 Jakes 衰落信道的生成原理流程, 图 1.31 (a) ~ (e) 分别给出了依据此原理生成的 Jakes 衰落信道模型的时域特征、幅度和相位分布、信道相关系数和多普勒谱等。显然, Jakes 衰落信道的幅度服从瑞利分布, 相位服从区间  $[-\pi, +\pi]$  上的均匀分布。其中后面两个参数既有理论曲线又有模拟结果, 从图中结果可见这两个方面的结果是基本一致的。这些足以佐证图 1.30 所示的 Jakes 衰落信道的生成原理是可行的。

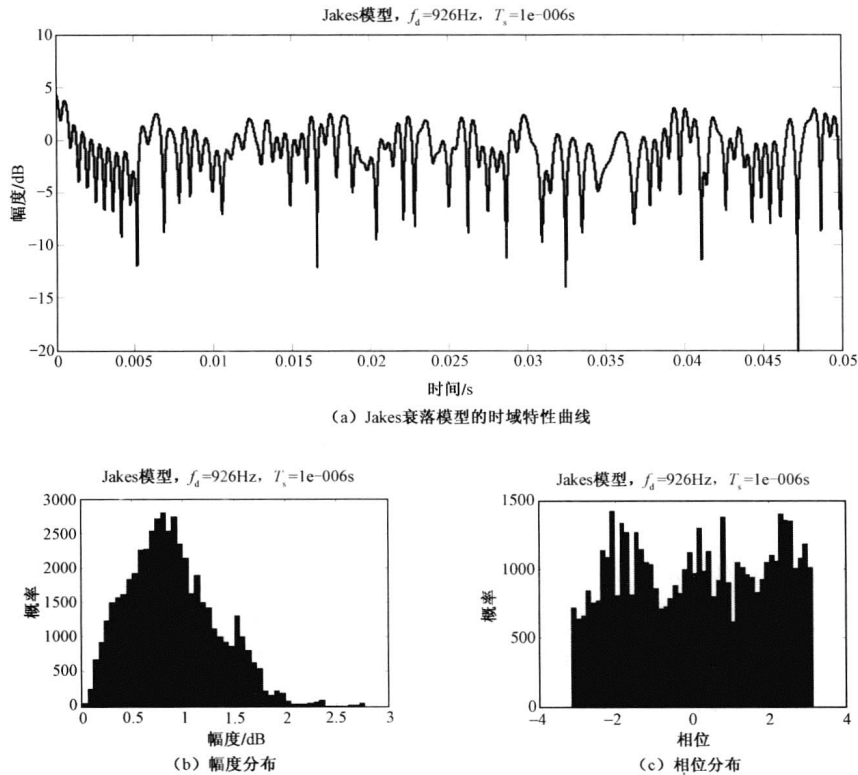


图 1.31 Jakes 衰落模型的时域与频域特性曲线

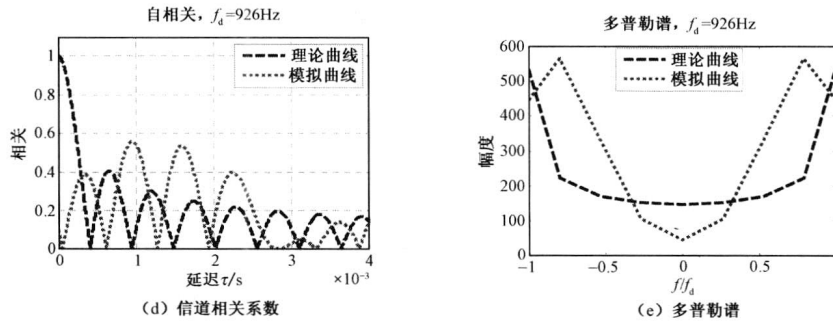


图 1.31 Jakes 衰落模型的时域与频域特性曲线 (续)

### 3. 均匀功率子路径模型

所谓均匀功率子路径模型,就是对每一个子路径配置相同的功率同时用非均匀法设置每一个子路径的波达角<sup>[28]</sup>。等功率配置能够简化模型。假设给定  $M$  个子路径,它们每个偏移角(其范围可以想象为地平面一个扇形区域)的确定以使每个截面区域面积等于子路径数等分功率方位谱曲线下的面积。

图 1.32 解释了两个传输子路径的情形(即  $M=2$ )。图中有由偏移角度划分的三个(相对于每条子路径都可能有的顺时针或逆时针的偏移)不同截面区域,各个区域在功率方位谱(PAS)曲线下有相等的面积(即每个截面等功率)。

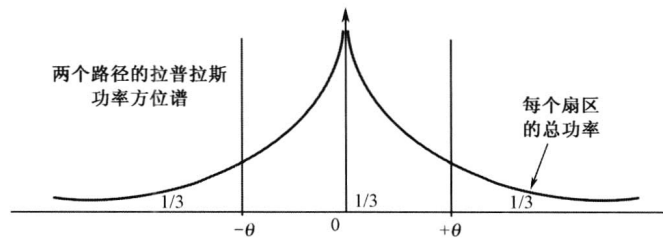


图 1.32 在均匀功率子路径法中偏差角的配置

考虑平均波达角等于  $0^\circ$ , 均方根角度扩展(RMS-AS)为  $\sigma$  的拉普拉斯功率方位谱(PAS)  $P(\theta, \sigma)$ 。设  $\theta_1$  和  $\theta_2$  表示相邻子路径的偏移角度。为了保持被随后两个偏移角划分的每个截面面积相等,由  $\theta_1$  和  $\theta_2$  划分的均方根功率方位谱(PAS)下的面积为

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} P(\theta, \sigma) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{\sqrt{2}|\theta|}{\sigma}} d\theta = \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{\sqrt{2}|\theta_2|}{\sigma}} - e^{-\frac{\sqrt{2}|\theta_1|}{\sigma}} \right) = \frac{1}{a(M+1)} \quad (1.42)$$

式中,  $a$  是归一化因子,若  $M$  为奇数则  $a=1$ 。在式(1.42)中绝对值最小偏移角等于  $0^\circ$ , 否则对于两个具有最小绝对值的对称偏移角  $a=2$ , 对于其他所有子路径  $a=1$ 。

以图 1.32 为例,此时  $M=2$ , 对应式(1.42)有

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} P(\theta, \sigma) d\theta = \frac{1}{6}$$

这时  $a=2$ 。在式 (1.42) 中给定  $\sigma$ ，具有相同功率的偏移角为

$$\theta_{m+1}[\cdot] = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left[ \ln \left( e^{\frac{\sqrt{2}\theta_m}{\sigma}} - \frac{1}{a(M+1)} \right) \right], m = 0, 1, 2, \dots, \lfloor M/2 \rfloor - 1, \theta_0 = 0^\circ \quad (1.43)$$

当  $M$  是偶数的情形，以初始值  $\theta_0 = 0^\circ$ ，由式 (1.43) 得  $\theta_1$ ，即对  $\theta_0 = 0^\circ$  不配置任何子路径。其他传输子路径  $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{M/2}$  由式 (1.43) 迭代求得。当  $M$  是奇数的情形，则在  $\theta_0 = 0^\circ$  有一个具有最小偏移角的子路径，其余传输子路径  $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{\lfloor M/2 \rfloor}$  由式 (1.43) 迭代求得。注意，式 (1.43) 仅对正角度有意义，而其余在负对称角处的子路径定义为  $-\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_{\lfloor M/2 \rfloor}$ 。图 1.33 所示为传输子路径的偏移角度，其生成参数为  $M=20$ ，角度扩展 (AS)  $\sigma=1^\circ$ 。表 1.9 给出了关于不同角度扩展  $\sigma$  的空域信道模型的偏移角。

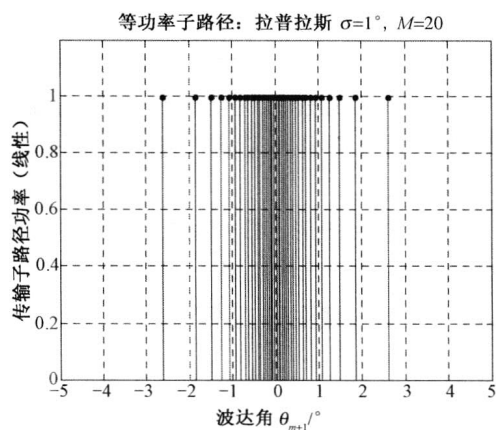


图 1.33 均匀功率子路径法的偏移角配置

表 1.9 空域信道模型的偏移角<sup>[26]</sup>

子路径序数	$\sigma=2^\circ$ (基站宏蜂窝)	$\sigma=5^\circ$ (基站微蜂窝)	$\sigma=35^\circ$ (移动台)
1,2	$\pm 0.0894$	$\pm 0.2236$	$\pm 1.5649$
3,4	$\pm 0.2826$	$\pm 0.7064$	$\pm 4.9447$
5,6	$\pm 0.4984$	$\pm 1.2461$	$\pm 8.7224$
7,8	$\pm 0.7431$	$\pm 1.8578$	$\pm 13.0045$
9,10	$\pm 1.0257$	$\pm 2.0894$	$\pm 17.9492$
11,12	$\pm 1.3594$	$\pm 3.0894$	$\pm 23.7899$
13,14	$\pm 1.7688$	$\pm 4.0894$	$\pm 30.9538$
15,16	$\pm 2.2961$	$\pm 5.0894$	$\pm 40.1824$
17,18	$\pm 3.0389$	$\pm 7.0894$	$\pm 53.1816$
19,20	$\pm 4.3101$	$\pm 10.7753$	$\pm 75.4274$

#### 4. 采样拉普拉斯法

与子路径均匀功率配置相对应的是拉普拉斯采样法功率方位谱配置。在均匀功率配置

子路径法中，每个子路径有相同的传输功率，但它们的偏移角是非均匀分布的（如图 1.33 所示）。子路径功率配置遵从拉普拉斯采样法，如图 1.34 所示，其偏移角以平均波达角为中心非对称分布。

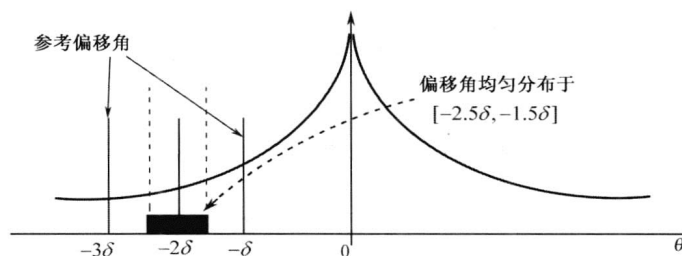


图 1.34 离散拉普拉斯法偏差角的配置（平均波达角为  $0^\circ$ ）

首先，以等间距  $\delta = 2\alpha / M$  生成  $M$  个围绕平均波达角均匀分布于区间  $[\bar{\theta} - \alpha, \bar{\theta} + \alpha]$  的“参考偏移角”；参数  $\alpha$  由角度扩展确定（例如，对应于角度扩展  $\sigma=2^\circ$ 、 $5^\circ$  和  $35^\circ$ ，参数  $\alpha=10^\circ$ 、 $15^\circ$  和  $179^\circ$ ）。一旦生成参考偏移角，“实际偏移角”由安插在“参考偏移角”的一个区间  $[-0.5\delta, +0.5\delta]$  内随机均匀生成（见图 1.34）。对所对应偏移角配置相应的传输子路径。综上所述，拉普拉斯采样法的偏移角遵从如下配置原则：

$$\theta_m = -\alpha + m\delta + \varphi, m = 0, 1, \dots, M-1$$

式中， $\varphi$  均匀分布于区间  $[-0.5\delta, +0.5\delta]$ 。

## 5. 频率选择性信道模型

正如在第 1.2.2 节所述，对于多径传输信道需要利用功率延迟分布（PDP）来刻画其频率选择性衰落。功率延迟分布描述了接收信号的所有波达路径的平均功率分布，平均功率是每条路径的功率关于最早达到路径功率的相对值。

### 1) 抽头延迟线模型

抽头延迟线（Tapped Delay Line, TDL）模型是普遍应用于实现多径信道的模型。它采用多个相互独立、单位平均功率的频率平坦衰落生成器（如滤波的高斯白噪声模型或 Jakes 模型），其输出乘以相应延迟线功率构成延迟线系数（如图 1.35 所示）。抽头延迟线模型是以延迟线系数为系统单位脉冲响应的有限长单位脉冲响应（FIR）滤波器。其系统模型为

$$r(n) = \sum_{m=0}^N a_m s(n-m)$$

式中， $N$  为有限长单位脉冲响应（FIR）滤波器的延迟阶数。但在实践中，经常会遇到延迟时刻并非采样时刻的整数倍的问题，这时必须依赖于延迟线的微调来实现。

图 1.35 所示为一个多径衰落信道模拟器原理图，其中参数  $a_m$  ( $m=0, 1, \dots, N$ ) 和  $\tau_m$  ( $m=1, 2, \dots, N$ ) 分别为对应传输路径的增益及延迟。参数  $\tau_m$  ( $m=1, 2, \dots, N$ ) 往往并非采样时刻的整数倍，这时需要一些其他方法在保持信道特性不变的前提下对之加以调节。最简单、最直接的方法是采用舍入移位法，由于篇幅关系此处就不再赘述。

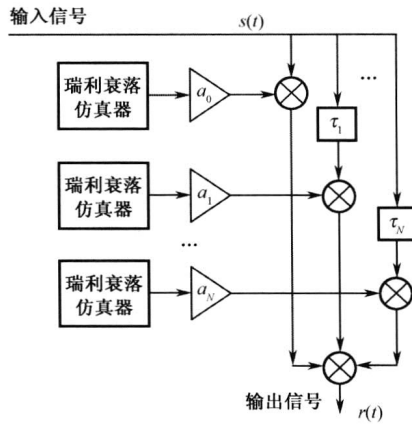


图 1.35 多径信道的仿真模型图

## 2) COST207 信道模型

COST207 信道模型是欧洲无线移动通信工作组提出的频率选择性信道模型<sup>[29-30]</sup>。根据 COST207 信道模型，典型的传输环境被分为 4 类区域：乡村（Rural Area, RA）、典型城区（Typical Urban, TU）、高密度建筑城区（Bad Urban, BU）、山地（Hilly Terrain, HT）。COST207 信道属于广义平稳不相关散射类信道模型。下面介绍 4 类区域的功率延迟谱表达式。

(1) 乡村（RA）的功率延迟谱表达式为

$$P(\tau) = \begin{cases} e^{-9.2\tau} & 0 < \tau < 0.7\mu\text{s} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 典型城区（TU）的功率延迟谱表达式为

$$P(\tau) = \begin{cases} e^{-\tau} & 0 < \tau < 0.7\mu\text{s} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 高密度建筑城区（BU）的功率延迟谱表达式为

$$P(\tau) = \begin{cases} e^{-\tau} & 0 < \tau < 5\mu\text{s} \\ 0.5e^{5-\tau} & 5 < \tau < 10\mu\text{s} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(4) 山地（HT）的功率延迟谱表达式为

$$P(\tau) = \begin{cases} e^{-3.5\tau} & 0 < \tau < 2\mu\text{s} \\ 0.1e^{15-\tau} & 5 < \tau < 10\mu\text{s} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

在 COST207 中还用到两类双高斯多普勒频谱，其表达式为

$$S_1(f) = \alpha_0 \exp\left(-\frac{(f + 0.8f_m)^2}{2 \times (0.05f_m)^2}\right) + \alpha_1 \exp\left(-\frac{(f + 0.4f_m)^2}{2 \times (0.1f_m)^2}\right)$$

$$S_2(f) = \beta_0 \exp\left(-\frac{(f - 0.7f_m)^2}{2 \times (0.1f_m)^2}\right) + \beta_1 \exp\left(-\frac{(f + 0.4f_m)^2}{2 \times (0.15f_m)^2}\right)$$

式中， $\alpha_1 = \alpha_0 - 10\text{dB}$ ； $\beta_1 = \beta_0 - 15\text{dB}$ ； $f_m$  为最大多普勒频移。

常用的 4 类区域的参数如表 1.10~表 1.13 所示（此处我们称之为常用的 4 类区域的参数表，意味着这 4 类区域还可能有一些其他类型的参数表来描述。例如，典型城区还有一种 12 延迟抽头的参数表描述。比较详细且实用的论述可以参考 MathWorks® 公司对 Fading channels 的帮助注释。

(1) 乡村。如表 1.10 所示，第一列为抽头序号，此处对乡村环境我们仅限于 4 个抽头，可能还有一些其他模型类，但基本原理相似（对下面所述有类似的注释）。对于所述几种环境的信道仿真可以直接调用 MATLAB 中的 stdchan 程序，对于超越此处论述的部分可以通过或可以借助于 MATLAB 中的 help stdchan 做进一步了解或使用。

表 1.10 乡村环境信道参数<sup>[29]</sup>

抽头号	延迟/ $\mu\text{s}$	功率/dB	多普勒频谱类型
1	0	0	莱斯
2	0.2	-2	典型 (Clarke)
3	0.4	-10	典型 (Clarke)
4	0.6	-20	典型 (Clarke)

(2) 典型城区，如表 1.11 所示。

表 1.11 典型城区环境信道参数<sup>[29]</sup>

抽头号	延迟/ $\mu\text{s}$	功率/dB	多普勒频谱类型
1	0	-3	典型 (Clarke)
2	0.2	0	典型 (Clarke)
3	0.6	-2	高斯 I
4	1.6	-6	高斯 I
5	2.4	-8	高斯 II
6	5.0	-10	高斯 II

(3) 高密度建筑城区，如表 1.12 所示。

表 1.12 高密度建筑城区环境信道参数<sup>[29]</sup>

抽头号	延迟/ $\mu\text{s}$	功率/dB	多普勒频谱类型
1	0	-3	典型 (Clarke)
2	0.4	0	典型 (Clarke)
3	1.0	-3	高斯 I
4	1.6	-5	高斯 I
5	5.0	-2	高斯 II
6	6.6	-4	高斯 II

图 1.36 所示是对表 1.12 所列参数以及未列的 12 延迟抽头的信道参数的一个仿真结果。

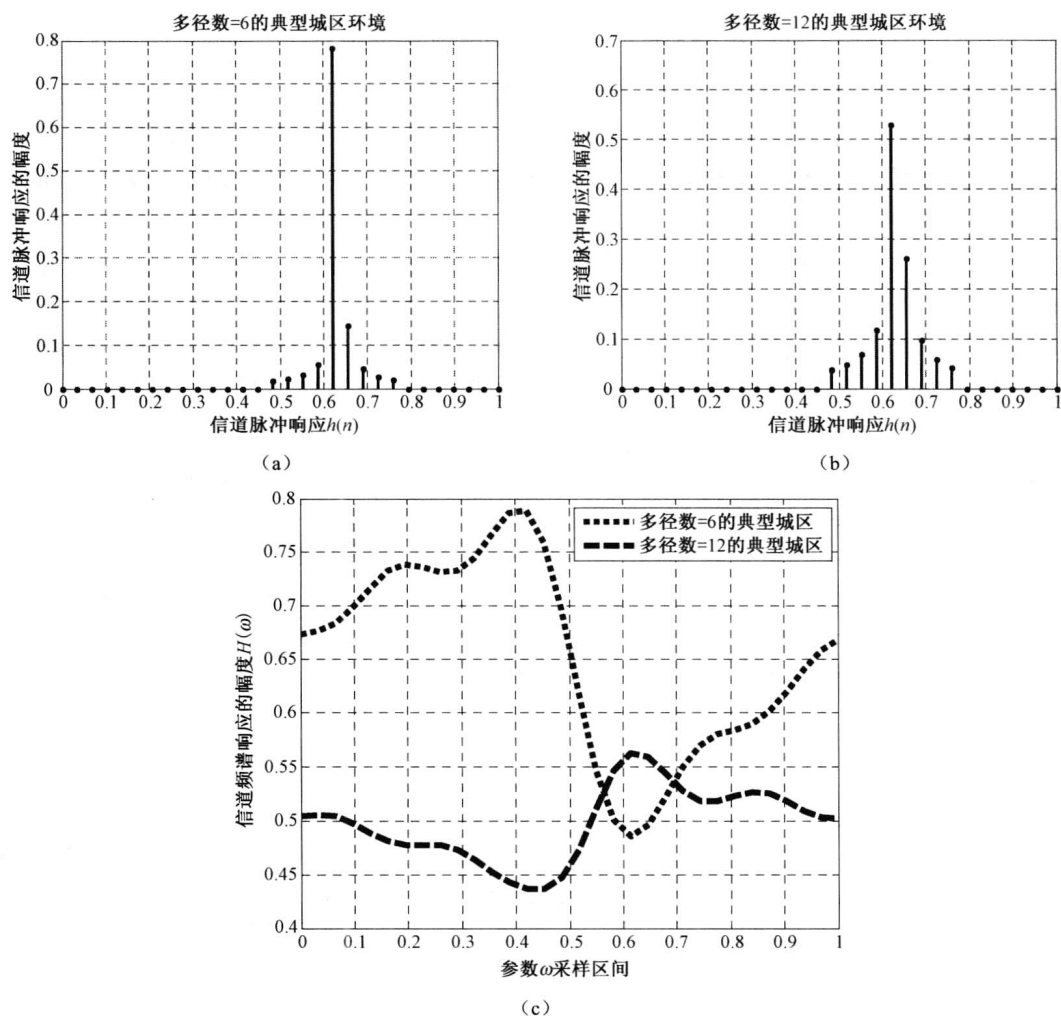


图 1.36 6 和 12 延迟抽头典型城区信道的单位脉冲响应和频域响应特征

图 1.36 (a) 和 (b) 分别是对应信道的单位脉冲响应的时域变化特征曲线，由于仅仅是一次实验的结果，并不能说明许多问题，但是很明显地 12 抽头典型城区信道比 6 抽头典型城区信道的时域响应有更多脉冲。图 1.36 (c) 所示是对应信道的单位脉冲响应的频域变化特征曲线，是对图 1.36 (a) 和 (b) 的结果直接做离散傅里叶变换所得的。从图中可以看出，无论 6 抽头还是 12 抽头典型城区信道，其频率响应均在一个相对很小的范围波动，同样地，这个一次性的实验结果很难说明更多问题。



(4) 山地, 如表 1.13 所示。

表 1.13 山地环境信道参数<sup>[29]</sup>

抽头号	延迟/ $\mu\text{s}$	功率/dB	多普勒频谱类型
1	0	0	典型 (Clarke)
2	0.2	-2	典型 (Clarke)
3	0.4	-4	典型 (Clarke)
4	0.6	-7	典型 (Clarke)
5	15.0	-6	高斯 II
6	17.2	-12	高斯 II

### 3) SUI (Stanford University Interim, 斯坦福大学过度协议) 信道模型

依据上面所述的 IEEE 802.16d 信道模型, 郊区路径损失环境根据树木的密度和路径损失条件被分为三种不同地貌类型。SUI 信道模型考虑的自然环境与 IEEE 802.16d 信道模型类同。利用信道参数的不同组合, 它<sup>[10-11]</sup>将北美三种典型地貌描述为六种不同信道模型(如表 1.14 所示)。对于不同的 SUI 信道模型详细的信道参数列于表 1.15。在表 1.15 中对不同天线类型——有方向性或各向同性天线<sup>[10-11]</sup>有不同的莱斯  $K$  因子以及延迟扩展  $\sigma_r$ 。在 SUI 信道模型中, 多普勒功率谱 (PSD) 为如下截断形式:

$$S(f) = \begin{cases} 1 - 1.72f_0^2 + 0.785f_0^4 & f_0 \leq 1 \\ 0 & f_0 > 1 \end{cases} \quad (1.44)$$

式中,  $f_0 = f/f_m$ 。式 (1.44) 所表示的是比较经典的理论多普勒功率谱。

表 1.14 关于不同地貌特征的 SUI 信道模型

地貌特征	SUI 信道模型	
A	SUI-5	SUI-6
B	SUI-3	SUI-4
C	SUI-1	SUI-2

表 1.15 SUI 信道参数

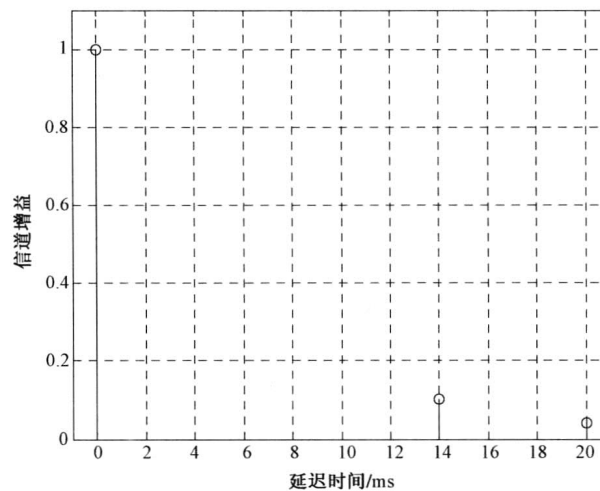
参数	SUI 1/2/3/4/5/6 信道		
	1#延迟线	2#延迟线	3#延迟线
延迟/ $\mu\text{s}$	0/0/0/0/0	0.4/0.4/0.4/1.5/4/14	0.9/1.1/0.9/4/10/20
功率 (各向同性) /dB	0/0/0/0/0	-15/-12/-5/-4/-5/-10	-20/-15/-10/-8/-10/-14
90% $K$ 因子	4/2/1/0/0/0	0/0/0/0/0/0	0/0/0/0/0/0
75% $K$ 因子	20/11/7/1/0/0	0/0/0/0/0/0	0/0/0/0/0/0
50% $K$ 因子	-/-/-/-/2/1	-/-/-/-/0/0	-/-/-/-/0/0
功率 ( $30^\circ$ ) /dB	0/0/0/0/0	-21/-18/-11/-10/-11/-16	-32/-27/-22/-20/-22/-26
90% $K$ 因子	16/8/3/1/0/0	0/0/0/0/0/0	0/0/0/0/0/0
75% $K$ 因子	72/36/19/5/2	0/0/0/0/0/0	0/0/0/0/0/0
50% $K$ 因子	-/-/-/-/7/5	-/-/-/-/0/0	-/-/-/-/0/0
多普勒/Hz	0.4/0.2/0.4/0.2/2/0.4	0.3/0.15/0.3/0.15/1.5/0.3	0.5/0.25/0.5/0.25/2.5/0.5

续表

参数	SUI 1/2/3/4/5/6 信道		
	1#延迟线	2#延迟线	3#延迟线
相关因子	0.7/0.5/0.4/0.3/0.5/0.3		
增益损失因子/dB	0.0/2.0/3.0/4.0/4.0/4.0		
归一化因子/dB (无方向)	-0.1771/-0.393/-1.5113/-1.9218/-1.5113/-0.5683		
/dB (30°)	-0.0371/-0.0768/-0.3573/-0.4532/-0.3573/-0.1184		
地貌特征	C/C/B/B/A/A		
时延扩展 (各向同性) $\sigma_r/\mu\text{s}$	0.111/0.202/0.264/1.257/2.842/5.240		
K 因子	3.3/16/0.5/0.2/0.1/0.1 (90%)		
	10.4/5.10/1.6/0.6/0.3/0.3 (75%)		
	-/-/-/-/1.0/1.0 (50%)		
时延扩展 (30°) $\sigma_r/\mu\text{s}$	0.042/0.69/0.123/0.563/1.276/2.37		
K	14.0/6.9/2.2/1.0/0.4/0.4 (90%)		
	44.2/21.8/7.0/3.2/1.3/1.3 (75%)		
	-/-/-/-/4.2/4.2 (50%)		

如图 1.37 所示为 SUI 信道模型功率延迟分布、时域特征曲线以及各路径功率谱。一般情况下，SUI 信道模拟可以分解为三步：首先确定信道参数；再利用所建立的 FWGN 模型生成衰落信道；最后采用插值法生成所需信道。

图 1.37 所示是表 1.14 中 SUI-6 信道模型根据上面所述生成过程所产生的实验结果演示。图 1.37 (a) 所示是 SUI-6 信道的功率延迟分布图。图中有三条延迟线，相对于第一条传输路径，其余两条路径功率较小。图 1.37 (b) 所示是所述三条传输路径的时域特征和频域特征（由理论曲线和模拟曲线构成）。



(a) SUI信道的功率延迟分布图

图 1.37 SUI 信道模型功率延迟分布、时域特征和功率谱分布曲线

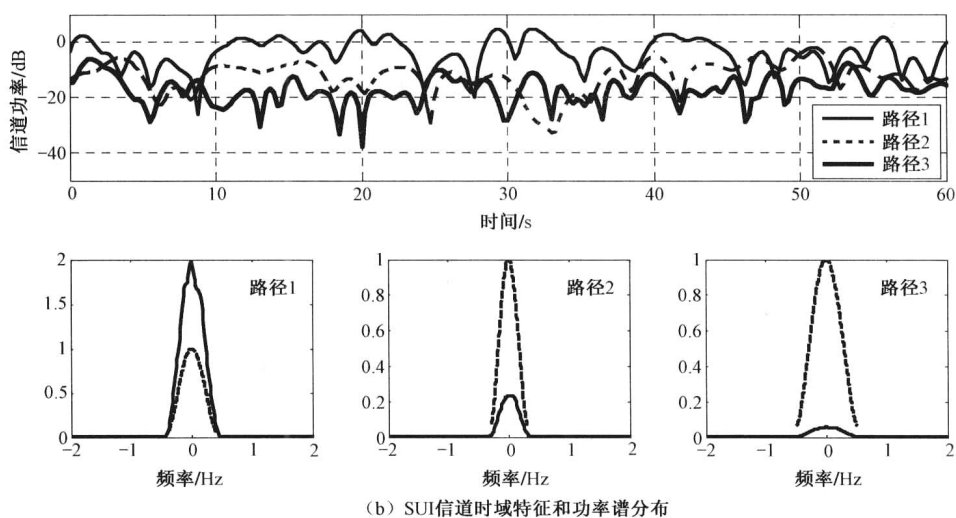


图 1.37 SUI 信道模型功率延迟分布、时域特征和功率谱分布曲线（续）

## 1.4 多输入多输出信道模型

本节先给出多输入多输出系统统计模型概述，然后再论述两个多输入多输出系统以特定方法实现的模型，它们分别是基于相关的 I-METRA 空域信道模型和基于传输路径的 3GPP 空域信道模型（Spatial Channel Model, SCM）。虽然基于相关的空域信道可以利用空域相关矩阵来实现，但时域相关必须利用特定的多普勒谱独立生成。另外，基于传输路径的信道模型结合了分布在关于给定功率方位谱（Power Azimuth Spectrum, PAS）某角域内的多个传输路径，这既不需要多普勒谱也不需要空域相关矩阵，但却涉及一个相对比较复杂的计算过程。

下面通过分析研究这些概念，以便理解如何将它们用于认知和描述多输入多输出（MIMO）系统的信道特征。

### 1.4.1 多输入多输出信道统计模型

我们知道，时域延迟和频域多普勒扩展是认知单输入单输出系统的重要概念。在多输入多输出系统中，收发端均可能采用阵列天线。接收天线和发送天线其各个阵元之间的相关性是多输入多输出系统的一个重要因素，它依赖于每个多径分量信号的波达角度（Angle-of-Arrival, AoA）。为简单，我们考虑一个具有均匀线阵的单输入多输出信道，即接收端配置具有  $N_R$  个阵元间距为  $d$  的均匀线阵，如图 1.38 所示。设  $y_i(t)$  为第  $i$  个阵元的接收信号，其信道增益为  $\alpha_i$ 、延迟为  $\tau_i$ 、波达角度为  $\varphi_i$ ，如图 1.39 所示。波达角度定义为信号来向相对于天线法线的方位角。以平均波达角度到达的每个接收信号都可能包含着许多不能分辨的多径信号。对具有  $N_R$  个阵元的均匀线阵接收天线，其接收信号矢量

$\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_{N_R}(t)]^T$  可表示为

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^L \alpha_i \mathbf{a}(\varphi_i) \mathbf{x}(t - \tau_i) + \mathbf{n}(t) \quad (1.45)$$

式中,  $L$  为可分辨的多路径数;  $\mathbf{a}(\varphi_i)$  为对应阵列天线的导向矢量, 其定义为<sup>[31]</sup>

$$\mathbf{a}(\varphi) = [a_1(\varphi), a_2(\varphi), \dots, a_{N_R}(\varphi)]^T$$

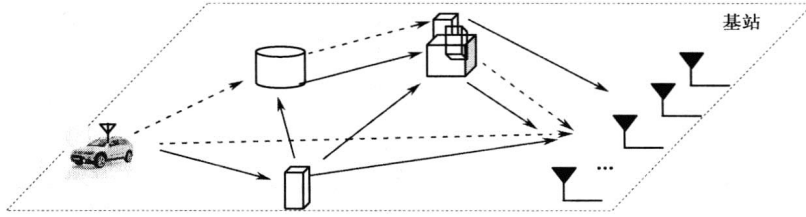
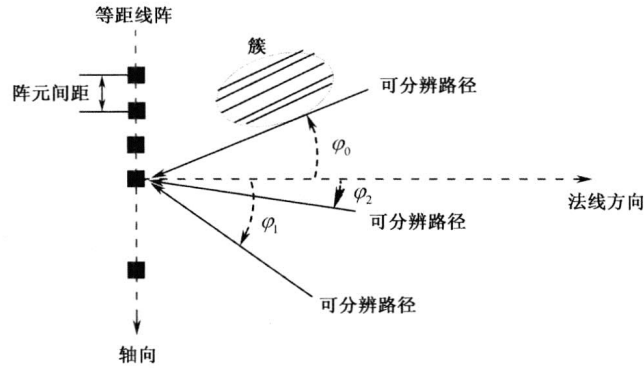


图 1.38 关于单输入多输出信道环境的一个演示



(a) 多径信号与均匀线阵的模型演示

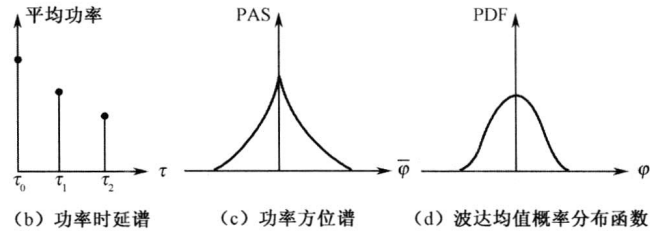


图 1.39 多输入多输出信道的一个演示

矢量  $\mathbf{a}(\varphi_i)$  的第  $m$  个元素为

$$a_m(\varphi) = f_m(\varphi) e^{-j2\pi(m-1)d \sin(\varphi)/\lambda}, \quad m = 1, 2, \dots, N_R \quad (1.46)$$

式中,  $f_m(\varphi)$  是天线第  $m$  个阵元的复方向图;  $\lambda$  为载波波长。接收信号方程 (1.45) 也可表示为积分形式, 即

$$\mathbf{y}(t) = \iint \mathbf{a}(\varphi) h(\varphi, \tau) \mathbf{x}(t - \tau) d\tau d\varphi + \mathbf{n}(t)$$

式中,  $h(\varphi, \tau)$  是信道方位—延迟扩展函数 (Azimuth-Delay Spread, ADS) [32]。接收信号瞬时方位—延迟功率谱 (Power Azimuth-Delay Spectrum, PADS) 为

$$P_{\text{inst}}(\varphi, \tau) = \sum_{i=1}^L |\alpha_i|^2 \delta(\varphi - \varphi_i, \tau - \tau_i) \quad (1.47)$$

平均 PADS 是关于式 (1.47) 取期望值, 即

$$P(\varphi, \tau) = E\{P_{\text{inst}}(\varphi, \tau)\} \quad (1.48)$$

对式 (1.48) 的 PADS 表达式关于延迟参数取积分, 得功率方位谱或功率角度谱 (Power Azimuth Spectrum 或 Power Angular Spectrum, PAS) :

$$P_A(\varphi) = \int P(\varphi, \tau) d\tau \quad (1.49)$$

而方位或角度扩展定义为其中中心累量, 即

$$\sigma_A = \sqrt{\int (\varphi - \varphi_0)^2 P_A(\varphi) d\varphi}$$

式中,  $\varphi_0$  是平均 AoA (即  $\varphi_0 = \int \varphi P_A(\varphi) d\varphi$ ) (参考 1.2.2 小节关于角度扩展问题的讨论) [38]。完全类似, 式 (1.48) 的 PADS 表达式关于波达角 (AoA) 参数取积分, 得延迟功率谱 (Power Delay Spectrum, PDS), 即

$$P_D(\tau) = \int P(\varphi, \tau) d\varphi$$

延迟扩展 (Delay Spread, DS) 定义为 PDS 的中心累量, 即

$$\sigma_D = \sqrt{\int (\tau - \tau_0)^2 P_D(\tau) d\tau}$$

式中,  $\tau_0$  是平均延迟扩展, 即  $\tau_0 = \int \tau P_D(\tau) d\tau$ 。

一旦给定波达角度和延迟的联合概率分布函数  $f(\varphi, \tau)$ , 则波达角度和延迟扩展的边缘概率分布可通过如下公式确定:

$$f_A(\varphi) = \int f(\varphi, \tau) d\tau \text{ 和 } f_D(\tau) = \int f(\varphi, \tau) d\varphi$$

Clarke 信道模型在基站 (BS) 的波达角度 (AoA) 分布是完全不同于在移动终端 (MS) 周围均匀分布的。一般来说, 当天线阵元间距等于  $\lambda/2$  时, 移动终端天线阵元之间的相关性就几乎为零, 而要使基站 (BS) 天线阵元之间的相关性为零, 其阵元间距至少需要大于或等于  $10\lambda \sim 40\lambda$ , 即使这样还需考虑其对应的角度扩展 (Angle-Spread, AS)。而延迟扩展的概率分布密度通常近似为指数函数。

图 1.39 (a) 通过透视图 1.38 的传输环境阐释一个多输入多输出信道模型。图中有三条可分辨的传输路径, 每条传输路径有  $M_D$  个“不可分辨路径”, 可分辨路径以平均波达角度 (AoA) 射向移动终端。无论对宏蜂窝还是微蜂窝, 其不可分辨路径的 AoA 均服从高斯分布, 如图 1.39 (d) 所示。AoA 中的功率分布 (即 PAS) 服从拉普拉斯分布, 如图 1.39 (c) 所示, 虽然它是随着蜂窝环境不断变化的。注意, AoA 的特性与 PAS 的分布是互不相同的。换句话说, AoA 的分布没有考虑每条传输路径的功率, 而 PAS 涉及有关 AoA 的功率分布。最后, 可分辨路径的功率分布 (Power Delay Spectrum, PDS 或 Power Delay Profile, PDP) 通常服从指数分布如图 1.39 (b) 所示。

## 1. 信道空域相关性分析

一般来说，接收天线的不同阵元接收的信号可能是空域相关的，这特别依赖于同一信号关于接收天线各阵元的传输距离差异。下面研究不同阵元接收信号的空域相关性。为了解释相对于接收阵元的波程差，我们用图 1.40 所示的均匀线阵接收天线的两个阵元来解释。

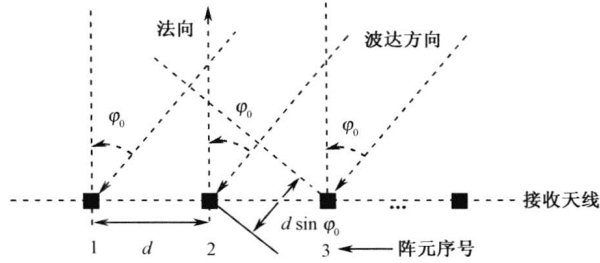


图 1.40 阵列天线信号波达方向路程差与阵元间距的关系

考虑两个各向同性的天线阵元  $2 \rightarrow a$  和  $3 \rightarrow b$ ，它们间距为  $d$ ，如图 1.40 所示。对于一个具有平均波达角（AoA） $\varphi_0$  的基带信号，其波程差为  $d \sin \varphi_0$  而相对延迟为  $\tau_0 = (d/c) \sin \varphi_0$ 。令  $\alpha$  和  $\beta$  分别表示每条路径的幅度和相位，它们分别服从瑞利和  $[0, 2\pi]$  上的均匀分布。假设为窄带信道，则与天线阵元相对应的信道脉冲响应可表示为

$$h_a(\varphi) = \alpha e^{j\beta} \sqrt{P(\varphi)} \text{ 和 } h_b(\varphi) = \alpha e^{j(\beta + 2\pi d \sin \varphi / \lambda)} \sqrt{P(\varphi)} \quad (1.50)$$

式中， $P(\varphi)$  为式 (1.49) 所定义的功率方位谱（PAS），假设  $P(\varphi) = P_A(\varphi)$ 。我们定义具有平均波达角（AoA）为  $\varphi_0$  的接收信号对于间距为  $d$  的两个接收阵元的空域相关系数为

$$\rho_c(d, \varphi_0) = E_\varphi \{h_a(\varphi) h_b^*(\varphi)\} = \int_{-\pi}^{+\pi} h_a(\varphi) h_b^*(\varphi) P(\varphi - \varphi_0) d\varphi$$

考虑一个极端的情形，平均 AoA  $\varphi_0 = 0^\circ$  以及角度扩展  $\sigma_A = 0^\circ$ ，也就是说满足  $P(\varphi - \varphi_0) = \delta(\varphi)$ ，这意味着仅有一个垂直于均匀线阵的子路径传输信号。在此情形，波达角在不同信道  $h_a$  和  $h_b$  之间不产生任何的时延。因而相关系数等于 1，即

$$\rho_c(d) = E_\varphi \{h_a h_b^*\} = E\{|\alpha|^2\} = 1$$

然而当平均波达角和角度扩展不等于  $0^\circ$  时，在信道  $h_a(\varphi)$  和  $h_b(\varphi)$  之间必然有一个如式 (1.50) 所示的相位差，其产生如下的空域相关函数：

$$\begin{aligned} \rho_c(d, \varphi_0) &= E_\varphi \{h_a(\varphi) h_b^*(\varphi)\} \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-j2\pi d \sin(\varphi - \varphi_0) / \lambda} P(\varphi - \varphi_0) d\varphi = R_{xx}(d, \varphi_0) + jR_{xy}(d, \varphi_0) \end{aligned} \quad (1.51)$$

此处假设功率方位谱（PAS） $P(\varphi)$  已被归一化处理，即  $\int_{-\pi}^{+\pi} P(\varphi) d\varphi = 1$ ；而  $R_{xx}(d, \varphi_0)$  和  $R_{xy}(d, \varphi_0)$  分别代表两个接收信号相关系数的实部和虚部<sup>[33]</sup>。定义一个归一化的阵元距离参数  $D = 2\pi d / \lambda$ ，则空域相关函数可写作

$$\left. \begin{aligned} R_{xx}(D, \varphi_0) &= E_\varphi \{\text{Re}(h_a) \cdot \text{Re}(h_b)\} = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(D \sin \varphi) P(\varphi - \varphi_0) d\varphi \\ R_{xy}(D, \varphi_0) &= E_\varphi \{\text{Re}(h_a) \cdot \text{Im}(h_b)\} = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(D \sin \varphi) P(\varphi - \varphi_0) d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

如式 (1.52)，天线阵元之间的空域相关性主要依赖于平均 AoA 和 PAS 以及阵元间距  $d$ 。特别是当功率方位谱的角度扩展较小时，构成传输分量的大部分子路径波以相同的波达角到达天线的各个阵元，即它们是空域相关的，由于它们的幅度近似相等，它们的相位差异源于波达角。而信道容量和天线分集增益将随着天线阵元间的相关性增强而降低（见第 2 章有关信道容量的讨论）。因此，为保证信道容量和天线分集增益，必须增加阵元间距以降低不同阵元接收信号的相关性。

## 2. 功率方位谱 (PAS) 模型

由前面所述以及式 (1.51) 和式 (1.52) 可见，功率方位谱 (PAS) 是决定天线阵元空域相关性的一个重要因素。事实上，对空域相关的数学分析需要实际环境的功率方位谱 (PAS)。通过对大量不同环境的测量（如室外或室内、宏蜂窝或微蜂窝）发现有各种类型的功率方位谱 (PAS)，如表 1.16 所示。一条传输路径的功率方位谱 (PAS) 的模式取决于局部散射分量的分布。一般来说，移动终端周围可能有大量的局部散射分量，其对应功率方位谱 (PAS) 通常服从均匀分布；对于基站，依据蜂窝所处地貌特征可能有不同的对应功率方位谱 (PAS)，它通常具有较小的角度扩展 (AS)。应注意，在微微蜂窝或室内环境也存在服从均匀分布的功率方位谱 (PAS)。下面将详细解释表 1.16 中其他类型的功率方位谱 (PAS)。同时，表 1.17 所示是在不同载波频率情形下对室内和室外环境的平均角度扩展 (AS) 的测量结果。即使在室内环境也可能观测到多个簇，表中有相应的一个结果。显然表 1.17 中的室内环境的角度扩展已相当大，通常室外环境的角度扩展小于  $10^\circ$ 。

表 1.16 不同传输环境下的功率方位谱<sup>[34]</sup>

基站			移动终端
室外	宏蜂窝	截断拉普拉斯模型 正弦 $n$ 次幂模型 截断高斯模型 均匀分布模型	均匀分布
	微蜂窝		
	微微蜂窝		
室内		均匀分布	

表 1.17 不同传输环境下的平均角度扩展<sup>[34]</sup>

载波频率 /MHz	室外					室内
	宏蜂窝			微蜂窝		
	城区	郊区	田园	有直达波	无直达波	
1000						$20^\circ \sim 60^\circ$
1800	$5^\circ \sim 10^\circ$					
1800	$8^\circ$	$5^\circ$	$<10^\circ$			
1845						
1873	$3^\circ \sim 15^\circ$					
2100	$7^\circ \sim 12^\circ$	$3^\circ \sim 18^\circ$				
2154		$10.3^\circ$				
2200			$3^\circ$	$<10^\circ$	$<20^\circ$	
7000						$22^\circ \sim 26^\circ$

下面介绍几种功率方位谱模型。

### 1) 一个正弦函数的 $n$ 次方型功率方位谱模型

功率方位谱能表示为一正弦函数的  $n$  次方的形式：

$$P(\varphi) = \frac{Q}{\pi} \cos^n(\varphi), -\frac{\pi}{2} + \varphi_0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \varphi_0 \quad (1.53)$$

式中， $n$  是与波束宽度有关的偶数； $Q$  为功率方位谱的归一化因子<sup>[35]</sup>。图 1.41 (a) 解释了功率方位谱函数当  $n=2、4、8$ ，平均波达角为  $0^\circ$ （即  $\varphi_0 = 0^\circ$ ）时的变化。注意到随着  $n$  的增大，功率方位谱变窄。将式 (1.53) 代入式 (1.52) 即得如下的空域相关函数

$$\left. \begin{aligned} R_{xx}(D, \varphi_0) &= \frac{Q}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(D \sin \varphi) \cos^n(\varphi - \varphi_0) d\varphi \\ R_{xy}(D, \varphi_0) &= \frac{Q}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(D \sin \varphi) \cos^n(\varphi - \varphi_0) d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

由于积分涉及正弦函数的  $n$  次方，式 (1.54) 无解析表达式，但可求数值解。图 1.41 (b) 所示是对应于  $n=2、4、8$  时的空域相关函数的变化曲线。显然，当  $n=2$  时功率方位谱主瓣最宽，其空域相关函数也最快趋于零。

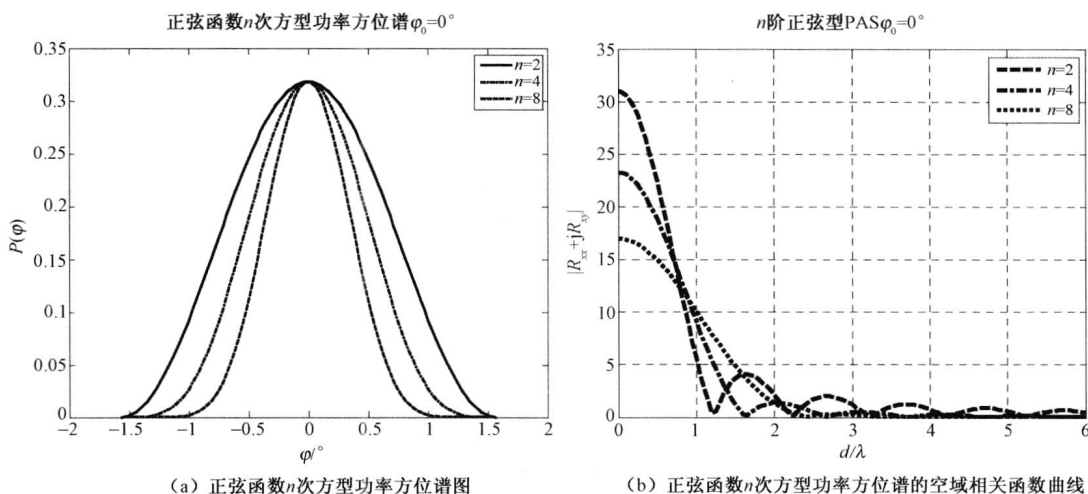


图 1.41 正弦函数  $n$  次方型功率方位谱及其空域相关函数

### 2) 均匀功率方位谱模型

均匀功率方位谱模型适合于刻画具有丰富散射体的环境，如一个布满设备的室内环境。它表征在特定角度范围内具有均匀功率分布的情形，即

$$P(\varphi) = Q, -\Delta\varphi + \varphi_0 \leq \varphi \leq \Delta\varphi + \varphi_0 \quad (1.55)$$

式中， $\Delta\varphi = \sqrt{3}\sigma_A$ <sup>[33]</sup>； $Q$  为功率方位谱的归一化因子，容易求得  $Q = 1/(2\Delta\varphi)$ 。将式 (1.55) 代入式 (1.52)，即得如下的空域相关函数：



$$\left. \begin{aligned} R_{xx}(D, \varphi_0) &= \frac{Q}{\pi} \int_{-\Delta\varphi+\varphi_0}^{+\Delta\varphi+\varphi_0} \cos(D \sin \varphi) d\varphi \\ R_{yy}(D, \varphi_0) &= \frac{Q}{\pi} \int_{-\Delta\varphi+\varphi_0}^{+\Delta\varphi+\varphi_0} \sin(D \sin \varphi) d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

注意：当  $\sigma_A \rightarrow \infty$  有关系式  $R_{xx}(D) \rightarrow J_0(D)$  和  $R_{yy}(D) \rightarrow 0$ 。  $J_0(\cdot)$  为第一类修正的零阶 Bessel 函数。

图 1.42 演示了均匀型功率方位谱随着角度扩展 (AS) 的变化情况与空域相关系数随着角度扩展 (AS) 和阵元相对间距的变化情况。图 1.42 (a) 所示为均匀型功率方位谱当角度扩展 (AS) 等于  $10^\circ$  和  $30^\circ$  时的幅度变化情况。在图 1.42 (b) 中演示的是空域相关函数随阵元相对间距的变化。可以看出，当角度扩展 (AS) 等于  $10^\circ$  和  $30^\circ$  时，空域相关函数的第一零点分别位于阵元间距等于  $1.7\lambda$  和  $0.6\lambda$  处，揭示了信道空域相关性与角度扩展 (AS)  $\sigma_A$  以及阵元相对间距  $d/\lambda$  的关系。

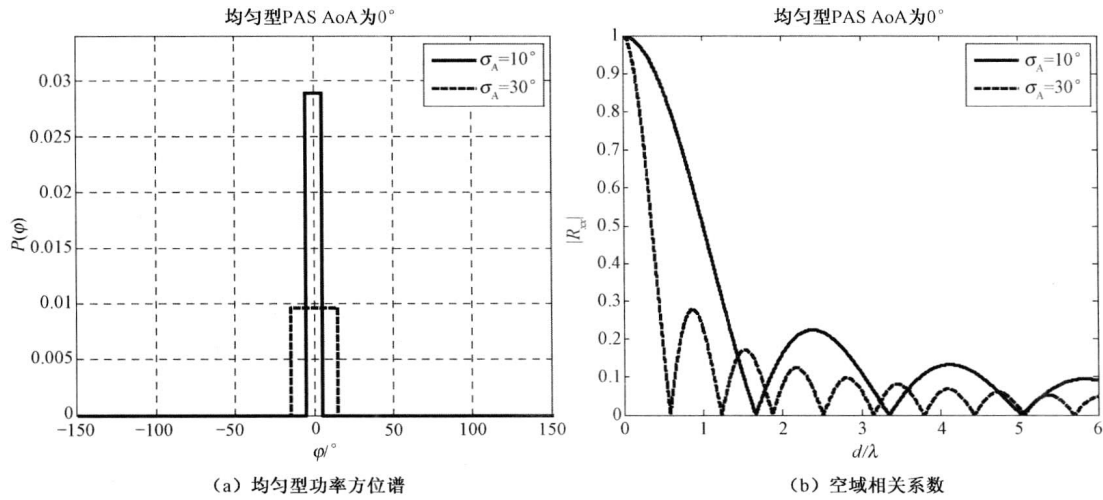


图 1.42 均匀型功率方位谱及空域相关系数

### 3) 截断的高斯功率方位谱模型

关于截断的高斯功率方位谱模型，其功率分布函数为

$$P(\varphi) = \frac{Q}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\Delta\varphi + \varphi_0 \leq \varphi \leq \Delta\varphi + \varphi_0 \quad (1.57)$$

式中， $\sigma$  是功率方位谱的标准差； $\Delta\varphi$  均匀分布于区间  $[0, 2\pi]$  (通常  $\Delta\varphi = \pi$ )<sup>[33]</sup>。归一化因子  $Q$  通过如下约束条件获得

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P(\varphi) d\varphi = \frac{Q}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\Delta\varphi}^{+\Delta\varphi} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2\sigma^2}\right) d\varphi = 1 \quad (1.58)$$

解式 (1.58) 求得归一化因子  $Q$  为

$$Q = 1 / \text{erf}(\Delta\varphi / \sqrt{2}\sigma)$$

式中， $\text{erf}(\cdot)$  表示误差函数，其定义为  $\text{erf}(x) = (2/\pi) \int_0^x e^{-t^2} dt$ 。将式 (1.57) 代入式 (1.52) 中，得空域相关系数为

$$\left. \begin{aligned} R_{xx}(D, \varphi_0) &= \frac{Q}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\Delta\varphi+\varphi_0}^{+\Delta\varphi+\varphi_0} \cos(D \sin \varphi) \exp\left(-\frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{2\sigma^2}\right) d\varphi \\ R_{xy}(D, \varphi_0) &= \frac{Q}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\Delta\varphi+\varphi_0}^{+\Delta\varphi+\varphi_0} \sin(D \sin \varphi) \exp\left(-\frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{2\sigma^2}\right) d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

进一步可以求得

$$\begin{aligned} R_{xx}(D) &= J_0(D) + Q \sum_{m=1}^{+\infty} J_{2m}(D) e^{-2\sigma^2 m^2} \cos(2m\varphi_0) \cdot \\ &\quad \text{Re} \left[ \text{erf} \left( \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{2}\sigma} - jm\sqrt{2}\sigma \right) - \text{erf} \left( -\frac{\Delta\varphi}{\sqrt{2}\sigma} - jm\sqrt{2}\sigma \right) \right] \end{aligned} \quad (1.60)$$

和

$$\begin{aligned} R_{xy}(D) &= Q \sum_{m=1}^{+\infty} J_{2m+1}(D) e^{-2\sigma^2 (m+1/2)^2} \sin(2m+1)\varphi_0 \cdot \\ &\quad \text{Re} \left[ \text{erf} \left( \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{2}\sigma} - j(m+\frac{1}{2})\sqrt{2}\sigma \right) - \text{erf} \left( -\frac{\Delta\varphi}{\sqrt{2}\sigma} - j(m+\frac{1}{2})\sqrt{2}\sigma \right) \right] \end{aligned}$$

图 1.43 演示了截断高斯型功率方位谱随着角度扩展 (AS) 的变化情况与空域相关系数随着角度扩展 (AS) 和阵元相对间距的变化情况。从图 1.43 (a) 可以看出，当角度扩展 (AS) 增大时功率分布展宽，而在同样阵元间距情形空域相关性降低；从图 1.43 (b) 中可以看出，当角度扩展 (AS) 等于  $30^\circ$  时，空域相关系数在阵元间距为  $0.6\lambda$  时几乎等于零。

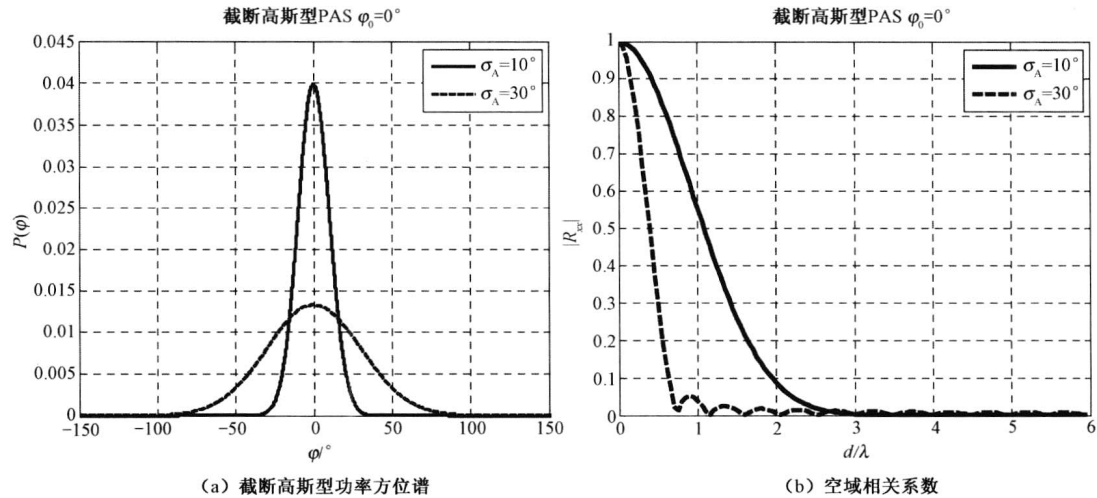


图 1.43 截断高斯型功率方位谱及其空域相关系数

#### 4) 截断的拉普拉斯功率方位谱模型

截断的拉普拉斯功率方位谱模型普遍应用于宏蜂窝或微蜂窝环境，其功率分布函数为

$$P(\varphi) = \frac{Q}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|\varphi - \varphi_0|}{\sigma}\right), -\Delta\varphi + \varphi_0 \leq \varphi \leq \Delta\varphi + \varphi_0 \quad (1.61)$$

式中,  $\sigma$  为功率方位谱的标准差<sup>[39]</sup>。归一化因子  $Q$  可由如下方程获得

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} P(\varphi) d\varphi &= \frac{Q}{\sqrt{2}\sigma} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|\varphi - \varphi_0|}{\sigma}\right) d\varphi \\ &= \frac{\sqrt{2}Q}{\sigma} \int_0^{+\Delta\varphi} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}\varphi}{\sigma}\right) d\varphi \\ &= Q(1 - e^{-\sqrt{2}\Delta\varphi/\sigma}) = 1 \end{aligned}$$

求解此关于参数  $Q$  的方程式可得

$$Q = \frac{1}{1 - e^{-\sqrt{2}\Delta\varphi/\sigma}}$$

将完全确定的式 (1.61) 代入式 (1.52), 得空域相关系数

$$\left. \begin{aligned} R_{xx}(D, \varphi_0) &= \frac{Q}{\sqrt{2}\sigma} \int_{-\Delta\varphi+\varphi_0}^{+\Delta\varphi+\varphi_0} \cos(D \sin \varphi) \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|\varphi - \varphi_0|}{\sigma}\right) d\varphi \\ R_{xy}(D, \varphi_0) &= \frac{Q}{\sqrt{2}\sigma} \int_{-\Delta\varphi+\varphi_0}^{+\Delta\varphi+\varphi_0} \sin(D \sin \varphi) \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|\varphi - \varphi_0|}{\sigma}\right) d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

图 1.44 演示了截断拉普拉斯型功率方位谱随着角度扩展 (AS) 的变化情况及空域相关系数随着角度扩展 (AS) 和阵元相对间距的变化情况。显然, 从图 1.44 (b) 可以看出, 为了抑制天线阵元之间的空域相关性, 阵元间距必须足够大。当角度扩展 (AS) 等于  $30^\circ$ , 要使空域相关系数小于 0.1, 阵元间距必须超过  $1.3\lambda$ ; 当角度扩展 (AS) 减小为  $10^\circ$ , 要使空域相关系数小于 0.1, 阵元间距必须超过  $4\lambda$ 。其也说明角度扩展 (AS) 越小, 同一阵元间距阵元间相关性越强。

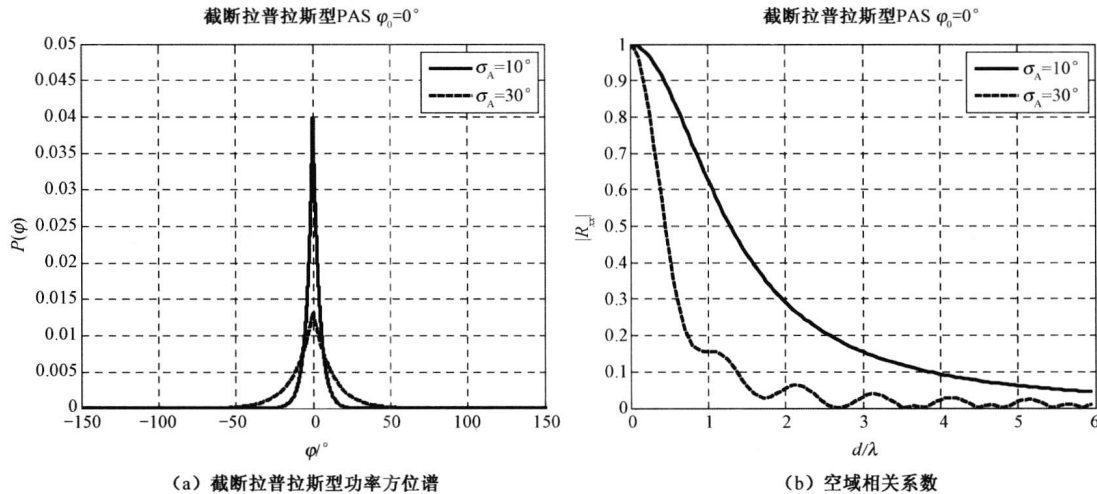


图 1.44 截断拉普拉斯型功率方位谱及其空域相关系数

### 5) 多个簇的情形

对于移动终端，当主要散射体附近还有局部散射体分量，接收信号的功率方位谱具有多个簇，每个簇有不同的波达角度。这种现象通常出现在室内环境。其空域相关特征可以表示为这些簇的空域相关系数的和的形式。图 1.45 展示了一个具有两个簇的拉普拉斯功率方位谱模型。在图 1.45 (a) 中，第一个簇的波达角度为  $-60^\circ$ ，角度扩展为  $30^\circ$ ，且有单位功率；第二个簇的波达角度为  $60^\circ$ ，角度扩展为  $10^\circ$ ，同样有单位功率，所以幅度较第一个要大。图 1.45 (b) 所示是关于这两个簇的接收信号的相关系数。

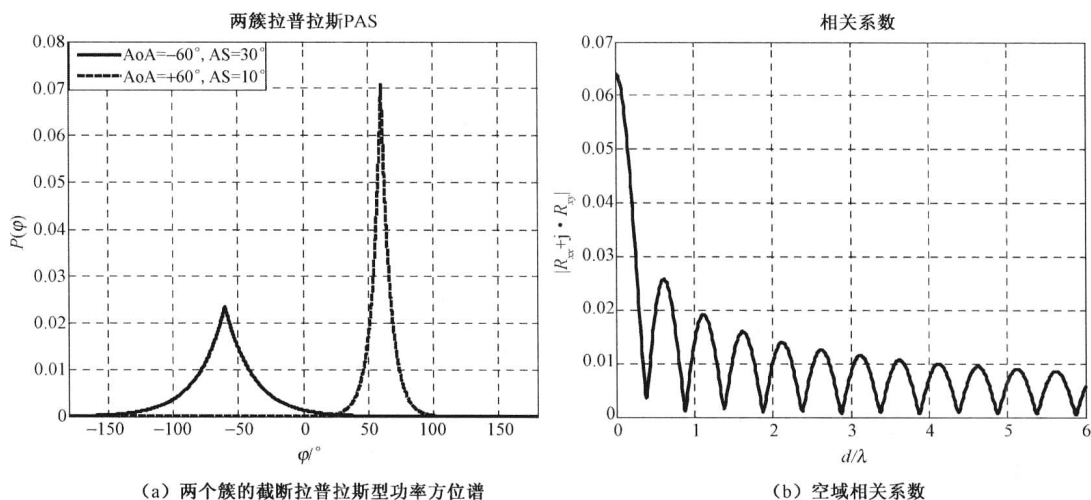


图 1.45 两个簇的截断拉普拉斯型功率方位谱及其空域相关系数

对于上面的结果有这样两点需要说明：

(1) 关于式 (1.54)、式 (1.56)、式 (1.59) 和式 (1.62) 都可以利用超越函数如式 (1.60) 那样展开成级数形式，这个通常在《数学手册》中有详细公式可以参阅。

(2) 可以做一个总体对比，从图 1.41~图 1.45 可以看出，若信道的功率方位谱有相对较宽的主瓣，则其对应的空域相关函数必相对较快地趋于零。这与普通的物理常识所谓的信号空域弥散性和空域不相关性是一致的，认知是统一的。

### 1.4.2 I-METRA 多输入多输出信道统计模型

一个多输入多输出衰落信道可以利用统计方法来实现，包括上节讨论过的功率方位谱的空域相关特征。在本小节，先讨论相关衰落信道的统计模型，这是实现多输入多输出衰落信道的基本概念。然后，论述 I-METRA 建议的多输入多输出衰落信道模型<sup>[36-39]</sup>。

考虑一个具有  $N_T$  个阵元的基站系统和一个具有  $N_R$  个阵元移动终端，如图 1.46 所示。一窄带多输入多输出信道  $\mathbf{H}$  可以统计地表示为一个  $N_T \times N_R$  复矩阵（即  $\mathbf{H} \in \mathbf{C}^{M \times N}$ ）：

$$\mathbf{H} = \sqrt{\Sigma_R} \mathbf{A}_{i.i.d} \sqrt{\Sigma_T} \quad (1.63)$$

式中， $\Sigma_R$  和  $\Sigma_T$  分别表示接收天线与发射天线的相关矩阵； $A_{i.i.d}$  表示一独立同分布瑞利衰落信道的系数矩阵。

在式 (1.63) 中，基于相关矩阵的多输入多输出信道模型的最基本假设是接收机与发射机的相关矩阵的可分离性，这一假设对绝大部分无线通信环境是成立的。通过调整相关矩阵  $\Sigma_R$  和  $\Sigma_T$ ，可以生成各种类型的多输入多输出信道。一个极端的情形是当相关矩阵  $\Sigma_R$  和  $\Sigma_T$  均为单位矩阵时，可以得到一个完全独立同分布信道；而另外一个利用此模型生成的极端信道是秩为1以及具有任意相位的多输入多输出莱斯信道。

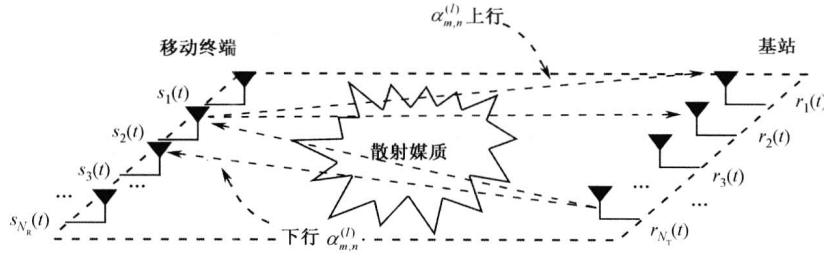


图 1.46 具有上行和下行链路的阵列天线 MIMO 系统示意图

具有上行链路和下行链路的多输入多输出信道见图 1.46，其传导介质具有散射、反射和衍射特性。一个宽带多输入多输出信道可以用一个延迟线 (Tapped Delay Line, TDL) 模型来表征，此模型是式 (1.63) 所表示的窄带多输入多输出信道的推广，其信道参数的时域特征为

$$\mathbf{H}(\tau) = \sum_{l=1}^L \tilde{\mathbf{H}}_l \delta(\tau - \tau_l) \quad (1.64)$$

式中， $\tilde{\mathbf{H}}_l$  为第  $l$  个具有延迟  $\tau_l$  的复信道增益矩阵<sup>[40]</sup>。设  $\alpha_{m,n}^{(l)}$  为基站的第  $m$  个天线阵元与移动台的第  $n$  个天线阵元之间第  $l$  条传输路径的信道系数。由假设知，参数  $\alpha_{m,n}^{(l)}$  服从零均值复高斯随机分布，因而  $|\alpha_{m,n}^{(l)}|$  服从瑞利分布。式 (1.64) 中的复信道增益矩阵  $\tilde{\mathbf{H}}_l$  可以表示为

$$\tilde{\mathbf{H}}_l = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{(l)} & \alpha_{1,2}^{(l)} & \cdots & \alpha_{1,N_T}^{(l)} \\ \alpha_{2,1}^{(l)} & \alpha_{2,2}^{(l)} & \cdots & \alpha_{2,N_T}^{(l)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{N_R,1}^{(l)} & \alpha_{N_R,2}^{(l)} & \cdots & \alpha_{N_R,N_T}^{(l)} \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

设  $y_m(t)$  表示基站第  $m$  个天线阵元的接收信号，则基站天线的接收信号可以表示为矢量形式，即

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \cdots, y_{N_R}(t)]^T$$

完全类似，移动台的发送信号可以表示为

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \cdots, s_{N_T}(t)]^T$$

式中， $s_n(t)$  是第  $n$  个天线阵元的发送信号。

移动终端与基站间的信号传输关系可以表示为

$$\mathbf{y}(t) = \int \mathbf{H}(\tau) \mathbf{s}(t - \tau) d\tau \quad (1.66)$$

考虑如图 1.46 所示的下行多输入多输出链路系统, 基站天线阵元间距相对于发送天线与接收天线的距离来说是很小的, 移动台天线的空域相关性与基站天线无关。所以, 对于移动终端天线的两个不同阵元  $n_1$  和  $n_2$ , 它们的相关系数可以表示为

$$\rho_{n_1, n_2}^{\text{MS}} = \left\langle \left| \alpha_{m, n_1}^{(l)} \right|^2, \left| \alpha_{m, n_2}^{(l)} \right|^2 \right\rangle, m = 1, 2, \dots, N_T$$

注意: 相关系数  $\rho_{n_1, n_2}^{\text{MS}}$  与序数  $m$  无关。对于环绕散射体的移动终端, 当移动终端的天线阵元间距超过  $\lambda/2$  时, 其空域相关是可以忽略的, 这意味着有

$$\rho_{n_1, n_2}^{\text{MS}} = \left\langle \left| \alpha_{m, n_1}^{(l)} \right|^2, \left| \alpha_{m, n_2}^{(l)} \right|^2 \right\rangle \approx 0, n_1 \neq n_2, m = 1, 2, \dots, N_T$$

尽管如此, 在实践中常会出现移动终端天线各阵元之间距离为  $\lambda/2$  但空域相关系数不为零的情形, 特别是在室内。我们定义移动终端一个对称空域相关矩阵:

$$\mathbf{R}_{\text{MS}} = \begin{bmatrix} \rho_{1,1}^{\text{MS}} & \rho_{1,2}^{\text{MS}} & \cdots & \rho_{1,N_R}^{\text{MS}} \\ \rho_{2,1}^{\text{MS}} & \rho_{2,2}^{\text{MS}} & \cdots & \rho_{2,N_R}^{\text{MS}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{N_R,1}^{\text{MS}} & \rho_{N_R,2}^{\text{MS}} & \cdots & \rho_{N_R,N_R}^{\text{MS}} \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

式中,  $\mathbf{R}_{\text{MS}} = \rho_{l,k}^{\text{MS}}$ ,  $k, l = 1, 2, \dots, N_R$ 。矩阵  $\mathbf{R}_{\text{MS}}$  的对角线元素对应于自相关系数, 因而全部等于 1 (即  $\rho_{l,l}^{\text{MS}} = 1$ ,  $l = 1, 2, \dots, N_R$ )。

考虑一个典型城区环境, 在基站周围无局部散射体, 而移动终端环绕着散射体。这是因为基站通常设置在局域散射体之上以便减小路径损耗。在此情形下, 基站的功率方位谱局限于相对较窄的波束宽度。考虑如图 1.46 所示的上行多输入多输出链路, 只要发送天线与接收天线充分隔离, 移动终端的天线阵元密集地分布趋向于具有相同的辐射模式, 照射到周围相同散射体上<sup>[40]</sup>。而且基站天线的空域相关性与移动终端天线无关, 因此对于基站天线的不同阵元  $m_1$  和  $m_2$ , 其相关系数可以表示为

$$\rho_{m_1, m_2}^{\text{BS}} = \left\langle \left| \alpha_{m_1, n}^{(l)} \right|^2, \left| \alpha_{m_2, n}^{(l)} \right|^2 \right\rangle, n = 1, 2, \dots, N_T \quad (1.68)$$

利用式 (1.68), 定义基站一个对称空域相关矩阵:

$$\mathbf{R}_{\text{BS}} = \begin{bmatrix} \rho_{1,1}^{\text{BS}} & \rho_{1,2}^{\text{BS}} & \cdots & \rho_{1,N_T}^{\text{BS}} \\ \rho_{2,1}^{\text{BS}} & \rho_{2,2}^{\text{BS}} & \cdots & \rho_{2,N_T}^{\text{BS}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{N_T,1}^{\text{BS}} & \rho_{N_T,2}^{\text{BS}} & \cdots & \rho_{N_T,N_T}^{\text{BS}} \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

与式 (1.67) 类似, 式 (1.69) 对角线元素全部等于 1。注意式 (1.67) 和式 (1.69) 中的相关系数  $\rho_{k,l}^{\text{MS}}$  和  $\rho_{k,l}^{\text{BS}}$  对于给定功率方位谱模型来说可以由空域相关函数解析地决定, 如均匀分布的功率方位谱模型的空域相关函数式 (1.56)。为生成式 (1.65) 中的信道增益矩阵  $\tilde{\mathbf{H}}_l$ , 需要发送天线与接收天线间的信道相关信息。事实上, 基站与移动终端空域相关矩阵  $\mathbf{R}_{\text{BS}}$  和  $\mathbf{R}_{\text{MS}}$  没有提供充分的信息以便生成  $\tilde{\mathbf{H}}_l$ 。如图 1.46 所示, 需要发送天线与接

收天线“对”间的相关系数  $\alpha_{m_1, n_1}^{(l)}$  和  $\alpha_{m_2, n_2}^{(l)}$ ，即

$$\rho_{n_2, m_2}^{n_1, m_1} = \left\langle \left| \alpha_{m_1, n_1}^{(l)} \right|^2, \left| \alpha_{m_2, n_2}^{(l)} \right|^2 \right\rangle \quad (1.70)$$

式中， $n_1 \neq n_2$  和  $m_1 \neq m_2$ 。一般来说，目前还没求解式 (1.70) 的理论，通常在对于所有  $l$  假设信道系数  $\alpha_{m, n}^{(l)}$  是独立同分布的情形下，它可以近似为

$$\rho_{n_2, m_2}^{n_1, m_1} \cong \rho_{n_1, n_2}^{\text{MS}} \rho_{m_1, m_2}^{\text{BS}} \quad (1.71)$$

考虑具有空域相关性的多输入多输出信道的生成问题，与 1.2.2 小节所讨论的时域相关信道的生成完全类似，其根本问题就是将所考虑的空域相关特性附加到一般空域不相关（或独立）信道上。

### 1. 具有相关特性的 MIMO 信道系数的生成

假设 MIMO 衰落信道的第  $l$  条传输路径能表示为一个  $N_T N_R \times 1$  维矢量

$$\alpha_l = [\alpha_1^{(l)}, \alpha_2^{(l)}, \dots, \alpha_{N_T N_R}^{(l)}]^T$$

这是式 (1.65) 所示的不相关 MIMO 衰落信道增益矩阵  $\tilde{\mathbf{H}}_l$  的矢量形式。其中， $\alpha_k^{(l)}$  是具有零均值、单位方差、互不相关的高斯随机变量，即

$$E\{\alpha_k^{(l)}\} = 0, \quad E\{|\alpha_k^{(l)}|^2\} = 1, \quad \forall l, k; \quad \langle \alpha_\kappa^{(l)}, \alpha_k^{(l)} \rangle = 0, \quad \forall \kappa \neq k \text{ 以及 } \zeta \neq l$$

假设有一个  $N_T N_R \times N_T N_R$  维的复矩阵  $\mathbf{C}$ ，我们称之为信道相关“定型”矩阵或信道对称映射矩阵，通过如下构造生成相关 MIMO 衰落信道系数，即令

$$\mathcal{H}_l = \sqrt{P_l} \mathbf{C} \alpha_l \quad (1.72)$$

式中， $P_l$  是第  $l$  条传输路径的平均功率<sup>[40,46]</sup>。而  $\mathcal{H}_l$  是  $N_T N_R \times 1$  维相关 MIMO 信道矢量，具有相关的 MIMO 衰落信道系数：

$$\mathcal{H}_l = [\eta_{1,1}^{(l)}, \eta_{2,1}^{(l)}, \dots, \eta_{N_T,1}^{(l)}, \dots, \eta_{1,N_R}^{(l)}, \eta_{2,N_R}^{(l)}, \dots, \eta_{N_T,N_R}^{(l)}]^T$$

事实上，式 (1.72) 的信道相关定型矩阵  $\mathbf{C}$  定义了信道的空域相关系数。下面讨论如何生成信道相关定型矩阵  $\mathbf{C}$ 。由式 (1.71) 可得空域相关矩阵

$$\mathbf{R} = \begin{cases} \mathbf{R}_{\text{BS}} \otimes \mathbf{R}_{\text{MS}} & \text{下行} \\ \mathbf{R}_{\text{MS}} \otimes \mathbf{R}_{\text{BS}} & \text{上行} \end{cases} \quad (1.73)$$

式中，符号  $\otimes$  表示 Kronocker 乘积。利用式 (1.73) 中的矩阵  $\mathbf{R}$ ，得到一个均方根相关矩阵  $\mathbf{\Gamma}$ ，即

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{cases} \sqrt{\mathbf{R}} & \text{实型} \\ \mathbf{R} & \text{复型} \end{cases}$$

式中，矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  是非奇异的，利用 Cholesky 分解或平方根分解，矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  能被分解为相关定型矩阵或对称映射矩阵之积的形式：

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{C} \mathbf{C}^T \quad (1.74)$$

由矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  获得定型矩阵  $\mathbf{C}$  是利用 Cholesky 分解还是平方根分解，取决于  $\mathbf{R}_{\text{BS}}$  和  $\mathbf{R}_{\text{MS}}$  是实矩阵还是复矩阵<sup>[37]</sup>。我们将满足空域相关系数  $\mathbf{R}$  的信道生成过程总结为图 1.47 所示的流程。

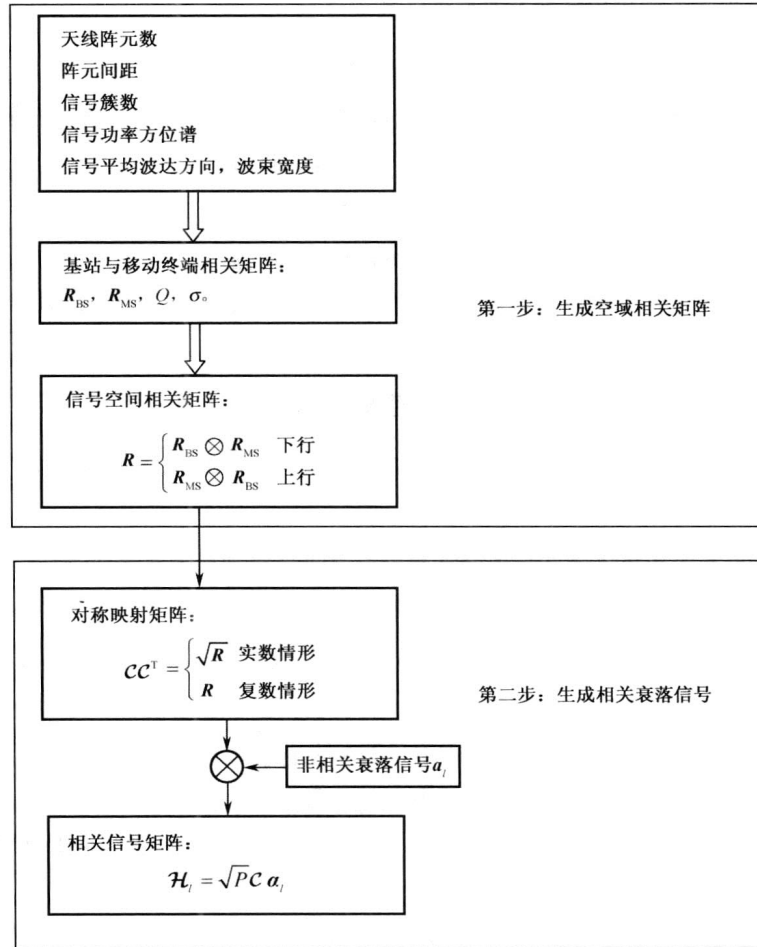


图 1.47 I-METRA 多输入多输出信道模型的生成

## 2. I-METRA MIMO 信道生成

I-METRA (Intelligent Multi-Element Transmit and Receive Antennas) MIMO 信道模型是一些实业及研究机构提出的<sup>[36-39]</sup>。其基础是前面讨论的随机 MIMO 信道模型，基于均匀型、截断高斯型或截断拉普拉斯型功率方位谱模型空域相关特性对应于均匀线阵生成相关 MIMO 衰落信道。在下面论述过程中，我们将截断高斯型和截断拉普拉斯型功率方位谱模型分别简称为高斯和拉普拉斯功率方位谱模型。

如图 1.47 所示，I-METRA MIMO 信道模型整个生成过程主要由两大步骤完成。第一步是由信道特定结构决定的基站及移动终端相关矩阵 ( $R_{BS}$  和  $R_{MS}$ ) 与归一化因子  $Q$  的产生，信道结构涉及基站、移动终端的天线结构、阵元间距、传输路径簇的数目、每个路径簇的功率方位谱、角度扩展和波达角等因素。对应于上行和下行链路的空域相关矩阵  $R$  由式 (1.73) 决定。第二步是由式 (1.74) 决定对称映射矩阵  $C$ ，再由式 (1.72) 借助于非相关衰落信号生成相关 MIMO 衰落信道。



一旦遵从图 1.47 所示的程序对每一传输链路生成相关 MIMO 衰落信道系数，整体 MIMO 衰落信道可以借助于延迟线模型模拟。图 1.48 所示为综合考虑延迟及功率分布以实现整体 MIMO 衰落信道特征的功能框图<sup>[34]</sup>。其非相关衰落信道是利用预存多普勒谱生成的，再用空域相关映射矩阵左乘便生成相关 MIMO 衰落信道。

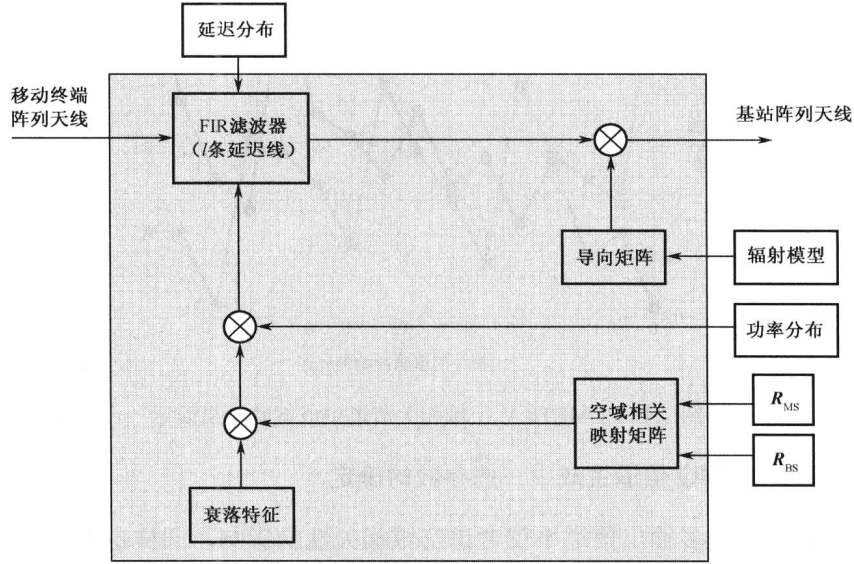


图 1.48 生成 I-METRA MIMO 衰落信道功能框图

将相关衰落信号经过一个抽头系数和时延参数满足特定每条路径的平均功率与每条路径的特定延时的有限长单位脉冲响应 (FIR) 滤波器即生成满足给定功率延迟分布 (PDP) 的信号。而阵列天线的辐射模式的调节可以通过导向矩阵实现。

**例 1.4** 对于一个  $4 \times 4$  多输入多输出信道模型，基站天线阵元间距为  $0.5\lambda$ ，基站及移动终端的复空域相关矩阵可根据式 (1.62) 求得。对于不同的波达角及角度扩展有不同的复空域相关矩阵。设基站具有拉普拉斯分布功率方位谱，波达角为  $20^\circ$ ；移动终端具有均匀分布功率方位谱，波达角及角度扩展分别为  $67.5^\circ$  和  $35^\circ$ ，相应复空域相关矩阵分别为

$$\mathbf{R}_{\text{BS}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4290 + j0.7766 & -0.3642 + j0.5472 & -0.4527 - j0.0521 \\ 0.4290 - j0.7766 & 1 & 0.4290 + j0.7766 & -0.3642 + j0.5472 \\ -0.3642 - j0.5472 & 0.4290 - j0.7766 & 1 & 0.4290 + j0.7766 \\ -0.4527 + j0.0521 & -0.3642 - j0.5472 & 0.4290 - j0.7766 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{\text{MS}} = \begin{bmatrix} 1 & -0.6906 + j0.3419 & 0.4903 - j0.3626 & -0.3733 + j0.3450 \\ -0.6906 - j0.3419 & 1 & -0.6906 + j0.3419 & 0.4903 - j0.3626 \\ 0.4903 + j0.3626 & -0.6906 + j0.3419 & 1 & -0.6906 + j0.3419 \\ -0.3733 - j0.3450 & 0.4903 + j0.3626 & -0.6906 + j0.3419 & 1 \end{bmatrix}$$

图 1.49 所示为根据上面给定的基站空域相关矩阵  $\mathbf{R}_{\text{BS}}$  和移动终端空域相关矩阵  $\mathbf{R}_{\text{MS}}$ ，利用图 1.47 所示的 I-METRA 空域相关信道流程生成的信道的时域脉冲响应幅度值的两次独立实验的变化曲线图。从图中曲线变化状态可以断定，信道参数间的空域相关性约束了

它们的相对变化。

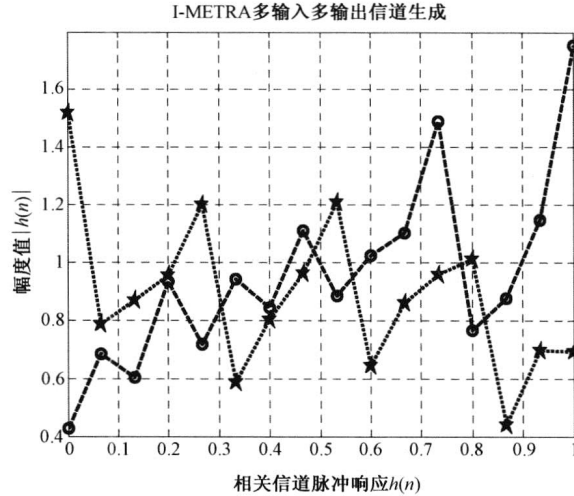


图 1.49 I-METRA 空域相关信道生成试验结果演示

### 3. I-METRA MIMO 信道生成中一些参数的确定

I-METRA 多输入多输出信道不仅考虑空域相关性的影响，同时也考虑移动终端的相对运动和信道中媒质的相对运动影响、有或无直达波的影响、天线特性的影响等因素。

#### 1) 多普勒谱

单输入单输出信道的一个衰落过程可以通过任何信道模型独立生成。独立衰落随机过程有许多不同的生成方法，滤波型的高斯白噪声信道模型是非常有用的，主要是因为它易于容纳各种类型的多普勒谱，如平坦的、经典的、拉普拉斯多普勒谱 (I-METRA) 等。另外，具有不同多普勒谱的 MIMO 信道也能通过修正 I-METRA 信道模型生成。

#### 2) 莱斯衰落型 MIMO 信道

与单输入单输出莱斯衰落信道形成鲜明对比，多输入多输出莱斯衰落信道必须考虑收发天线不同阵元之间直达波信号的相位变化。如图 1.50 所示，莱斯衰落过程可用两个矩阵之和表示，每个分量的权重设定为直达波信号与散射波信号的功率比。第一条莱斯衰落信道矩阵  $\mathbf{H}_0$  可以表示为

$$\mathbf{H}_0 = \sqrt{K_0} \sqrt{P_0} \mathbf{H}_{\text{LOS}} + \sqrt{P_0} \mathbf{H}_{\text{Rayleigh}}$$

式中， $P_0$  为第一条传输路径的平均功率； $K_0$  为直达波与瑞利分量的功率比；矩阵  $\mathbf{H}_{\text{LOS}}$  为直达波分量<sup>[45,54]</sup>，其定义为

$$\mathbf{H}_{\text{LOS}}(t) = e^{j2\pi f_d t} \mathbf{a}(\theta_R) \mathbf{b}^T(\theta_T)$$

式中， $\mathbf{a}(\theta_R)$  和  $\mathbf{b}(\theta_T)$  分别是接收端和发送端的阵列天线导向矢量。 $f_d = (v/\lambda) \cos \phi_0$ ，参数  $\phi_0$  为移动终端运动方向与直达波分量间的夹角，如图 1.50 所示。 $\theta_R$  和  $\theta_T$  分别表示接收信号的波达角与发射信号的波离角。因子  $e^{j2\pi f_d t}$  为多普勒调制波。

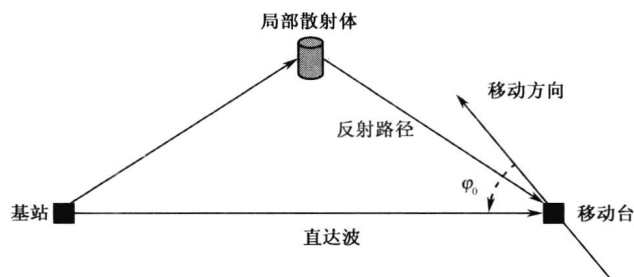


图 1.50 莱斯衰落 MIMO 信道示意图

### 3) 导向矩阵与空时信道的传输模型

设  $\varphi$  为波达方向 (DoA)。波达角 (AoA) 表示每一个多径分量到达接收天线的角度, 平均波达方向是指这些波达角的平均值, 如图 1.51 所示。

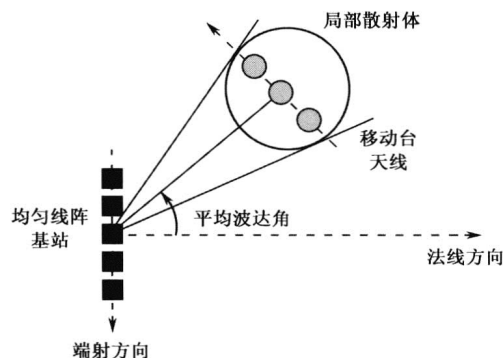


图 1.51 平均 AoA 示意图

当波达方向  $\varphi \neq 0^\circ$ , 如图 1.51 所示, 电波辐射场的平均波达方向 (DoA) 不是天线法向, 如图 1.40 所示, 两个相邻间距为  $d$  的阵元辐射模式有一个值等于  $d \sin \varphi$  的相位差。至此, 在我们所述的相关矩阵以及衰落信号的生成原理中还没有考虑这一特殊问题的影响。波束形成系统虽涉及阵元间的相位差, 但是, 这一问题必然反映到信道模型中。

我们考虑当所有的散射体环绕在移动终端附近时平均波达方向 (DoA) 的影响。如图 1.51 所示, 基站的照射场趋向于被局限于一个很窄的 (由平均波达方向确定的) 方位域内<sup>[40]</sup>。当波达方向  $\varphi \neq 0^\circ$  时, 移动终端天线相邻两个阵元的接收信号有时延差  $\tau = (d/c) \cdot \sin \varphi$ 。依次修正接收信号方程式 (1.66) 的  $\mathbf{y}(t)$ , 得修正后的接收信号表达式为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(\varphi_{BS}) \int \mathbf{H}(\tau) \mathbf{s}(t - \tau) d\tau \quad (1.75)$$

式中,  $\mathbf{W}(\varphi_{BS})$  是给定平均波达方向  $\varphi$  时的导向对角阵。导向对角阵的定义为

$$\mathbf{W}(\varphi) = \text{diag}\{\omega_1(\varphi), \omega_2(\varphi), \dots, \omega_m(\varphi)\}$$

式中,  $\omega_m(\varphi)$  表示在平均波达方向为  $\varphi$  时第  $m$  阵元相对于参考阵元的平均相移。对于阵元间距为  $d$  的均匀线阵 (ULA),  $\omega_m(\varphi)$  为

$$\omega_m(\varphi) = f_m(\varphi) e^{-j2\pi(m-1)d \sin \varphi / \lambda} \quad (1.76)$$

式中， $f_m(\varphi)$  是第  $m$  阵元的辐射模式。注意式 (1.76) 结合了天线阵元的辐射模式与平均波达方向的综合影响。当阵列的不同阵元的接收信号是相互统计独立（不相关）时，不同阵元间的相位差是随机变化的。在此情形，就没有必要定义平均波达方向以及如式 (1.75) 那样引入导向对角阵，也就是说，不需要修正式 (1.66)，它仍然是可以应用的。

在上面的讨论中，我们隐含地假设接收天线是全向的。当接收端采用波束形成天线时，上面的讨论结果要做相应修正。在接收端采用波束形成天线时，接收机对不同来向的信号其响应特征是不同的。在到达接收天线主瓣方向内的多径信号能以非常低的衰减被接收，而在其他方向来的多径信号则被大大衰减，如图 1.52 所示。在该模型中，信道冲激响应（以移动台 1 为例）可以表示为

$$h(t, \tau) = \sum_{l=0}^{L(t)-1} \alpha_{1,l} e^{j\varphi_{1,l}} \mathbf{a}(\theta_{1,l}) \delta(t - \tau_{1,l}(t))$$

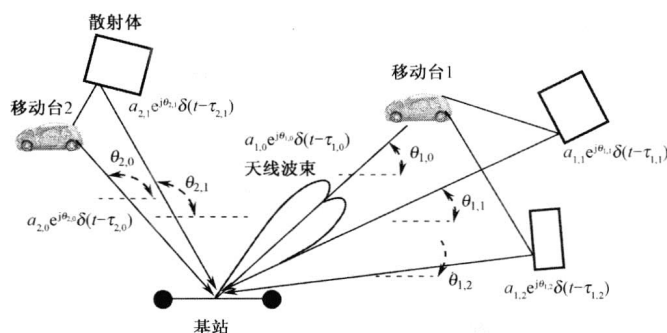


图 1.52 多径信道中方向性天线的传播模型图

基站采用阵列天线后，由于天线方向图的指向性，接收信号具有选择特性，结合图 1.18 所示的情形，如图 1.53 所示，天线对于移动台 1 的信号有很好的响应，而对移动台 2 的信号具有抑制作用。这是因为天线方向图的主瓣指向移动台 1，移动台 2 的信号处于天线方向图的次瓣。这样依据阵列天线响应方向图可以实现对信号的选择。

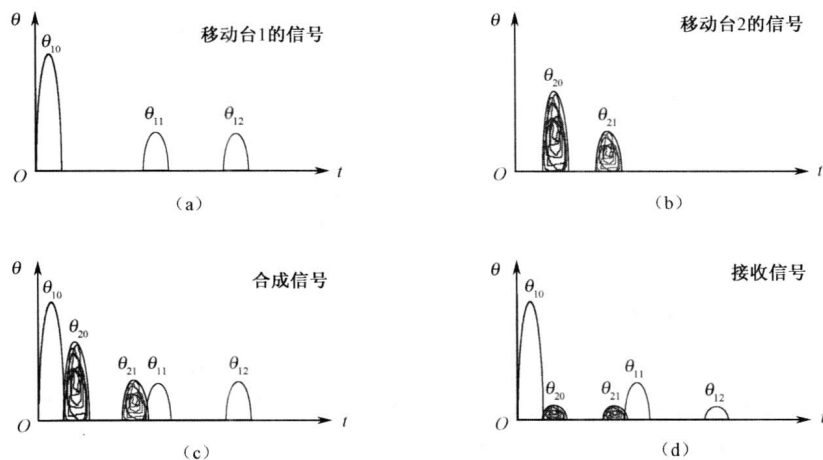


图 1.53 采用阵列天线后接收信号示意图

### 1.4.3 SCM 多输入多输出信道模型

SCM (Spatial Channel Model) 是由 Ad Hoc 工作组 (Ad Hoc Group, AHG) 在 3GPP 和 3GPP2 中建议的空域信道模型。其目标是对空域信道确定一些参数, 建立一套生成程序<sup>[26,42]</sup>。它是一个基于传输路径的模型。它在功率延迟分布、功率方位谱和阵列天线结构基础上建立了子路径分量模型。SCM 是一个既可以用于单输入单输出又可用于多输入多输出系统的信道模型。基于传输路径的模型依据功率延迟分布、功率方位谱和阵列天线结构生成子路径分量, 其用途和优点如下: 直接描述 MIMO 信道的统计特性; 在时域、空域和频域维持信道原有统计特性; 信道分析与生成简单易行; 可灵活地改变信道功率延迟分布、功率方位谱的类型; 支持直达波和无直达波信道; 信道矩阵  $\mathbf{H}$  有效秩依赖于每条路径的子路径数。

#### 1. SCM 链路级信道参数

对于链路级的信道我们仅能获得信道特征的一些采样数据。链路级的模拟对于理解信道的内在特性、评估其诸如系统平均吞吐量、中断率等性能是远不够的。例如, 系统级属性的功能流程, 调度和混合自动重传请求 (Hybrid Automatic Repeat reQuest, HARQ) 等在链路级的模拟中是无法表征的。事实上, 通过比较给定算法在不同实验中的性能, 链路级的模拟基此实现系统校正的目的<sup>[26]</sup>。对于基站, 其功率方位谱 (PAS) 服从拉普拉斯分布<sup>[26]</sup>。若记波离角 (AoD) 为  $\bar{\theta}$ , 记均方根角度扩展为  $\sigma_A$ , 则在角度  $\theta$  处基站每条路径的功率方位谱为

$$P(\theta, \sigma_A, \bar{\theta}) = N_0 e^{-\sqrt{2}|\theta-\bar{\theta}|/\sigma_A} G(\theta), -\pi+\bar{\theta} \leq \theta \leq +\pi+\bar{\theta}$$

式中,  $G(\theta)$  是基站天线的增益;  $N_0$  是由下式决定的归一化常数:

$$\frac{1}{N_0} = \int_{-\pi+\bar{\theta}}^{+\pi+\bar{\theta}} e^{-\sqrt{2}|\theta-\bar{\theta}|/\sigma_A} G(\theta) d\theta$$

如果基站采用图 1.54 所示的扇形天线 (如 3-扇区或 6-扇区形天线), 则计算功率方位谱时必须考虑天线增益。基站端一个常用天线增益模式为

$$\alpha(\theta) = -\min \left[ 12 \left( \frac{\theta}{\theta_{3\text{dB}}} \right)^2, \alpha_m \right] [\text{dB}], -\pi \leq \theta \leq +\pi \quad (1.77)$$

式中,  $\theta_{3\text{dB}}$  和  $\alpha_m$  分别表示 3dB 波束宽度和天线最大衰减<sup>[28]</sup>。

天线增益定义为  $G(\theta) = 10^{\alpha(\theta)/10}$ 。对 3dB 波束宽度  $\theta_{3\text{dB}} = 70^\circ$  和天线最大衰减  $\alpha_m = 20\text{dB}$  的 3-扇区天线, 其天线增益为 14dBi (注: dBi 为天线增益单位), 如图 1.55 所示<sup>[26]</sup>。参阅文献[26]可以类似做出 3dB 波束宽度  $\theta_{3\text{dB}} = 35^\circ$  和天线最大衰减  $\alpha_m = 23\text{dB}$  的 6-扇区天线, 其天线增益为 17dBi 的分区模式与天线增益曲线图。

图 1.55 所示为波达角度 (AoA) 为  $22.5^\circ$ , 角度扩展 (AS) 为  $35^\circ$  的功率方位谱, 此特征曲线考虑了天线增益随子路径方向  $\theta$  的变化因素。图中还画出了式 (1.77) 天线增益的变化曲线以及拉普拉斯功率方位谱与天线增益乘积的变换曲线。

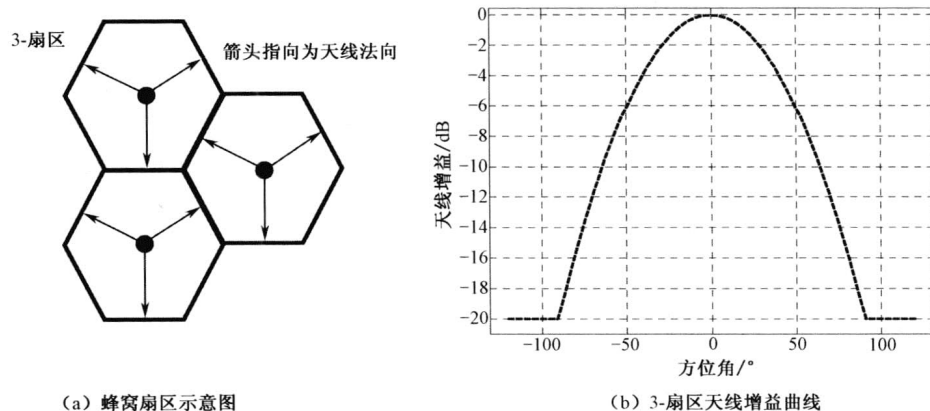


图 1.54 扇区形蜂窝与扇区形天线增益

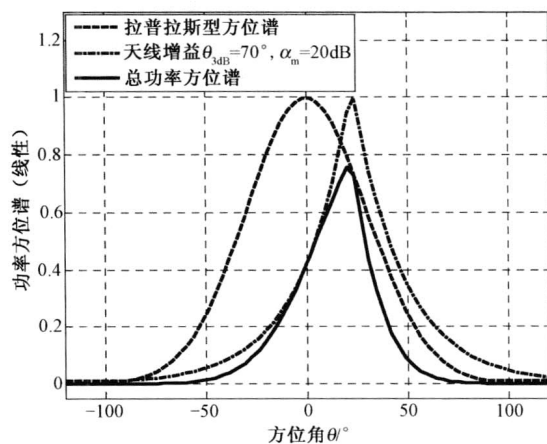


图 1.55 总功率方位谱与天线增益

另外，假设到达移动终端的一条传输路径的功率方位谱满足拉普拉斯分布或区间  $[0, 2\pi]$  上的均匀分布，由于移动终端常用各向同性天线，功率方位谱中没有天线增益因子。若到达路径的波达角为  $\bar{\theta}$ ，角度扩展的均方根为  $\sigma_A$ ，则以角度  $\theta$  到达移动终端子路径的拉普拉斯分布型功率方位谱为

$$P(\theta, \sigma_A, \bar{\theta}) = N_0 e^{-\sqrt{2}|\theta - \bar{\theta}|/\sigma_A}, \quad -\pi + \bar{\theta} \leq \theta \leq +\pi + \bar{\theta} \quad (1.78)$$

式中， $N_0$  是由下式给定的归一化常数

$$\frac{1}{N_0} = \int_{-\pi + \bar{\theta}}^{+\pi + \bar{\theta}} e^{-\sqrt{2}|\theta - \bar{\theta}|/\sigma_A} d\theta = \sqrt{2}\sigma_A (1 - e^{-\sqrt{2}\pi/\sigma_A})$$

而以角度  $\theta$  到达移动终端子路径的均匀分布型功率方位谱为

$$P(\theta, \sigma_A, \bar{\theta}) = N_0, \quad -\sqrt{3}\sigma_A + \bar{\theta} \leq \theta \leq +\sqrt{3}\sigma_A + \bar{\theta} \quad (1.79)$$

式中， $N_0 = 1/2\sqrt{3}\sigma_A$ 。式 (1.78) 和式 (1.79) 中的功率方位谱没有考虑天线增益因素。

## 2. SCM 链路级信道模型

图 1.56 所示为基于传输路径链路级空域信道模型实现的总步骤<sup>[26]</sup>。对于给定功率方位谱的信道其生成方法的论述已经在 1.4.2 节中给出。图 1.56 包括了基于传输路径的空域信道模型的信道参数的生成。基于传输路径的空域信道模型的信道参数的定义如图 1.57 所示及表 1.18 说明。考虑具有  $N_T$  个发送阵元的发送天线系统以及具有  $N_R$  个接收阵元的接收天线系统，则第  $n$  个发送阵元与第  $m$  个接收阵元间的第  $l$  条传输路径的信道系数可以表示为

$$h_{m,n,l}(t) = \sqrt{\frac{P_l}{I}} \sum_{i=1}^l G_{BS}(\theta_{n,l,i}) \Theta_{n,m,l,i} G_{MS}(\varphi_{m,l,i}) \quad (1.80)$$

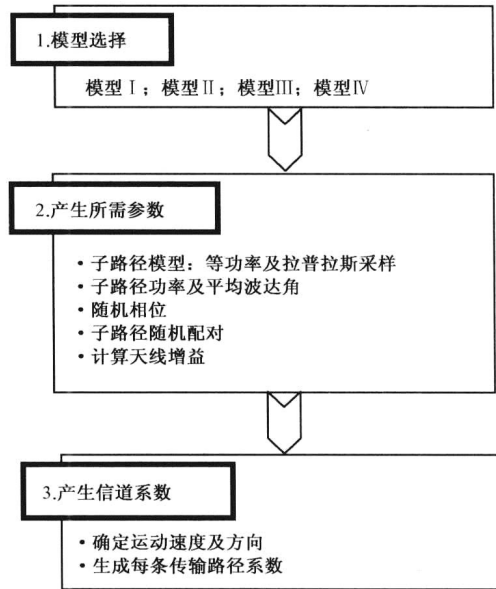


图 1.56 空域信道的链路级信道模拟生成步骤

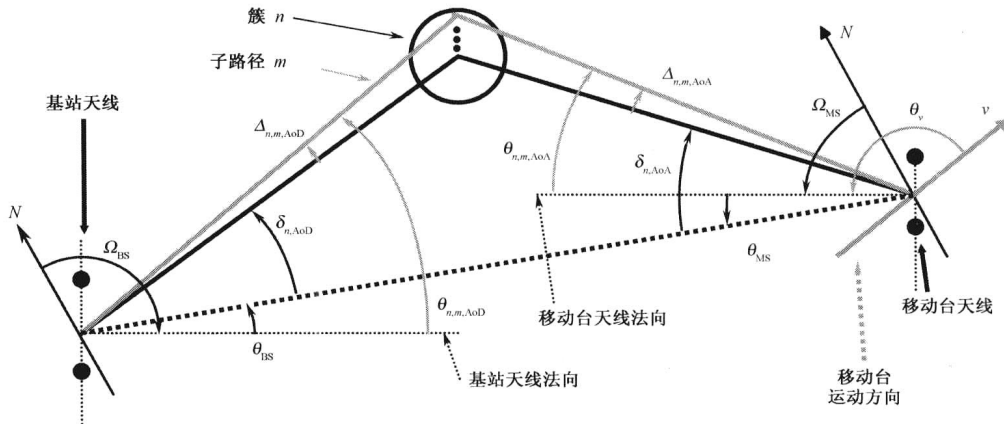


图 1.57 基站及移动台构成的空域信道的角度参数示意图

式中， $P_l$ 为第 $l$ 条传输路径簇的功率； $G_{\text{BS}}(\theta_{n,l,i})$ 表示从基站的第 $n$ 个阵元发出的第 $l$ 条传输路径簇的第 $i$ 个子路径的功率方位谱； $\Theta_{n,m,l,i}$ 表示第 $n$ 个发送阵元与第 $m$ 个接收阵元间的第 $l$ 条传输路径簇的第 $i$ 个子路径的相位； $G_{\text{MS}}(\varphi_{m,l,i})$ 表示第 $l$ 条传输路径簇的第 $i$ 个子路径到第 $m$ 个接收阵元的传输路径功率方位谱； $l$ 为相应路径的子路径数； $\theta_{n,l,i}$ 及 $\varphi_{m,l,i}$ 与表 1.18 中的 $\theta_{n,m,\text{AoD}}$ 和 $\theta_{n,m,\text{AoA}}$ 有类似的意义。

表 1.18 关于图 1.57 中各个参数符号的物理解释<sup>[26]</sup>

符号	含义解释
$\Omega_{\text{BS}}$	基站阵列天线定位角，定义为天线法向与参考方向（正北方）的夹角
$\theta_{\text{BS}}$	基站与移动台间直达波信号波达方向与基站天线法向的夹角
$\delta_{n,\text{AoD}}$	第 $n$ 条传输路径簇的波达方向与直达波信号波达方向的夹角
$\Delta_{n,m,\text{AoD}}$	第 $n$ 条传输路径簇的第 $m$ 个子路径相对于第 $n$ 条传输路径波达方向的偏角
$\theta_{n,m,\text{AoD}}$	第 $n$ 条传输路径簇的第 $m$ 个子路径波达方向关于基站天线法向的夹角
$\Omega_{\text{MS}}$	移动台阵列天线定位角，定义为天线法向与参考方向（正北方）的夹角
$\theta_{\text{MS}}$	移动台与基站间直达波信号波达方向与移动台天线法向的夹角
$\delta_{n,\text{AoA}}$	第 $n$ 条传输路径簇的波达角与直达波信号波达角的夹角
$\Delta_{n,m,\text{AoA}}$	第 $n$ 条传输路径簇的第 $m$ 个子路径相对于第 $n$ 条传输路径波达方向的偏角
$\theta_{n,m,\text{AoA}}$	第 $n$ 条传输路径簇的第 $m$ 个子路径波达方向与移动终端天线法向的夹角
$v$	终端的移动速度
$\theta_v$	终端的移动方向与终端天线法向的夹角

对均匀功率子路径的特殊情形，式（1.80）中各因子具体可写作

$$\left. \begin{aligned} G_{\text{BS}}(\theta_{n,l,i}) &= \sqrt{g_{\text{BS}}(\theta_{n,l,i})} \exp[j\kappa d_n \sin(\theta_{n,l,i}) + j\Phi_{n,l,i}] \\ \Theta_{n,m,l,i} &= \exp[j\kappa \|\mathbf{v}\| \cos(\varphi_{m,l,i} - \varphi_v) t] \\ G_{\text{MS}}(\varphi_{m,l,i}) &= \sqrt{g_{\text{MS}}(\varphi_{m,l,i})} \exp[j\kappa d_m \sin(\varphi_{m,l,i})] \end{aligned} \right\} \quad (1.81)$$

式中， $\kappa = 2\pi/\lambda$ ； $d_n$ 是基站阵列天线第 $n$ 个阵元与参考阵元之间间距； $d_m$ 是移动终端阵列天线第 $m$ 个阵元与参考阵元之阵元间距； $\Phi_{n,l,i}$ 是从第 $n$ 个发送阵元发出的第 $l$ 条传输路径簇的第 $i$ 个子路径的随机相位； $\varphi_v$ 是移动终端的运动方向； $g_{\text{BS}}(\theta_{n,l,i})$ 和 $g_{\text{MS}}(\varphi_{m,l,i})$ 对应传输路径的功率方位谱。

对离散拉普拉斯模型，式（1.80）中的各个因子为

$$\left. \begin{aligned} G_{\text{BS}}(\theta_{n,l,i}) &= \sqrt{P_{\text{BS}}(\theta_{n,l,i}) g_{\text{BS}}(\theta_{n,l,i})} \exp[j\kappa d_n \sin(\theta_{n,l,i}) + j\Phi_{n,l,i}] \\ \Theta_{n,m,l,i} &= \exp[j\kappa \|\mathbf{v}\| \cos(\varphi_{m,l,i} - \varphi_v) t] \\ G_{\text{MS}}(\varphi_{m,l,i}) &= \sqrt{P_{\text{MS}}(\varphi_{m,l,i}) g_{\text{MS}}(\varphi_{m,l,i})} \exp[j\kappa d_m \sin(\varphi_{m,l,i})] \end{aligned} \right\} \quad (1.82)$$

对莱斯信道<sup>[26]</sup>，其直达波分量和非直达波分量的信道系数分别为

$$h_{m,n,l}^{\text{LOS}}(t) = \sqrt{\frac{1}{K+1}} h_{m,n,0}(t) + \sqrt{\frac{K}{K+1}} \sum_{i=1}^l \sqrt{G_i} \Theta_{m,l,i} \cdot \exp[j(kd_n \sin(\theta_{n,l,i}) + kd_m \sin(\varphi_{m,l,i}) + \Phi_{\text{LOS}})]$$



和

$$h_{m,n,l}^{\text{LOS}}(t) = \sqrt{\frac{1}{K+1}} h_{m,n,l}(t), l \neq 0$$

式中,  $K$  是莱斯因子。如  $K=0$ , 则上式中仅有第一条传输路径的一条子路径为直达波, 而式 (1.81) 和式 (1.82) 仍然适用于其余路径。

### 3. 基于传输路径的空域相关信道模型

通常两个阵元的信道系数可能在时域、空域均相关。信号空域相关是指从信源发出的同一信号由空间相互分离的两个阵元接收, 这两个接收信号是互相关的<sup>[43]</sup>。考虑一个间距为  $d$  的均匀线阵空域信道模型, 见图 1.40。两个相邻阵元关于第  $l$  条传输路径空域相关性定义为

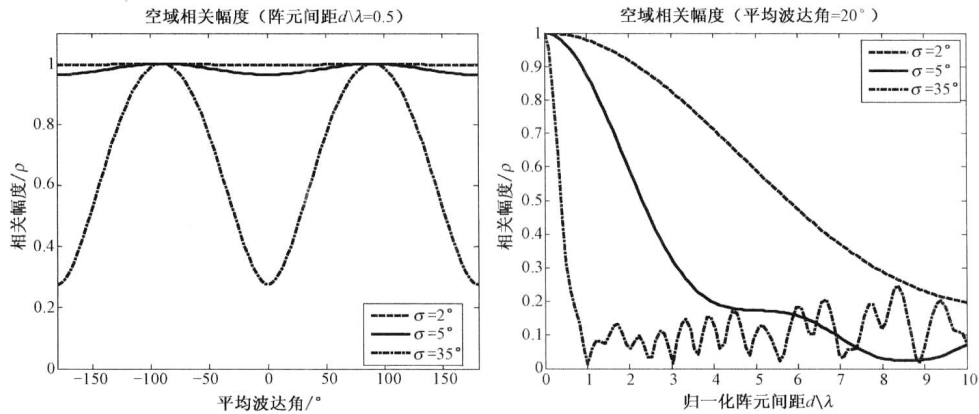
$$\rho(d) = E\{h_{m,l}(t)h_{m+1,l}^*(t)\} = \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(j2\pi d \sin(\theta)/\lambda) P\theta d\theta \quad (1.83)$$

在所有子路径有相等功率的情形, 式 (1.83) 可以简化为

$$\rho_{\text{SCM}}^{\text{SC}}(d) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \exp(j2\pi d \sin \theta_i / \lambda)$$

式中,  $\theta_i$  是第  $i$  条子路径的波达角<sup>[58]</sup>。对于平均波达角  $\bar{\theta}$ , 第  $i$  条子路径的波达角可以表示为  $\theta_i = \bar{\theta} + \Delta_i$ , 其中  $\Delta_i$  是相应的与期望角度扩展 (AS) 相联系的角度偏差。

图 1.58 所示为均匀子路径法的空域相关系数随角度扩展 (AS)、平均波达角和天线阵元间距的变化情形。明显地, 空域相关性随角度扩展 (AS) 或阵元间距增加而降低。另外, 如图 1.58 (a)、(c) 所示, 当平均波达角 (AoA)  $\bar{\theta} = \pm 90^\circ$  时, 空域相关值接近于 1, 这时信号来自于阵列天线的端射方向, 如图 1.59 (b) 所示, 天线的所有阵元经历几乎相同的信号波前; 而当平均波达角 (AoA)  $\bar{\theta} \rightarrow 0^\circ$  时, 这时信号来自于阵列天线的法线方向, 如图 1.59 (a) 所示, 空域相关值趋于 0。可以将前者理解为强制所有的波浪通过一个狭小的隘口, 后者让其通过宽阔海平面。图 1.59 以均匀线阵为例解释了这两种极端情形  $\bar{\theta} = 0^\circ$  和  $\bar{\theta} = \pm 90^\circ$ 。再注意, 当  $\bar{\theta} = \pm 90^\circ$  空域相关值接近于 1 时, 阵元间距  $d$  等于  $\lambda/2$ 。



(a) 信道相关系数随平均波达角及角度扩展变化的情形 (b) 信道相关系数随阵元间距及角度扩展变化的情形

图 1.58 信道空域相关系数随平均波达角及阵元间距变化的情形

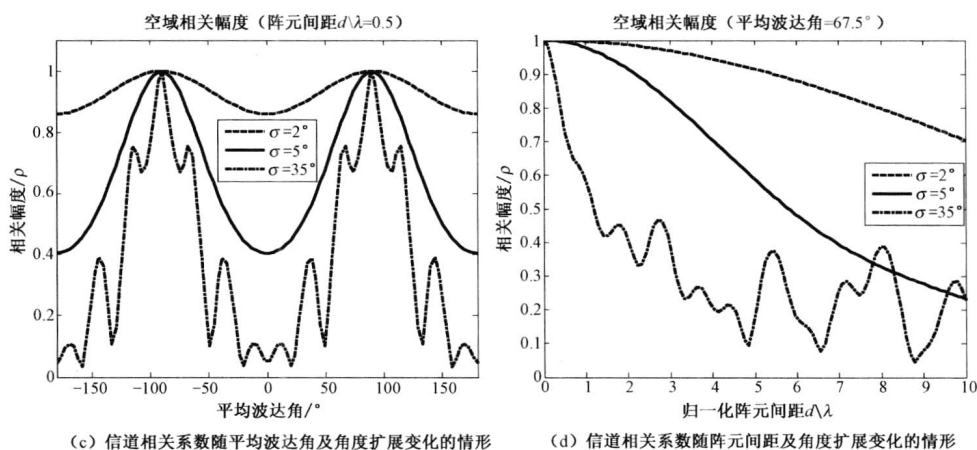


图 1.58 信道空域相关系数随平均波达角及阵元间距变化的情形 (续)

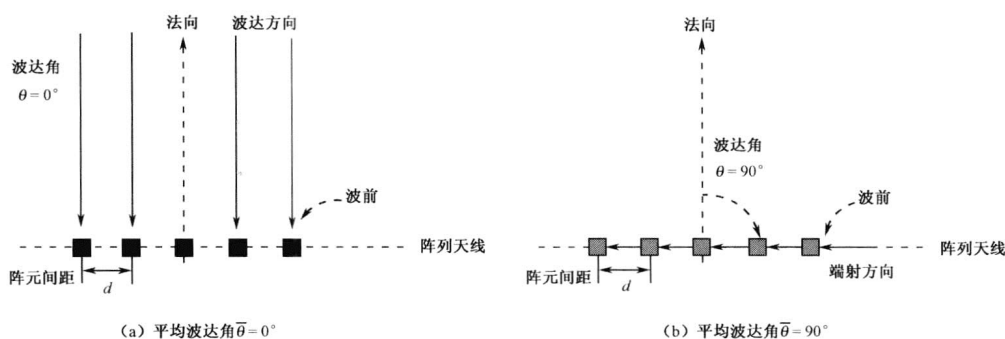


图 1.59 对入射波束两种极端情形的演示说明

图 1.58 所展示的情形再一次说明, 信道的空域弥散有助于降低其空域相关。而信道的弱空域相关性可以提升信道的分集增益, 这将在后文中予以说明和论证。

#### 4. 移动终端运动时空域相关信道模型

当移动终端运动时, 空域相关性由于多普勒扩展的作用是时变的。信号波达角 (AoA) 也是随着终端运动不断改变的, 当终端移动方向 (Direction of Travel, DoT) 变化时天线阵元间的相位差一般满足关系  $\tau \|\mathbf{v}\| \sin(\theta - \theta_v)$ , 其中  $\theta_v$  和  $\|\mathbf{v}\|$  分别表示移动方向 (DoT) 及移动速度,  $\tau$  为时延<sup>[43]</sup>, 且时域相关特征不能由功率方位谱 (PAS) 直接获得, 但对于均匀功率子路径其表达式为

$$\rho_{\text{SCM}}^{\text{TC}}(\tau) = E\{h_{m,l}(t+\tau)h_{m,l}^*(t)\} = \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(j2\pi\tau \|\mathbf{v}\| \sin(\theta - \theta_v) / \lambda) d\theta \quad (1.84)$$

若移动方向 (DoT)  $\theta_v = 90^\circ$ , 时域相关等于空域相关, 即

$$\rho_{\text{SCM}}^{\text{TC}}(\tau) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \exp(j2\pi\tau \|\mathbf{v}\| \cos(\theta_i - \theta_v) / \lambda) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \exp(j2\pi\tau \|\mathbf{v}\| \sin \theta_i) / \lambda$$

$$= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \exp(j2\pi d \sin \theta_i / \lambda) = \rho_{SCM}^{SC}(d) \quad (1.85)$$

式中， $d = \tau \|\mathbf{v}\|$ 。图 1.60 所示是当移动终端运动时关于不同移动方向（DoT）和平均波达角（AoA）信道时域相关系数随归一化距离的变化情况。明显地，信道时域相关性随着角度差  $\bar{\theta} - \theta_v$  的减小而增大。

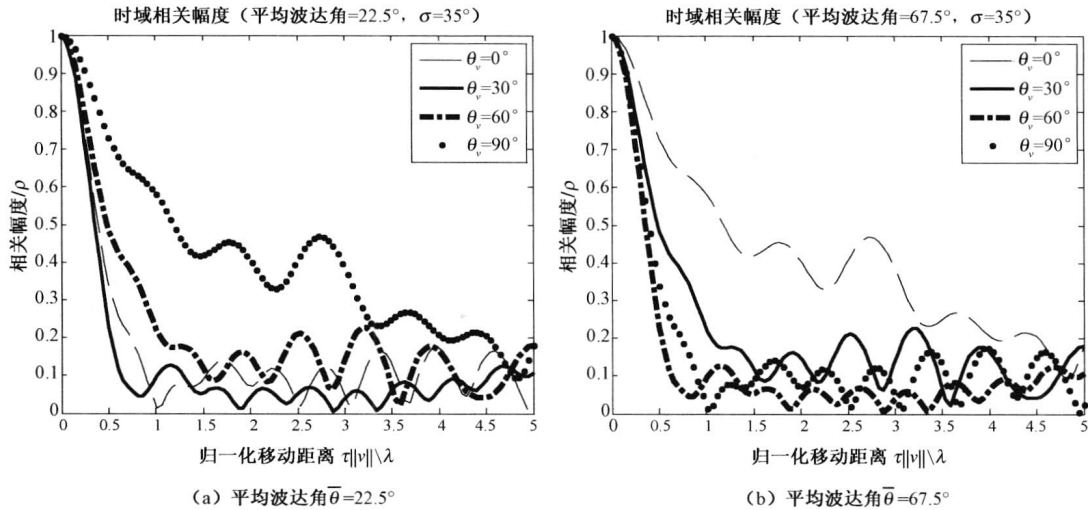


图 1.60 时域相关系数关于移动距离和运动方向的变化

当前信道的研究有丰富的成果。上面从时域、频域和空域对信道做了基础性论述，其应用有待后面各个章节来逐步展开。有兴趣的读者可以进一步阅读参考文献[46-57]。

## 1.5 天线分集及合并算法

### 1.5.1 分集增益的一些概念

多输入多输出系统就是在基站和移动终端均配置阵列天线。从上面讨论已知，基站天线阵元间距必须足够大（4~10 倍波长），以保证各个阵元接收信号不相关。而移动终端天线阵元间距约在 0.5 倍波长就可以保证各个阵元接收信号不相关。之所以能有这样的差异，关键是移动终端周围环绕丰富的散射体，即具有大量的多径信号。这或从一个侧面说明多输入多输出系统能够将多径传输的不利因素转化为有利因素。沿着这个思路，下面继续介绍一些有关的概念。

分集增益（Diversity Gain）就是利用分集技术使接收信号信噪比增加。“分”与“集”从字面看是一矛盾体，分是指能够提供同一信号的多个“模板”，集是指能将这些模板“收”集。空时分集是空时编码技术的核心机制，是应对多径衰落的关键技术。所谓衰落，其实是指信号强度的波动，它引起系统传输误比特率的增加。我们用分集来对抗衰落。

在无线通信系统中有三种类型的分集。

## 1. 分集技术的分类

### 1) 时域分集

通过结合信道编码与时间交织 (Time Interleaving) 技术, 在时域提供信号的多个模板。时域分集能够实现的关键是信道随时间快速变化, 即信道相干时间要小于信号交织符号时长, 即要求信道有时域“快变”特性。

### 2) 频域分集

频域分集即在频域提供原信号的多个模板。频域分集能够实现的关键是信道的相干带宽小于信号带宽, 即信道在频域内有“快变”特性。

### 3) 空域分集

空域分集也称为阵列天线分集, 即将同一个信号通过不同天线发射, 或由不同天线接收从不同途径到达的同一信号。天线分集能够实现的关键是阵元间距足够大以保证发送及接收的信号经历相互独立的传播路径, 或信道具有复杂多变的空间特性, 以保证从发射天线送出的一个信号经空间传播后能演变成历经不同路径、不同时延、相互独立的多个模板到达接收端。

上面讨论的三种分集技术其关键是在接收端有原信号的多个独立样本。这样, 同一信号的多个独立样本同时经历深度衰落的可能性就大为减小。上面对信道相干时间、相干带宽、相干距离的约束就是为保证这一点。这些都体现了“分”。而“集”是必须能最优地结合收到的信号波形, 以使接收信号信噪比最大化。在空域分集中, 有三个重要的分集合并方案, 它们是选择性分集、最大比合并分集、等增益合并分集, 它们是在已知信道参数条件下, 以最优方式组合接收信号的一个方法, 其具体实现方法在后面讨论。

还可以进一步将阵列天线分集分为接收分集与发送分集。

## 2. 阵列天线分集的分类

### 1) 接收分集

在接收端配置阵列天线来改善信号的质量。由于功率约束、移动性等要求, 使得发送分集即基站阵列天线配置更为合理。

### 2) 发送分集

在发送端配置阵列天线来改善信号的质量。但这需要信道的完全信息, 前面讲过, 在基站假设没有完全的信道信息是不可行的, 这正是空时编码技术要解决的核心问题, 它们能在基站没有信道信息的前提下, 实现发送分集, 这也是空时编码与多输入多输出系统结合的合理内核。

## 3. 空域分集技术的分类

在空域分集技术中, 还有两种分集方法需要考虑。

### 1) 极化分集

对发送信号及接收天线阵元做垂直或水平极化, 以不同的极化特性来保证其相互独立性, 极化天线可以放松对阵元间距的限制。

### 2) 角度分集

使接收天线阵元对不同角度范围有不同的响应特性, 从而保证接收到同一信号而来自不同方向。

这样, 我们对分集的理解是能提供同一信号的多个独立模板, 且能将多个模板有效集成产生最大接收信噪比。

为了更好地理解分集及空时编码技术, 我们讨论一些与无线传播有关的概念。一些信道类别及生成原理, 它们对于下面的编码算法理论的建立、分析和实现都是必要的。

## 1.5.2 几种经典的合并算法

我们说要依靠分集技术来消除多径传输带来的蜕化。在此处, 我们讨论单输入多输出信道的合并技术, 利用这些合并技术, 就能把对多输入单输出系统的讨论、分析结果很容易地推广到多输入多输出系统。因此, 这里讨论设计、方法等关键环节, 我们都集中注意力于对多输入单输出系统的讨论和分析。这样使所涉及的公式简单明了, 而且也便于抓住主要矛盾、解决主要问题。单输入多输出系统的合并技术有选择合并、最大比合并和等增益合并等。

### 1. 选择合并 (Selection Combining) [16]

选择合并是一个最简单的合并技术。设单输入多输出系统共有  $N_R$  个接收天线阵元, 我们在每一个符号周期内, 选择进入  $N_R$  个接收天线阵元的具有最大瞬时信噪比的信号作为该时隙的接收信号, 这将使得合并器输出信号为最好的输入信号。该合并技术的优点是所有  $N_R$  个接收阵元共用一条射频链路。设从发射天线到第  $i$  个接收阵元的信号为

$$r_i = h_i s_0 + n_i \quad (1.86)$$

式中,  $s_0$  为具有功率为  $E_s$  的发送信号码元;  $n_i$  为第  $i$  条支路的加性噪声, 一般服从白高斯分布, 具有功率谱密度  $\sigma_n^2$ ;  $h_i$  为第  $i$  条支路的信道系数, 一般服从标准高斯分布。

考虑接收端有  $N_R$  个相互独立的瑞利衰落信道, 每一个信道称为分集分支 (Diversity Branch), 假设每个分支有一个平均信噪比  $\lambda$  (SNR), 它可以定义为信号平均功率与噪声功率之比  $\lambda = \bar{E}_s / \sigma_n^2 = E\{|h_i|^2\} E_s / \sigma_n^2$ 。如果每个分支有一个瞬时信噪比 (SNR <sub>$i$</sub> )  $\gamma_i$ , 则  $\gamma_i = |h_i|^2 E_s / \sigma_n^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_R$ 。则第  $i$  个接收阵元接收的信号的信噪比低于某个门限  $\gamma$  的概率为

$$\Pr(\gamma_i \leq \gamma) = \int_0^\gamma f_i(\alpha) d\alpha$$

式中,  $f_i(\alpha)$  为参数  $\gamma_i$  的概率密度函数, 对于  $N_R$  个信道支路来说, 它们的瞬时信噪比具有相同的概率密度函数。则每条支路的瞬时信噪比均低于门限  $\gamma$  的概率为

$$\Pr(\gamma_1 \leq \gamma, \gamma_2 \leq \gamma, \dots, \gamma_{N_R} \leq \gamma) = [\Pr(\gamma_i \leq \gamma)]^{N_R} \quad (1.87)$$

这个值必然随着  $N_R$  的增加而减小。概率  $\Pr(\gamma_1 \leq \gamma, \gamma_2 \leq \gamma, \dots, \gamma_{N_R} \leq \gamma)$  实际上也是随机变量  $\bar{\gamma}$  的累量分布函数 (Cumulative Distribution Function, CDF), 而  $\bar{\gamma} = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N_R}\}$ 。因此, 事件  $(\bar{\gamma} \leq \gamma)$  的发生等价于事件  $(\gamma_1 \leq \gamma, \gamma_2 \leq \gamma, \dots, \gamma_{N_R} \leq \gamma)$  的发生, 这也解释了式 (1.87) 成立的根据。

**例 1.5** 假设有 4-支路分集, 每个支路接收到一个独立瑞利衰落信号。若平均信噪比为 20dB, 确定信噪比低于 10dB 的概率。将所得结果与仅有一条链路的系统做比较。

**解:** 对于瑞利衰落信道, 其增益幅度  $|h_i|$  具有瑞利分布, 所以  $|h_i|^2$  也具有瑞利分布。因此瞬时信噪比  $\gamma_i$  服从自由度为 2 的  $\chi^2$ -分布, 即  $f_i(\alpha) = \frac{1}{\lambda} \exp(-\alpha/\lambda)$ , 参数  $\alpha \geq 0$ 。而  $\lambda = \bar{E}_s / \sigma_n^2$  是平均信噪比, 则某一个支路的瞬时信噪比  $\gamma_i$  低于门限  $\gamma$  的概率为

$$\Pr(\gamma_i \leq \gamma) = \int_0^{\gamma} f_i(\alpha) d\alpha = 1 - e^{-\gamma/\lambda}$$

所以

$$\Pr(\gamma_1 \leq \gamma, \gamma_2 \leq \gamma, \dots, \gamma_{N_R} \leq \gamma) = (1 - e^{-\gamma/\lambda})^{N_R}$$

将参数  $\lambda=20\text{dB}$ 、 $\gamma=10\text{dB}$ 、 $N_R=4$  代入, 得

$$P_4(10\text{dB}) = (1 - e^{-0.1})^4 = 0.000\ 082$$

对于仅有一条链路的系统, 其瞬时信噪比低于 10dB 的概率为

$$P_1(10\text{dB}) = (1 - e^{-0.1}) = 0.095$$

两者相比, 选择合并分集的优越性是很明显的。

## 2. 最大比合并 (Maximal Ratio Combining) [16]

仍然考虑接收端有  $N_R$  个相互独立的瑞利衰落信道,  $h_i$  是发射天线到第  $i$  个接收阵元的路径增益系数。假设第  $i$  个接收阵元接收的信号为  $r_i$ , 这样每一个支路都有相应的一个射频支路, 设第  $i$  条支路的增益为  $G_i$ , 则总接收信号为

$$r = \sum_{i=1}^{N_R} G_i r_i \quad (1.88)$$

将表达式 (1.86) 代入式 (1.88), 有  $r = \sum_{i=1}^{N_R} G_i h_i s_0 + \sum_{i=1}^{N_R} G_i n_i$ 。最大比合并器输出的噪声

功率谱密度为  $S_n = \sigma_n^2 \sum_{i=1}^{N_R} |G_i|^2$ ; 最大比合并器输出的信号瞬时功率为  $S_s = E_s \sum_{i=1}^{N_R} |G_i h_i|^2$ 。所以, 检测器输出的信噪比 (SNR) 为

$$\gamma_{\text{MRC}} = \frac{E_s \sum_{i=1}^{N_R} |G_i h_i|^2}{\sigma_n^2 \sum_{i=1}^{N_R} |G_i|^2} \quad (1.89)$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式: 对于任意  $N \in \mathbf{N}$ ,  $a_i, b_i \in \mathbf{C}$ , 有关系式

$$\sum_{i=1}^N |a_i b_i|^2 \leq \sum_{i=1}^N |a_i|^2 \sum_{i=1}^N |b_i|^2$$

而等式成立（即左边获得最大值）当且仅当  $\forall i, a_i = b_i^*$ 。

将此结果应用于式（1.88），得当且仅当  $\forall i, G_i = h_i^*$  时（输出信噪比获得最大值）

$$\gamma_{\text{MRC}} = (E_s / \sigma_n^2) \sum_{i=1}^{N_R} |h_i|^2 \quad (1.90)$$

注意到  $\gamma_i = (E_s / \sigma_n^2) |h_i|^2$  为每条支路的瞬时信噪比，所以，式（1.90）只不过是每个阵元的瞬时信噪比相加，这说明即使  $\gamma_i$  可能较小，但它们的和  $\gamma_{\text{MRC}}$  可能较大。

在式（1.89）中，我们注意到对原信噪比修正项为  $\sum_{i=1}^{N_R} |h_i|^2$ ， $h_i$  是发射天线到第  $i$  个接收阵元的路径增益系数，通常假设它服从复高斯分布，则  $\sum_{i=1}^{N_R} |h_i|^2$  服从自由度为  $2N_R$  的  $\chi^2$  分布。

图 1.61 所示是该和项随接收天线阵元数的变化曲线。当接收天线阵元数为 1 时， $\sum_{i=1}^{N_R} |h_i|^2$  衰落大于 15dB 的概率是非常大的。而当接收天线阵元数为 16 时，它衰落大于 0 dB 的概率是非常小的。

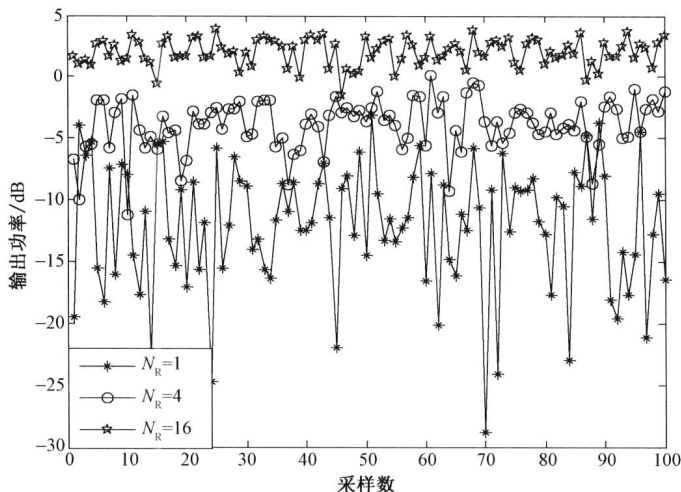


图 1.61  $\sum_{i=1}^{N_R} |h_i|^2$  随  $N_R$  的变化曲线

### 3. 等增益合并 (Equal Gain Combining) [16]

仍然考虑接收端有  $N_R$  个相互独立的瑞利衰落信道。设第  $i$  条支路的增益为  $G_i = h_i^* / |h_i|^2$ ，而合并器的输出信号为  $r = \sum_{i=1}^{N_R} G_i r_i$ ，将式（1.86）代入，则总接收信号为

$$r = N_R s_0 + \sum_{i=1}^{N_R} G_i n_i$$

最大比合并器输出的噪声功率谱密度为  $S_n = \sigma_n^2 \sum_{i=1}^{N_R} |h_i|^{-2}$ 。所以检测器的信噪比 (SNR) 为

$$\gamma_{\text{EGC}} = \frac{E_s N_R^2}{\sigma_n^2 \sum_{i=1}^{N_R} |h_i|^{-2}}$$

图 1.62 给出了  $N_R = 4$ 、瑞利衰落信道时，选择合并、最大比合并及等增益合并的功率变化曲线。

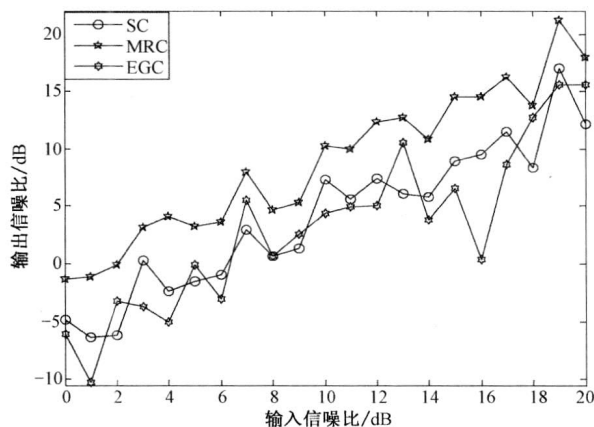


图 1.62 SC、MRC、EGC 功率变化曲线

从图 1.62 中可以看出，最大比合并输出信噪比几乎与输入的是一致的。这与理论分析结果也是一致的，在理论分析中我们可以看出，最大比合并考虑了整体最优的条件。因而在空时编码与多输入多输出系统中，我们在接收端都采用最大比合并技术。这就是说，只要将空时编码与多输入单输出系统的问题解决了，对多输出系统，只要再利用最大比合并技术，所有问题就全部解决。因而在后面的讨论中，基本上只讨论空时编码与多输入单输出系统的问题。

图 1.63 给出了瑞利衰落信道时最大比合并器的性能曲线，图中的调制方式采用 BPSK。明显地，随着接收天线阵元数的增加，系统性能的改善是非常显著的。

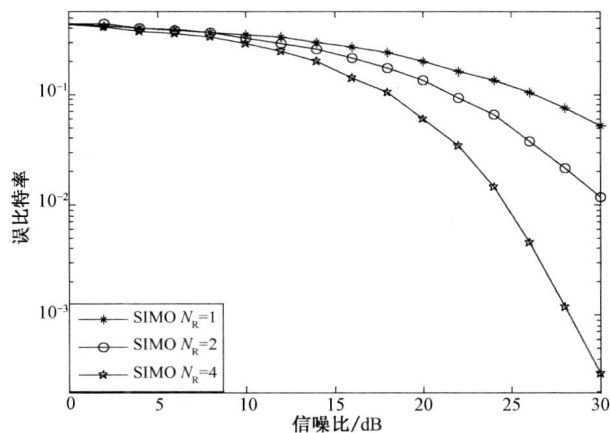


图 1.63 最大比合并器的误比特率曲线



我们注意到，最大比合并器及等增益合并器应用的前提是在接收端已知信道参数，在后面讨论中也常假设接收端已知信道参数，通常接收端需要发送训练序列或定序序列来估计（测定）信道参数。当接收天线阵元数为  $N_R$  与发送天线阵元数为  $N_T$  时，系统的通信链路有  $N_R \cdot N_T$  条，这时需要估计的信道参数个数有  $N_R \cdot N_T$ ，这对系统将是个沉重的负担。因此，考虑到实际应用，数字  $N_R \cdot N_T$  应尽可能地小。

另外，对于便携式的移动终端，接收天线阵元数  $N_R$  大于 2 几乎是不现实的，因为要实现空域分集，阵元间距应大于数倍的信号波长，而便携式的移动终端的尺寸是受限的；多个接收链路的功耗也很大，这与便携的要求是不符的。但这些因素在基站都是可以忽略的。空时编码技术就是要能够在未知信道信息的情形下，利用多阵元天线实现空时分集的目的。

## 1.6 多输入多输出信道系统

下面简要介绍一下具有  $N_T$  个发送天线阵元与  $N_R$  个接收天线阵元的多输入多输出系统，系统的输入信号常用  $\mathbf{s}$  或  $\mathbf{C}$  表示，而接收信号常用  $\mathbf{r}$  表示，即

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{C} + \mathbf{n}$$

式中， $\mathbf{n}$  为加性噪声； $\mathbf{H}$  为信道参数。一般来说， $\mathbf{C} \in \mathbf{C}^{N_T \times T}$ ， $\mathbf{H} \in \mathbf{C}^{N_R \times N_T}$ ， $\mathbf{r} \in \mathbf{C}^{N_R \times T}$ ， $\mathbf{n} \in \mathbf{C}^{N_R \times T}$ ， $T$  是时间长度参数（如帧长等）。通常假设加性噪声  $\mathbf{n}$  服从零均值方差为  $\sigma_n^2$  的高斯分布。信道参数  $\mathbf{H}$  也是服从零均值方差为  $\sigma_H^2$  的高斯分布的，而且在时间区间  $T$  内是保持不变的，因而对于发送和接收信号，我们考虑  $T=1$ ，但是它们有一定的采样数，这两种考虑问题的方法是一致的。所谓的空时编码就是设计  $\mathbf{C}$  的结构的问题。

## 1.7 本章要点总结

本章介绍了无线信道一般传播特性中的大尺度衰落。该模型说明在自由空间信号的衰落主要受传输距离的支配。Okumura/Hata 模型是一个描述天线高度与其覆盖范围关系的模型。而 IEEE 802.16d 模型是一个基于对数正态阴影路径损失的模型。这些模型都可以认为是刻画宏蜂窝的。小尺度衰落是当前无线通信普遍遇到的问题，描述小尺度衰落的参数主要有平均过量延迟、均方根延迟扩展、时间弥散与频率弥散等。而所有问题最终归结为时域和频域描述。因此，对信道一般将其分为频域平坦或频域选择性衰落、时域平坦或时域选择性衰落，前者由时间弥散引起而后者由频率弥散引起。若涉及阵列天线传输，可能需要考虑空间选择性衰落问题。所有这些仅是对无线信道定性或定量的描述。在理论或实践研究中，需要生成满足这些特性的信道，这就是无线衰落信道的生成。给定其相关参数借助本章的论述，即可生成满足该参数的无线衰落信道。

对无线信道，从天线结构细分有单输入单输出、单输入多输出、多输入单输出和多输入多输出信道等，从传输环境分有室内和室外信道。室内信道模型主要有指数衰减型一般室内信道模型、IEEE 802.11b 信道模型、S-V 信道模型和超宽带（UWB）信道模型。室外

信道模型主要有过滤高斯白噪声 (FWGN) 信道模型、Jakes 模型、均匀功率子路径模型、采样拉普拉斯和频率选择性信道模型。过滤高斯白噪声 (FWGN) 信道模型还可分为 Clarke/Gans 模型、修正的频域 FWGN 模型 (I-METRA 模型) 和时域 FWGN 模型。频率选择性信道模型可以分为抽头延迟线 (Stanford University Interim, SUI TDL) 模型、COST207 信道模型和 SUI 信道模型。

多输入多输出信道可用统计模型刻画, 也可用其功率方位谱描述。功率方位谱大致分为正弦函数的  $n$  次方型、均匀型、截断的高斯型和截断拉普拉斯型。统计模型有 I-METRA 多输入多输出信道统计模型和 3GPP-SCM-MIMO 信道模型。利用 I-METRA-MIMO 信道的一些参数可以生成相应的 I-METRA 多输入多输出信道。I-METRA-MIMO 信道参数大致分为多普勒谱、莱斯衰落因子以及导向矩阵与时空传输参数等。SCM 信道的生成涉及其链路级信道参数、空域相关参数和移动终端运动时空域相关参数等。

为简化问题叙述, 本章最后介绍了几个重要的合并算法。这些合并算法将多输入多输出问题转化为多输入单输出问题。

## 练习题

1. 一个包含五个路径的多径信号, 各路径的功率分别是 0.1 W、0.01 W、0.02 W、0.001 W、0.5 W, 相应的时延分别为 0.1  $\mu\text{s}$ 、0.2  $\mu\text{s}$ 、0.3  $\mu\text{s}$ 、0.4  $\mu\text{s}$ 、0.5  $\mu\text{s}$ 。若信号带宽为 200 kHz, 则该信道是平坦衰落还是频率选择性衰落?

2. 考虑一个随机变量  $\alpha$ , 它是由两个独立同分布零均值单位方差的高斯随机变量包络和构成的, 写出  $\alpha$  的表达式, 求  $\alpha$  的分布和  $\alpha < -10\text{dB}$  的概率。

3. 一个包含四个路径的多径信号, 各路径的功率分别是 -20 dB、-10 dB、-10 dB、0 dB, 相应的时延分别为 0  $\mu\text{s}$ 、1  $\mu\text{s}$ 、2  $\mu\text{s}$ 、5  $\mu\text{s}$ 。计算平均过量延迟、均方延迟扩展和相对于 -10 dB 的最大过量延迟; 估计信道 50% 的相干带宽。如果我们知道 GSM 系统带宽为 200 kHz, 对于该信道它是否需要均衡器?

4. 假设接收信号的复数表达式为

$$y(t) = \{h_I(t) + jh_Q(t)\} e^{-j2\pi f_c t}$$

求  $r(t) = \text{Re}\{y(t)\}$  的表达式。

5. 设复振荡器总和的实、虚部信号可以表示为

$$h_I(t) = 2 \sum_{n=1}^N \cos \varphi_n \cos \omega_n t + \sqrt{2} \cos \varphi_M \cos \omega_d t$$

$$h_Q(t) = 2 \sum_{n=1}^N \sin \varphi_n \cos \omega_n t + \sqrt{2} \sin \varphi_M \cos \omega_d t$$

构造信道单位脉冲响应

$$h(t) = \frac{E_0}{\sqrt{2N+1}} \{h_I(t) + jh_Q(t)\}$$

证明有关系式  $E\{h^2(t)\} = E_0^2$  和  $E\{h_I(t)h_Q(t)\} = 0$ 。

## 参 考 文 献

- [1] Dahlman E, Parkvall S, Sköld J, et al. 3G Evolution—HSPA and LTE for Mobile Broadband. Elsevier, 2007.
- [2] Sklar B. Digital Communications: Fundamentals and Applications. 2/E. Prentice Hall, 2002.
- [3] Rappaport T S. Wireless Communications: Principles and Practice. 2/E. Prentice Hall, 2001.
- [4] Greenwood D, Hanzo L. Chapter 2 Characterization of mobile radio channels. Steele R, ed. Mobile Radio Communications. London: Pentech Press-IEEE Press, 1994.
- [5] Friis H T. A note on a simple transmission formula. Proc. IRE, 1946, 34 (5) : 254-256.
- [6] Lee W C Y. Mobile Communications Engineering. New York: McGraw Hill, 1985.
- [7] Okumura Y, Ohmori E, Kawano T, et al. Field strength and its variability in VHF and UHF land mobile radio service. Rev. Elec. Commun. Lab., 1968 (16) : 825-873.
- [8] Hata M Empirical formula for propagation loss in land mobile radio services. IEEE Trans. Veh. Technol., 1980, 29 (3) : 317-325.
- [9] Erceg V, Greenstein L J, Tjandra S Y, et al. An empirically based path loss model for wireless channels in suburban environments. IEEE J. Select. Areas Commun., 1999, 17(7): 1205-1211.
- [10] IEEE 802.16j-06/013r3. Multi-Hop Relay System Evaluation Methodology (Channel Model and Performance Metric) , 2007.
- [11] IEEE 802.16.3c-01/29r4. Channel Models for Fixed Wireless Applications. 2001.
- [12] IST 4-027756. WINNER II, D1.1.1 WINNER II Interim Channel Models . 2004.
- [13] Recommendation ITU-R M.1225. Guidelines for Evaluation of Radio Transmission Technologies for IMT-2000 (1997) .
- [14] Clarke R H. A statistical theory of mobile radio reception. Bell System Tech. J., 1968 (47) : 987-1000.
- [15] Capoglu I R, Li Y, Swami A. Effect of doppler spread in OFDM based UWB systems. IEEE Trans. Wireless Commun., 2005, 4 (5) : 2559-2567.
- [16] Jankiraman M. space-time codes and MIMO systems. Artech House, 2004.
- [17] 邵朝, 廖延娜. 小尺度衰落的定性分析. 西安邮电学院学报, 2000, 5 (1) : 1-4.
- [18] Sklar B. Rayleigh Fading channels in Mobile Digital communication Systems Part I : Characterization. IEEE Communications Magazine, July 1997: 90-100.
- [19] Sklar B. Rayleigh Fading channels in Mobile Digital communication Systems Part II :

- Mitigation. IEEE Communications Magazine, July 1997: 102-109.
- [20] IEEE P802.11-97/96. Tentative Criteria for Comparison of Modulation Methods, 1996.
- [21] Saleh A M, Valenzuela R A. A statistical model for indoor multipath propagation. IEEE J. Select. Areas Commun., 1987, 5 (2) : 128–137.
- [22] [http://en.wikipedia.org/wiki/nakagami\\_distribution](http://en.wikipedia.org/wiki/nakagami_distribution).
- [23] IEEE 802.15-02/490R-L. Channel Modeling sub-committee. Report finals, 2003.
- [24] Smith J I. A computer generated multipath fading simulation for mobile radio. IEEE Trans. Veh. Technol., 1975, 24 (3) : 39–40.
- [25] Jakes W C. Microwave Mobile Communications. New York: John Wiley & Sons, 1974.
- [26] 3GPP TR 25.996, v7.0.0.3<sup>rd</sup>. Generation Partnership Project; Technical Specification Group Radio Access Network; Spatial Channel Model For Multiple Input Multiple Output Simulations (Release 7) (2007) .
- [27] SCM 065v2. SCM Model Correlations, 2002.
- [28] SCM 033-R1 Spatial Channel Model Issues, 2002.
- [29] Andreas.F.Molisch. Wideband wireless digital communications (英文版) . 北京: 电子工业出版社, 2002
- [30] [www.mathworks.cn/help/toolbox/comm/ref/stdchan.html](http://www.mathworks.cn/help/toolbox/comm/ref/stdchan.html).
- [31] 邵朝, 卢光跃, 保铮. 结合交替分离和交替投影算法的 ASAP 算法. 中国科学(E 刊), 2004, 34 (4) : 448-456.
- [32] Pedersen K I, Mogensen P E, Fleury B H. A stochastic model of the temporal and azimuthal dispersion seen at the base station in outdoor propagation environments. IEEE Trans. Veh. Technol., 2000, 49 (2) : 437–447.
- [33] Schumacher L, Pedersen K I, Mogensen P E. From antenna spacing to theoretical capacities guidelines for simulating MIMO systems. PIMRC'02, vol. 2, 2002: 587–592.
- [34] I-METRA, D2 IST-1999-11729 MIMO channel characterisation. (Feb. 1999)
- [35] Lee W. Effect on correlation between two mobile radio base-station antennas. IEEE Trans. Commun., 1973, 21 (11) : 1214–1224.
- [36] IST-METRA project[OL]. Available: <http://www.ist-imetra.org>.
- [37] I-METRA, D2 v1.2 IST-2000-30148. Channel characterisation (Oct. 2002) .
- [38] I-METRA IST-2000-30148. Final Report (Oct. 2003) .
- [39] Schumacher L. Description of the MATLAB implementation of a MIMO channel model suited for link-level simulations. March 2002.
- [40] Pedersen K I, Andersen J B, Kermoal J P, et al. A stochastic multiple-inputmultiple-output radio channel model for evaluation of space-time coding algorithms. IEEE VTC'00, vol. 2, Sept. 2000: 893–897.
- [41] 3GPP TR 25.876 V1.1.0 3rd Generation Partnership Project; Technical Specification Group Radio Access Network; Multiple Input Multiple Output Antenna Processing for HSDPA (2002) .

- [42] 3GPP TR 25.814 V1.2.2. 3rd Generation Partnership Project; Technical Specification Group Radio Access Network; Physical Layer Aspects for Evolved UTRA (Release 7), 2006.
- [43] 3GPP Correlation properties of SCM. SCM-127 SCM Conference Call. March 28, 2003.
- [44] Baum D S, El-Sallabi H, et al. Final Report on Link Level and System Level Channel Models. WINNER Deliverable D5.4, Oct. 2005.
- [45] Kyosti P, Meinila J, et al. WINNER II Interim Channel Models. WINNER Deliverable D1.1.1, Nov. 2006.
- [46] Erceg V, Schumacher L, Kyritsi P, et al. TGN Channel Models. IEEE, 802.11-03/940r2, Jan. 2004.
- [47] Wang J G, Mohan A S, Aubrey T A. Angles-of-Arrival of multipath signals in indoor environments. IEEE VTC'96, 1996: 155–159.
- [48] Pedersen K, Mogensen P, Fleury B. Spatial channel characteristics in outdoor environments and their impact on BS antenna system performance. IEEE VTC'98, Ottawa, Canada, May 1998: 719–723.
- [49] Nilsson M, Lindmark B, Ahlberg M, et al. Measurements of the spatio-temporal polarization characteristics of a radio channel at 1800 MHz. PIMRC'99, Sep. 1998: 1278–1283.
- [50] Eggers P C F. Angular dispersive mobile radio environments sensed by highly directive base station antennas. PIMRC'95, Sep. 1995: 522–526.
- [51] Martin U. Spatio-temporal radio channel characteristics in urban macrocells. IEE P-Radar. Son. Nav., 1998, 145 (1), 42–49.
- [52] Pettersen M, Lehne P H, Noll J, et al. Characterisation of the directional wideband radio channel in urban and suburban areas. IEEE VTC'99, Amsterdam, Netherlands, Sep. 1999: 1454–1459.
- [53] Kalliola K, Vainikainen P. Dynamic wideband measurement of mobile radio channel with adaptive antennas. IEEE VTC'98, Ottawa, Canada, May 1998: 21–25.
- [54] Pajusco P. Experimental characterization of DoA at the base station in rural and urban area. IEEE VTC'98, Ottawa, Canada, May 1998: 993–997.
- [55] Spencer Q, Jeffs B, Jensen M, et al. Modeling the statistical time and angle of arrival characteristics of an indoor multipath channel. IEEE J. Select. Areas Commun., 2000, 18 (3) : 347–360.
- [56] Chong C C, Tan C M, Laurenson D I, et al. A new statistical wideband spatio-temporal channel model for 5 GHz band WLAN systems. IEEE J. Select. Areas Commun., 2003, 21 (2) , 139–150.
- [57] Cho Y S, Kim J W, Yang W Y, et al. MIMO-OFDM Wireless Communications with MATLAB. IEEE press, John Wiley & sons, 2010.

## 第2章 MIMO 信道的容量分析

### 引言

多输入多输出 (MIMO) 信道的容量是研究多输入多输出通信系统的基础, 是分析与说明多输入多输出通信系统在不额外占用系统频谱资源的条件下, 能够大幅度地提升系统的传输速率, 增加系统的可靠性, 强化系统的传输效能的理论基础。

所谓通信系统的容量, 就是系统能够支撑最大无差错数据传输速率; 或者系统以尽可能小的差错率能传输数据的最大速率。因而也可以说, 系统容量与系统传输速率或系统吞吐量是同等的概念。

有关多输入多输出 (MIMO) 信道的容量奠基性的工作是由 E. Telatar<sup>[1]</sup>和 G. J. Foschini, M. Gans<sup>[2]</sup>完成的。在本章, 我们基本采用的是 E. Telatar<sup>[1]</sup>的论述方法, 也较多地参考了 M. Jankiraman<sup>[3]</sup>有关多输入多输出 (MIMO) 信道的容量的论述方式。

假设考虑一个具有  $N_T$  个发送天线阵元和  $N_R$  个接收天线阵元的多输入多输出系统。要传输的数据为  $T \times N_T$  维的复数矩阵, 即  $\mathbf{C} \in \mathbf{C}^{T \times N_T}$ ; 接收的数据为  $T \times N_R$  维的复数矩阵  $\mathbf{r} \in \mathbf{C}^{T \times N_R}$ , 而  $N_T$  个发送天线阵元和  $N_R$  个接收天线阵元之间的通信链路是一个  $N_T \times N_R$  维的矩阵  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H} \in \mathbf{C}^{N_T \times N_R}$ , 所以接收数据与发送数据之间的关系可表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{CH} + \mathbf{n} \quad (2.1)$$

式中,  $\mathbf{n} \in \mathbf{C}^{T \times N_R}$  是均值为零的加性复高斯随机噪声过程, 不失一般性, 假设  $\mathbf{n}: \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 \mathbf{I}_{N_R})$  及  $E\{\mathbf{n}^H \mathbf{n}\} = \sigma_n^2 \mathbf{I}_{N_R}$ ,  $E$  表示期望算子或均值运算符号。

在通常情况下, 发送端的符号平均功率总是有限的, 若记这个功率为  $\mathcal{P}$ , 则有  $E\{\text{tr}[\mathbf{C}^H \mathbf{C}]\} \leq \mathcal{P}$ 。

对于信道  $\mathbf{H}$ , 考虑下面几种情况:

- (1)  $\mathbf{H}$  是确定的;
- (2)  $\mathbf{H}$  是一个随机矩阵, 它是以一种概率分布规律生成的, 是无记忆性的, 每次实验是独立生成的;
- (3)  $\mathbf{H}$  是一个随机矩阵, 但它在各次实验过程中是固定不变的。

我们主要讨论后面两种情形。对于矩阵  $\mathbf{H}$  是一个随机矩阵的情形, 假设  $\mathbf{H}$  的元素是相互独立的且具有相互独立的实、虚部, 实、虚部是服从  $\mathcal{N}(0, 0.5)$  的随机变量。即矩阵  $\mathbf{H}$  的元素的相位服从  $[0, 2\pi]$  或  $[-\pi, +\pi]$  上的均匀分布, 而幅度服从瑞利分布, 或者说信道  $\mathbf{H}$  具有瑞利衰落特性。

除非特别说明，对于我们讨论的所有情形均假设信道参数  $\mathbf{H}$  对于接收端是已知的，即接收端可以获得的数据为  $(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ ，而对发送端来说， $\mathbf{H}$  的分布特性是已知的，但具体数值是未知的。

## 2.1 一些准备

定义 2.1 一个复随机矢量  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$  被称为是高斯的，如果实随机矢量  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^{2n}$  是高斯的， $\hat{\mathbf{x}}$  的定义为

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{x}) \\ \text{Im}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

即  $\hat{\mathbf{x}}$  是由  $\mathbf{x}$  的实、虚部构成的矢量。

由这个定义，我们要确定复高斯随机矢量  $\mathbf{x}$ ，只要确定  $\hat{\mathbf{x}}$  的均值和方差，即只要确定

$$E\{\hat{\mathbf{x}}\} \in \mathbf{R}^{2n}, \quad E\{[\hat{\mathbf{x}} - E\{\hat{\mathbf{x}}\}][\hat{\mathbf{x}} - E\{\hat{\mathbf{x}}\}]^T\} \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$$

定义 2.2 一个  $n$  维复高斯随机矢量  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$  被称为是循环对称的，如果存在一个非负定 Hermitian 矩阵  $\mathbf{Q} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ，则  $\hat{\mathbf{x}}$  协方差矩阵有表达式

*x 循环对称*

$$E\{[\hat{\mathbf{x}} - E\{\hat{\mathbf{x}}\}][\hat{\mathbf{x}} - E\{\hat{\mathbf{x}}\}]^T\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{Q}) & -\text{Im}(\mathbf{Q}) \\ \text{Im}(\mathbf{Q}) & \text{Re}(\mathbf{Q}) \end{bmatrix}$$

注意到 Hermitian 矩阵的实部是对称的，而虚部是反对称的。所以，矩阵  $E\{[\hat{\mathbf{x}} - E\{\hat{\mathbf{x}}\}][\hat{\mathbf{x}} - E\{\hat{\mathbf{x}}\}]^T\}$  是实对称矩阵。对应的  $E\{[\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}][\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}]^H\} = \mathbf{Q}$ ；所以，*协方差矩阵* 对一个  $n$  维循环对称复高斯 (Gaussian) 矢量  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ ，当  $E\{\mathbf{x}\}$  和  $E\{[\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}][\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}]^H\}$  给定时，其对应概率分布密度函数是确定的。

对于任意复矢量  $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$ ，以及复矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n \times m}$ ，定义

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{z}) \\ \text{Im}(\mathbf{z}) \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{A}) & -\text{Im}(\mathbf{A}) \\ \text{Im}(\mathbf{A}) & \text{Re}(\mathbf{A}) \end{bmatrix}$$

则关于这个变换有下面的一些结论。

引理 2.1 映射  $\mathbf{z} \Rightarrow \hat{\mathbf{z}}$ ， $\mathbf{A} \Rightarrow \hat{\mathbf{A}}$  具有下面的性质：

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}; \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^H \Leftrightarrow \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{A}}^H; \quad \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}$$

$$\det(\hat{\mathbf{A}}) = |\det(\mathbf{A})|^2 = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)$$

*det(A-bar) = det(A^H) = det(A)*

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}; \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}; \quad \text{Re}(\mathbf{x}^H \mathbf{y}) = \hat{\mathbf{x}}^H \hat{\mathbf{y}}$$

证明：这些关系式的成立是很显然的，我们只证明其中的关系式  $\det(\hat{\mathbf{A}}) = |\det(\mathbf{A})|^2 = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)$ ，事实上因为有恒等式关系

$$\det(\hat{\mathbf{A}}) = \det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{jI} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{jI} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)$$

*总结: A\*B = A-hat\*B-hat, A+B = A-hat+B-hat, A^H = A-hat^H, A^-1 = A-hat^-1*

$$\det(\hat{A}) = |\det(A)|^2 = \det(AA^H)$$

$$\widehat{x+y} = \hat{x} + \hat{y}, \quad \widehat{Ax} = \hat{A}\hat{x}$$

$$\widehat{x^H y} = \text{Re}(x^H y) = \hat{x}^H \hat{y}$$

$$= \det \left( \begin{bmatrix} I & jI \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(A) & -\text{Im}(A) \\ \text{Im}(A) & \text{Re}(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -jI \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) = \det(AA^H)$$

式中,  $j$  是虚单位, 而  $I$  是单位矩阵 (Identity Matrix)。

**推论 2.1** 矩阵  $U \in C^{n \times n}$  是一个酉阵, 当且仅当  $\hat{U} \in R^{2n \times 2n}$  是一个正交阵。

**证明:** 矩阵  $U \in C^{n \times n}$  是一个酉阵, 则应有  $UU^H = U^H U = I_n$  成立, 对应地很显然当且仅当有关系式  $\hat{U}\hat{U}^H = \hat{U}^H \hat{U} = I_{2n}$ 。

**推论 2.2** 矩阵  $Q \in C^{n \times n}$  是一个非负定矩阵, 则矩阵  $\hat{Q} \in R^{2n \times 2n}$  亦然。

**证明:** 矩阵  $Q \in C^{n \times n}$  是一个非负定矩阵, 则对于任意给定的矢量  $z \in C^n$ , 应当有关系式  $z^H Q z \geq 0$ ; 对于任意给定的实矢量  $x \in R^{2n}$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n})^T$ , 令矢量  $z = (x_1 + jx_{n+1}, \dots, x_n + jx_{2n})^T \in C^n$ ; 显然有  $x = \hat{z}$ , 则有关系式  $x^H \hat{Q} x = z^H Q z \geq 0$  成立。由于实矢量  $x \in R^{2n}$  的任意性, 所以  $\hat{Q}$  是一个非负定矩阵。

**结论:** 具有均值等于  $\mu$ , 协方差矩阵为  $Q$  的循环对称复高斯 (Gaussian) 随机矢量  $\xi \in C^n$  的概率分布密度函数为 (在不至于引起混乱时, 也用  $x \in C^n$  表示随机矢量)

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu, Q}(x) &= \det(\pi Q)^{-1} \exp\{-(x - \mu)^H Q^{-1}(x - \mu)\} \\ &= \det(\pi \hat{Q})^{-1/2} \exp\{-(\hat{x} - \hat{\mu})^H \hat{Q}^{-1}(\hat{x} - \hat{\mu})\} \end{aligned}$$

其对应的信息熵函数 (定义式)  $\mathcal{H}(\cdot)$  为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\gamma_Q) &= E_{\gamma_Q}[-\log_2 \gamma_Q(x)] = \log_2 \det(\pi Q) + \log_2 E[x^H Q^{-1} x] \\ &= \log_2 \det(\pi Q) + \log_2 \text{etr}\{E[xx^H] Q^{-1}\} \\ &= \log_2 \det(\pi Q) + \log_2 \text{etr}\{I\} = \log_2 \det(\pi e Q) \end{aligned}$$

这是一个非常重要的关系式, 是建立信道容量的基础。

**引理 2.2** 假设复随机矢量  $x \in C^n$  均值为零, 且满足  $E[xx^H] = Q$ ,  $E[x_i x_j^*] = Q_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  (注意在这里我们只知随机矢量  $x$  的均值和方差, 并不知它的分布特性), 则  $x$  的熵满足关系

$$\mathcal{H}(x) \leq \log_2 \det(\pi e Q)$$

等式成立当且仅当  $x$  是循环对称复高斯随机矢量, 且  $E[xx^H] = Q$ 。

**证明:** 设  $p$  是一个 (任意的) 概率分布密度函数, 满足

$$\int_{C^n} p(x) x_i x_j^* dx = Q_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (\text{假设})$$

设  $\gamma_Q(x)$  是零均值、协方差矩阵为  $Q$  的循环对称复高斯随机矢量的概率密度函数, 即

$$\gamma_Q(x) = \det(\pi Q)^{-1} \exp[-x^H Q^{-1} x]$$

因而, 应该有

$$\int_{C^n} \gamma_Q(x) x_i x_j^* dx = Q_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (\text{事实})$$

**注意:** 函数  $\log[\gamma_Q(x)]$  除去一个加性常数外是  $x$  的复二次型函数, 即它是  $x_i x_j^*$  的一些线性组合, 结合假设与事实, 应当有



$$\mathcal{E}_{\gamma_Q}[\log_2 \gamma_Q(\mathbf{x})] = \mathcal{E}_p[\log_2 \gamma_Q(\mathbf{x})]$$

所以, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_p(\mathbf{x}) - \mathcal{H}_{\gamma_Q}(\mathbf{x}) &= -\int_{\mathcal{C}^n} p(\mathbf{x}) \log_2 p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{C}^n} \gamma_Q(\mathbf{x}) \log_2 \gamma_Q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= -\int_{\mathcal{C}^n} p(\mathbf{x}) \log_2 p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{C}^n} p(\mathbf{x}) \log_2 \gamma_Q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad (\because \mathcal{E}_{\gamma_Q}[\log_2 \gamma_Q(\mathbf{x})] = \mathcal{E}_p[\log_2 \gamma_Q(\mathbf{x})]) \\ &= \int_{\mathcal{C}^n} p(\mathbf{x}) \log_2 \frac{\gamma_Q(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \leq 0 \quad (\because 1 - \mathbf{x}^{-1} \leq \ln \mathbf{x} \leq \mathbf{x} - 1) \end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{H}_p(\mathbf{x}) \leq \mathcal{H}_{\gamma_Q}(\mathbf{x}), \quad \forall p(\mathbf{x}), \quad \text{若 } \int_{\mathcal{C}^n} p(\mathbf{x}) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^* d\mathbf{x} = \mathbf{Q}_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

等号成立当且仅当  $p = \gamma_Q$ 。

**注意:** 这个引理说明, 具有相同方差的随机矢量, 循环对称复高斯随机矢量的信息熵是最大的, 而且这个最大的信息熵为  $\log_2 \det(\pi e \mathbf{Q})$ , 即其信息熵仅与此循环对称复高斯随机矢量的协方差矩阵  $\mathbf{Q}$  有关。因此, 循环对称复高斯随机矢量在所涉及的随机矢量中就有特别的地位。下面两个引理的成立性是显然的。

**引理 2.3** 若  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^n$  是一个循环对称复高斯随机矢量, 则  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  也是一个循环对称复高斯随机矢量, 对于所有的矩阵  $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^{m \times n}$ 。

**引理 2.4** 若  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}^n$  是循环对称复高斯 (Gaussian) 随机矢量, 则  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$  也是。

上面引理说明, 循环对称复高斯随机矢量的线性变换也是循环对称复高斯的。

## 2.2 具有确定传输函数的多输入多输出高斯信道的容量分析

### 2.2.1 多输入多输出信道容量的定义

如前面所述, 信道容量的定义是差错率尽可能小的条件下最大可能的系统传输速率, 也可以定义为无差错情形下系统最大传输速率等。也即信道容量与传输速率是等价的概念。而传输速率的度量是发送数据与接收数据的关联度。假设  $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^{N_r \times 1}$  是接收数据矢量,  $\mathbf{s} \in \mathcal{C}^{N_t \times 1}$  是发送数据矢量。它们之间的关系是

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (2.2)$$

信号传输的意义在于能够通过接收数据  $\mathbf{r}$ , 恢复 (解、译码) 出发送数据  $\mathbf{s}$ 。其能力的度量是接收数据  $\mathbf{r}$  与发送数据  $\mathbf{s}$  的平均互信息熵  $\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$ 。它的定义为

$$\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r}) = \mathcal{H}(\mathbf{r}) - \mathcal{H}(\mathbf{r} | \mathbf{s}) = \mathcal{H}(\mathbf{r}) - \mathcal{H}(\mathbf{n})$$

对于确定的信道系数 (传输函数)  $\mathbf{H}$  和预先确定总的信号发送功率  $\mathcal{P}$ , 信道容量  $C(\mathbf{H}, \mathcal{P})$  定义为设计合适的发送信号  $\mathbf{s}$  的统计特性使平均互信息  $\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$  最大化, 即

$$\max_{p(\mathbf{s}), E[\|\mathbf{s}\|^2] \leq \mathcal{P}} \mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r}) \quad (2.3)$$

式中， $p(\mathbf{s})$  是发送信号  $\mathbf{s}$  的概率密度函数。

**注意：**发送信号平均总功率有限的条件为  $\mathbf{s}$  满足条件  $E[\mathbf{s}^H \mathbf{s}] \leq \mathcal{P}$ ，所以  $\mathbf{s} - E[\mathbf{s}]$  也满足此条件，因此不妨假设  $\mathbf{s}$  是零均值的， $\mathbf{s}$  的协方差矩阵为  $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \mathbf{Q}$ 。这样，接收矢量  $\mathbf{r}$  也是零均值的，具有协方差矩阵为  $E[\mathbf{r}\mathbf{r}^H] = \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^H + \mathbf{I}_{N_R}$ 。

由引理 2.2， $\mathbf{r}$  的信息熵  $\mathcal{H}(\mathbf{r})$  能够取得最大值，当且仅当  $\mathbf{r}$  是循环对称复高斯随机矢量，且  $\mathcal{H}(\mathbf{r}) = \log_2 \det[\pi e(\mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^H + \mathbf{I}_{N_R})]$ 。

类似地，通常假设加性噪声分量  $\mathbf{n}$  也是循环对称复高斯随机矢量，所以也有类似表达式  $\mathcal{H}(\mathbf{n}) = \log_2 \det(\pi e \sigma_n^2 \mathbf{I}_{N_R})$ ，且不妨设  $\sigma_n^2 = 1$ ，将信噪比因素归于矩阵  $\mathbf{Q}$ ，这样互信息熵  $\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$  的表达式为

$$\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r}) = \log_2 \det(\mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^H + \mathbf{I}_{N_R}) = \log_2 \det(\mathbf{Q}\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \mathbf{I}_{N_T}) \quad (2.4)$$

这里利用了矩阵行列式恒等关系  $\det(\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{A})$ 。

如果将信噪比因子从矩阵  $\mathbf{Q}$  中离析出来，互信息熵  $\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$  的表达式为

$$\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r}) = \log_2 \det(\rho \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^H + \mathbf{I}_{N_R}) = \log_2 \det(\rho \mathbf{Q}\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \mathbf{I}_{N_T}) \quad (2.5)$$

式中， $\rho = \mathcal{P}/(N_T \cdot \sigma_n^2)$ ，而分母因子  $N_T$  表示发送端的总功率  $\mathcal{P}$  在每个发送天线阵元上均匀分摊。所以信道容量  $C(\mathbf{H}, \mathcal{P})$  的表达式为

$$\max_{\text{tr}\{\mathbf{Q}\} \leq \mathcal{P}} \log_2 \det(\mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^H + \mathbf{I}_{N_R}) \text{ 或者 } \max_{\text{tr}\{\mathbf{Q}\} \leq \mathcal{P}} \log_2 \det(\rho \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^H + \mathbf{I}_{N_R})$$

信道容量  $C(\mathbf{H}, \mathcal{P})$  也被称为无差错谱有效性 (error-free spectral efficiency) 或多输入多输出链路能够支撑的单位带宽速率。因此，信道容量  $C(\mathbf{H}, \mathcal{P})$  的单位是 bit/(s·Hz)，也经常写成 bit/s/Hz 或 bps/Hz (bit per second per Hz)。

**注意：**式 (2.5) 所示的信道容量是用以 2 为底的对数函数定义的。对数函数是单调递增的，故信道容量的根本是式 (2.5) 的矩阵行列式的值。

## 2.2.2 发送端未知信道参数时的信道容量

当信道特性对于发送端是未知时，发送端只能被动地、全向地发送信号，即信号  $\mathbf{s}$  在各个方向上是均匀独立同分布的，即  $\mathbf{s}$  的协方差矩阵为  $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \mathbf{Q} = \mathbf{I}_{N_T}$ 。在这种情况下，信道容量  $C(\mathbf{H}, \mathcal{P})$  为

$$C = \log_2 \det(\mathbf{I}_{N_T} + \rho \mathbf{H}^H \mathbf{H}) = \log_2 \det(\mathbf{I}_{N_R} + \rho \mathbf{H}\mathbf{H}^H) \quad (2.6)$$

这个表达式所表示的并非 Shannon 意义下的信道容量，因为它并非式 (2.2) 那样的一个优化结果。

由于矩阵  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  是 Hermitian (共轭转置不变) 的，因此可以对它做特征分解  $\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^H$ ，其中  $\mathbf{U}$  是酉矩阵，对角矩阵  $\mathbf{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ ， $r$  是矩阵  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  的秩。反复利用矩阵行列式恒等关系就有下面关系式

$$\log_2 \det(\mathbf{I}_{N_T} + \rho \mathbf{H}^H \mathbf{H}) = \log_2 \det(\mathbf{I}_{N_T} + \rho \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^H) = \log_2 \det(\mathbf{I}_{N_T} + \rho \mathbf{A})$$

所以在这种情况下，信道容量  $C(\mathbf{H}, \mathcal{P})$  为

$$C = \sum_{l=1}^r \log_2(1 + \rho \lambda_l) \quad (2.7)$$

数值  $\lambda_l$  ( $l=1,2,\dots,r$ ) 是矩阵  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  的非零特征值,  $\rho$  是从天线各阵元发送信号的信噪比因子。信道容量  $C(\mathbf{H}, \mathcal{P})$  与矩阵  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  的秩  $r$  有关; 与矩阵  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  的非零特征值  $\lambda_l$  ( $l=1,2,\dots,r$ ) 的大小有关; 与发送信号的信噪比有关。图 2.1 给出了 MIMO 系统的信道容量随发送和接收天线阵元数的变化曲线。从中可以看出, 随着天线阵元数的增加, 系统吞吐量明显增加。

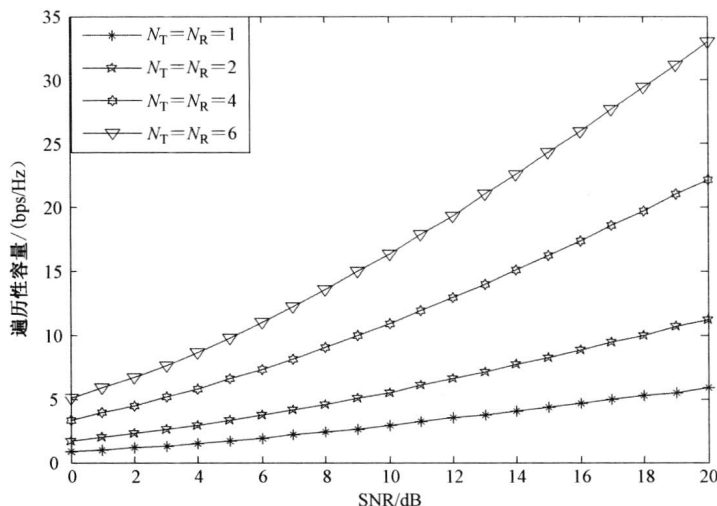


图 2.1 MIMO 信道容量随天线阵元个数的变化曲线

式 (2.7) 将多输入多输出 (MIMO) 系统的容量表示成  $r$  个单输入单输出 (SISO) 系统的容量之和的形式。若矩阵  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  是满秩的,  $r = \min\{N_T, N_R\}$ , 且  $\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{I}_r$  (表示信道是各向同性、相互正交且具有单位衰减特性), 则式 (2.7) 变成

$$C = r \log_2(1 + \rho) \quad (2.8)$$

它是单输入单输出 (SISO) 系统的容量的  $r$  倍。这充分说明了在发送端与接收端采用多天线技术, 能够在收发端之间建立起多个通信链路, 且当发送端对信道特性未知时, 发送端等量地将发送功率分配给各个发射天线阵元, 以实现空域分集增加系统容量的可行性。

我们定义信道参数  $\mathbf{H}$  的 Frobenius (F—) 范数  $\|\mathbf{H}\|_F^2 = \text{tr}\{\mathbf{H}^H \mathbf{H}\}$ , F—范数被解释为总功率增益。在上面的假设下, 显然有

$$\|\mathbf{H}\|_F^2 = \text{tr}\{\mathbf{H}^H \mathbf{H}\} = \sum_{l=1}^r \lambda_l$$

这说明信道总增益是其特征值的平方和。

若固定信道总功率增益  $\|\mathbf{H}\|_F^2 = \beta_H^2$ , 且信道参数  $\mathbf{H}$  是满秩的,  $N_T = N_R = N$ 。则信道

容量  $C(\mathbf{H}, \mathcal{P})$  取得最大值当且仅当  $\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{H} \mathbf{H}^H = (\beta_H^2 / N) \mathbf{I}_N$ ，即信道是各向同性相互正交的。这时信道容量  $C(\mathbf{H}, \mathcal{P})$  为

$$C = N \log_2 [1 + \rho(\beta_H^2 / N)] \quad (2.9)$$

它是单输入单输出 (SISO) 系统的容量的  $N$  倍。如果矩阵  $\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{H} \mathbf{H}^H$  的对角线元素全为 1，则  $\beta_H^2 = \|\mathbf{H}\|_F^2 = N$ ，所以信道容量  $C(\mathbf{H}, \mathcal{P})$  的表达式为

$$C = N \log_2 (1 + \rho)$$

注意：上面的结论等价于对下面优化问题解的说明

$$\max_{\lambda_i} \sum_{i=1}^N \log_2 (1 + \rho \lambda_i), \text{ 服从 } \sum_{i=1}^N \lambda_i \leq \mathcal{P} \quad (2.10)$$

### 2.2.3 发送端已知信道参数时的信道容量

在实际工程中，发送端可能有各种各样的措施，去获得信道状态信息。在这种情况下，可以合理地调整、分配发送信号能量以增加信道容量。这个发送功率的优化配置算法称为“注水 (water-filling) 算法”。

回到一般情形，互信息熵的表达式为

$$\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r}) = \log_2 \det(\rho \mathbf{H} \mathbf{Q} \mathbf{H}^H + \mathbf{I}_{N_R}) = \log_2 \det(\rho \mathbf{Q} \mathbf{H}^H \mathbf{H} + \mathbf{I}_{N_T})$$

现在假设信道参数  $\mathbf{H}$  是已知的，我们的任务是通过设计发送信号  $\mathbf{s}$  的统计特性，使  $\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$  取得最大值。这等价于设计矩阵  $\mathbf{Q}$  的结构，使  $\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$  取得最大值。

对矩阵  $\mathbf{H} \in \mathbf{C}^{N_R \times N_T}$  做奇异值分解 (SVD)，得  $\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^H$ ，其中矩阵  $\mathbf{U} \in \mathbf{C}^{N_R \times N_R}$  和  $\mathbf{V} \in \mathbf{C}^{N_T \times N_T}$  是酉矩阵，而  $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{N_R \times N_T}$  是非负对角矩阵 (矩阵  $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{D}$  均已知)。所以有

$$\mathbf{r} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^H \mathbf{s} + \mathbf{n}$$

令  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{U}^H \mathbf{r}$  (接收端波束形成)， $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{V}^H \mathbf{s}$  (发送端波束形成)， $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{U}^H \mathbf{n}$  (接收端波束形成对加性噪声的影响)；注意到矩阵  $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{V}$  是酉矩阵，所以矢量  $\tilde{\mathbf{n}}$  与  $\mathbf{n}$  有相同的概率分布，且  $E[\tilde{\mathbf{s}}^H \tilde{\mathbf{s}}] = E[\mathbf{s}^H \mathbf{s}]$ 。这样原信道模型等价于信道模型

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{D} \tilde{\mathbf{s}} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (2.11)$$

由于矩阵  $\mathbf{H}$  的秩小于或等于  $\min\{N_R, N_T\}$ ，即矩阵  $\mathbf{H}$  的特征值 (矩阵  $\mathbf{D}$  的对角线元素) 最多有  $\min\{N_R, N_T\}$  多个是非零的，将这些非零值表示为

$$\sqrt{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \min\{N_R, N_T\}$$

这样可以将式 (2.11) 写作分量的形式

$$\tilde{r}_k = \sqrt{\lambda_k} \tilde{s}_k + \tilde{n}_k, \quad 1 \leq k \leq \min\{N_R, N_T\} \quad (2.12)$$

如果  $\tilde{r}_k$  还存在  $k > \min\{N_R, N_T\}$  的项，则有  $\tilde{r}_k = \tilde{n}_k$  ( $k > \min\{N_R, N_T\}$ )，显然这些项与发送信号  $\mathbf{s}$  是没有关系的。因而从信号传输角度讲，这些项是没有意义的。上述变换过程对应图 2.2 所示流程。

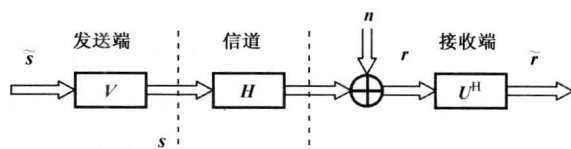


图 2.2 当  $\mathbf{H}$  对于发送和接收端是已知时的分解变换

现在来讨论平均互信息  $\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$  在总信号发送功率  $\mathcal{P}$  的约束下的最大化问题，由式 (2.12)

$$\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{N_r} \mathcal{I}(\tilde{s}_k; \tilde{r}_k)$$

定义  $N_r = \min\{N_R, N_T\}$ 。所以对应优化问题可以表述为

$$\max_{\tilde{s}_k, 1 \leq k \leq N_r} \sum_{k=1}^{N_r} \mathcal{I}(\tilde{s}_k; \tilde{r}_k), \quad \sum_{k=1}^{N_r} E\{|\tilde{s}_k|^2\} \leq \mathcal{P} \quad (2.13)$$

式中， $\mathcal{I}(\tilde{s}_k; \tilde{r}_k) = \mathcal{H}(\tilde{r}_k) - \mathcal{H}(\tilde{r}_k | \tilde{s}_k) = \mathcal{H}(\tilde{r}_k) - \mathcal{H}(\tilde{n}_k)$ 。为了实现平均互信息在信号发送总功率一定的约束条件下的最大化，必须选择  $\{\tilde{s}_k : 1 \leq k \leq N_r\}$  是相互独立、同分布的循环对称复高斯随机变量，以及  $\{\tilde{n}_k : 1 \leq k \leq N_r\}$  也是相互独立、同分布的循环对称复高斯随机变量。设  $\gamma_k = E\{|\tilde{s}_k|^2\}$ ， $\sigma_n^2$  为  $\tilde{n}_k$  的方差，则

$$\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{N_r} \mathcal{I}(\tilde{s}_k; \tilde{r}_k) = \sum_{k=1}^{N_r} \log_2(1 + \rho \lambda_k \cdot \gamma_k) \quad (2.14)$$

在约束条件  $\sum_{k=1}^{N_r} \gamma_k \leq \mathcal{P}$  下，求互信息熵  $\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$  的最大值。采用 Lagrangian 乘法，得  $\{\tilde{s}_k : 1 \leq k \leq N_r\}$  的功率必须满足

$$\gamma_k = (\mu - \rho^{-1} \lambda_k^{-1})^+ \quad (2.15)$$

参数  $\mu$  的选择原则是功率约束  $\mathcal{P}(\mu) = \sum_k (\mu - \rho^{-1} \lambda_k^{-1})^+$ ；而符号  $a^+ = \max\{0, a\}$ ； $\lambda_k$  是矩阵  $\mathbf{H}$  的特征值。而互信息熵  $\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$  的最大值就是对应信道的容量，将式 (2.15) 代入式 (2.14) 得

$$C(\mu) = \sum_k [\log_2(\mu \lambda_k)]^+ \quad (2.16)$$

此  $C$  就是信道容量的值。

优化问题式 (2.13) 的解就是所谓的“注水算法”。将其步骤总结为

$$(1) \text{ 令 } p=1, \text{ 计算参数 } \mu = \frac{1}{(r-p+1)} \left( N_T + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{r-p+1} \frac{1}{\lambda_i} \right);$$

(2) 利用所得参数  $\mu$  来配置信号发送功率，即计算参数  $\gamma_i = \left( \mu - \frac{M_T}{\rho \gamma_i} \sum_{i=1}^{r-p+1} \lambda_i^{-1} \right)$ ，对  $i=1, 2, \dots, r-p$ ；若对应  $\lambda_{r-p+1} \leq 0$ ，则令  $\gamma_{r-p+1} = 0$ ， $p=2, 3, \dots, r$ 。否则， $p \leftarrow p+1$ ，重

新计算前两步，直到  $p=r$  为止。

根据上面的分析，注水算法是一个优化算法。其原理可以解释为：将固定量的液体放入若干个容器中，容器的质量可能有好、差、坏几种情形。要完成存放的任务，最佳的原则是质量好的容器尽量多放，差的少放，坏的不放。注水算法可根据容器质量的好坏程度，实现液体的最佳存放。图 2.3 所示是注水算法的示意图。

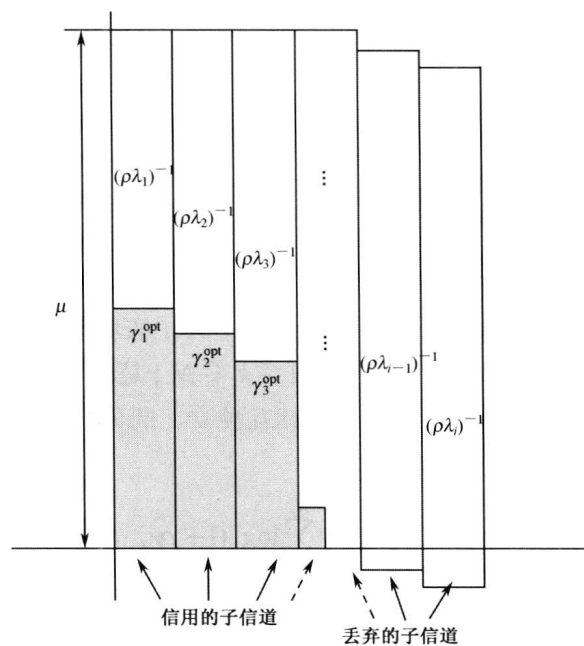


图 2.3 注水 (water-filling) 算法的示意图

在通常情况下，发送端可能没有信道的具体信息，但知道所服务用户的大体方位，这时发送端完全可以调整天线方向图，指向所服务的用户，但是在发送端，仍然对总功率关于各个天线阵元做了均匀分配。图 2.4 所示是在这种情况下系统的容量曲线相应天线方向图。从中可以看到系统容量有明显改善。关于方向图的设计问题请参考文献[4]。

## 2.2.4 确定性信道的信道容量

假设信道参数  $\mathbf{H}$  是确定的，是不随时间而变化的。这个参数对于发送端可能已知也可能未知。若信道参数  $\mathbf{H}$  对发送端是未知的，则信道容量的表达式仍为式 (2.10)；若发送端是已知信道参数  $\mathbf{H}$  的，则它就采用注水算法来合理地配置其发射功率，实现信道容量的最大化。

下面讨论两种特殊情况，以便加深对信道容量的认识。

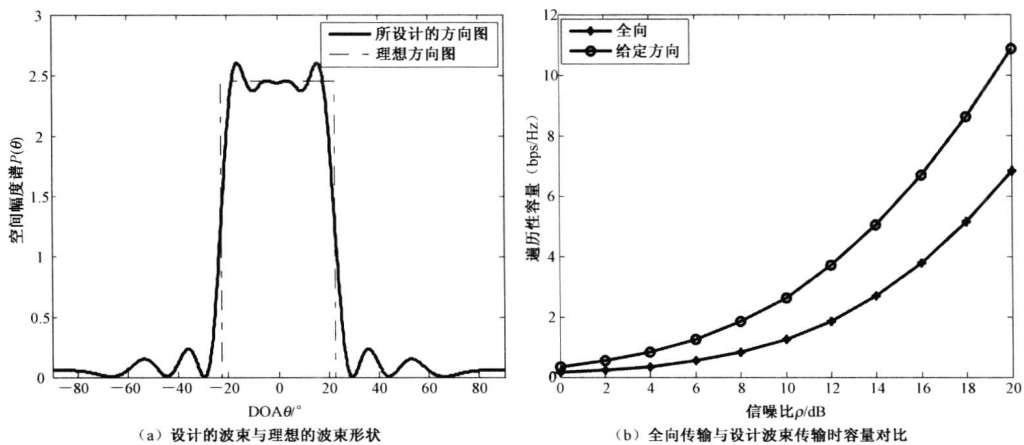


图 2.4 以某确定方向图发送信号的系统容量曲线

### 1. 单输入多输出 (SIMO) 信道的容量

设  $N_T = 1$ , 但有  $N_R$  个接收天线阵元, 在这种情况下, 信道参数  $\mathbf{H}$  是一个  $N_R$  维的列矢量

$$\mathbf{H} = \mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{N_R})^T$$

这时信道容量的表达式

$$C = \log \det(\mathbf{I}_{N_T} + \rho \mathbf{H}^H \mathbf{H}) = \log \det(1 + \rho \mathbf{h}^H \mathbf{h}) = \log(1 + \rho \sum_{k=1}^{N_R} |h_k|^2)$$

若信道的各个参数相等且已归一化, 即  $|h_1|^2 = |h_2|^2 = \dots = |h_{N_R}|^2 = 1$ , 则对应信道容量为

$$C = \log_2(1 + N_R \rho) \quad (2.17)$$

注意: 这时参数  $\rho$  是单输入单输出信道的信噪比。显然信道容量表达式中的因子  $N_R$  就是多个接收天线阵元的分集效应。但是这种分集效应主要体现在系统信噪比的改善上。图 2.5 所示是式 (2.17) 对不同  $N_R$  的曲线, 它们是相互平行的。从中可以看出  $N_R$  的增加对系统容量的改善是明显的。

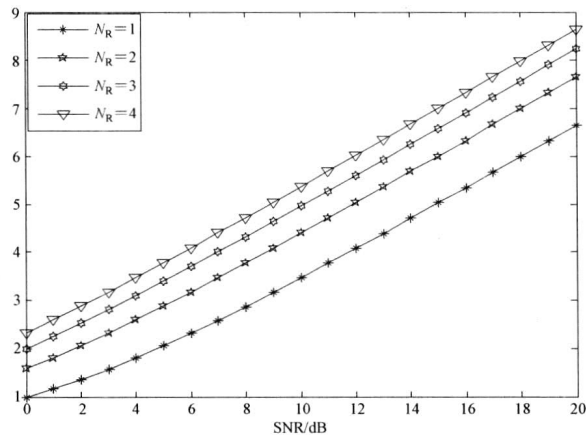


图 2.5 单输入多输出信道的容量关于不同接收天线阵元的变化

## 2. 多输入单输出 (MISO) 信道的容量

与上面讨论的情形相反, 设  $N_R = 1$ , 但有  $N_T$  个发射天线阵元, 在这种情况下, 信道参数  $\mathbf{H}$  是一个  $N_T$  维的行矢量, 即

$$\mathbf{H} = \mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{N_T})$$

这时信道容量的表达式为

$$\begin{aligned} C &= \log_2 \det(\mathbf{I}_{N_T} + \rho \mathbf{H}^H \mathbf{H}) = \log_2 \det(1 + \rho \mathbf{h} \mathbf{h}^H) \\ &= \log_2 (1 + \rho \sum_{k=1}^{N_T} |h_k|^2) \end{aligned} \quad (2.18)$$

图 2.6 所示是利用式 (2.18) 经统计平均得到的信道容量随发射天线阵元数的变化曲线。从中可以看出, 天线阵元数的增加对信道容量的改善是明显的。若信道的各个参数相等且已归一化, 即  $|h_1|^2 = |h_2|^2 = \dots = |h_{N_T}|^2 = 1$ , 则对应信道容量为

$$C = \log_2 (1 + N_T \rho) = \log_2 (1 + \mathcal{P})$$

**注意:** 这时参数  $N_T \rho = \mathcal{P}$  是单输入单输出信道的信噪比。显然信道容量表达式与单输入单输出信道容量是一致的。这说明仅通过增加发射天线阵元数对信道容量没有实质性增加。这是因为在讨论问题的开始, 为了消除多个发射天线阵元的功率在接收端的叠加效应引起的信道容量增加因素, 当发送端未知信道特性信息时, 将总的发射功率  $\mathcal{P}$  等量、均匀地分配给  $N_T$  个发射阵元。否则, 式 (2.18) 与式 (2.17) 有相同的效果。

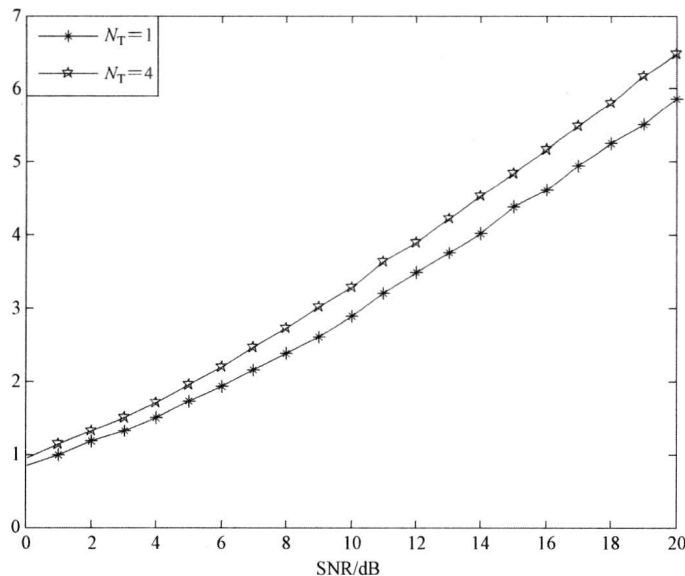


图 2.6 多输入单输出信道的容量关于不同发射天线阵元的变化曲线

通过上面的分析得知, 无论单输入多输出还是多输入单输出信道, 信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  的秩都是 1。这样从本质上说, 在信源与信宿间只有一个方向矢量的通信链路。因此, 它们对信道容量 (传输速率) 的影响如式 (2.18) 和式 (2.17) 所表示的那样, 主要体现在系统信噪比上面。



## 2.2.5 随机性信道的信道容量

上面讨论的无论发送端未知还是已知信道信息、是单输入多输出还是多输入单输出信道，我们都假设信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  是确定的。下面假设信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  的幅度分量服从瑞利分布，而相位分量服从  $[0, 2\pi]$  上均匀分布的准静态 (quasi-static) 随机信道。这种准静态随机信道是在实际工程中经常遇到的，例如，在具有高数据传输速率和低衰落率的无线本地局域网 (WLAN)。

仍然假设接收端具有完全的信道信息而发送端无信道信息，在这种情形下，信道容量也是一个随机变量，可以依据它的累量分布函数 (Cumulative Distribution Function, CDF) 来研究其性能。

图 2.7 所示是一个  $2 \times 2$  的平坦信道的信道容量的累量分布函数曲线 (也就是信道容量的概率分布函数曲线)。图中标注出了以 50% 的概率可以达到的单位比特传输速率。

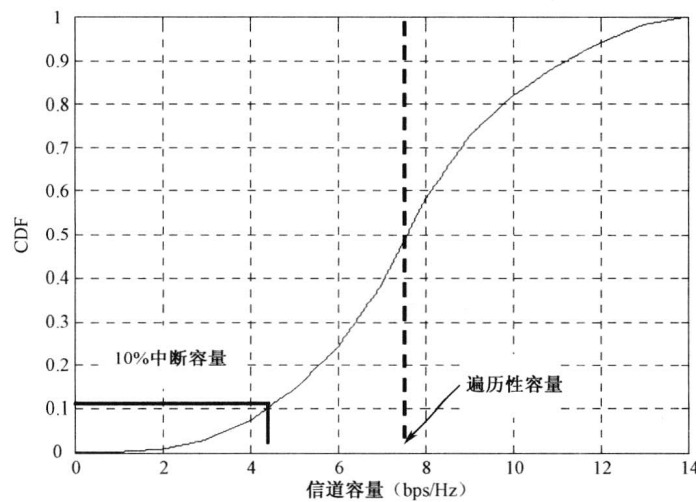


图 2.7 一个  $2 \times 2$  的平坦信道的信道容量的累量分布函数当 SNR 为 10dB 时的曲线

## 2.2.6 遍历性容量

假设信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  是上面假设的随机矩阵过程，多输入多输出信道的遍历性 (Ergodic) 容量也称各态历经容量，其定义为信道容量关于信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  的统计平均。

若假设接收端具有完全的信道信息而发送端无信道信息，在这种情形下，遍历性容量的表达式依据式 (2.7) 可表示为

$$C = E_{\mathbf{H}} \left\{ \sum_{l=1}^r \log_2(1 + \rho \lambda_l) \right\}$$

若假设发送端也有完全的信道信息，则遍历性容量的表达式依据式 (2.14) 可表示为

$$C = E_{\mathbf{H}} \left\{ \sum_{k=1}^{N_r} \log_2(1 + \rho \lambda_k \cdot \gamma_k) \right\}$$

图 2.8 所示是关于  $N = 4$ ，当  $N_R = N_T = N$  时发送端未知和已知信道信息情形下遍历性容量的变化曲线。从中可以看出，在低信噪比时，发送端未知与已知信道信息的系统传输速率差别比较大；而当在高信噪比时，发送端未知与已知信道信息的系统传输速率差别逐渐缩小。说明在低信噪比时，对发送功率的优化配置算法的效能比较突出，而在高信噪比时，对发送功率的优化配置的作用不明显。

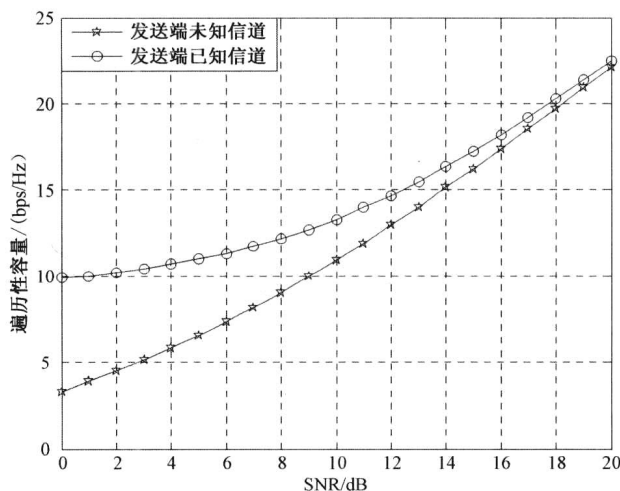


图 2.8 当  $N = 4$  时当发送端未知和已知信道信息情形下遍历性容量的变化曲线

## 2.2.7 中断容量

中断 (Outage) 容量是在系统设计或评价系统可靠性时需要关注的一个量，它是系统标称传输速率与其传输可靠性相关联的一个指标。中断容量是在某种可靠性下系统能够保证的传输速率或容量。

我们称中断容量是  $p\%$  是指信道可以  $(100 - p)\%$  的可靠性保证对应信息传输速率的实现。即给定  $p\%$  的中断容量  $C_{\text{out}}$  (也称  $C_{\text{out}}$  为对应  $p\%$  中断的预留容量)，则系统容量  $C$  满足关系

$$\Pr(C \leq C_{\text{out}}) = p\%$$

图 2.9 所示是  $10\%$  的中断容量当  $N = 1, 2, 3, 4$  ( $N_R = N_T = N$ ) 时，各种情形下中断容量的变化曲线。正如图 2.9 中曲线所揭示的，随着信噪比的增大和天线阵元的增多，中断容量是增加的。根据式 (2.6)，由于假设信道参数  $\mathbf{H}$  的各个元素是独立同分布的，以大数定理，当  $N_R = N_T = N$  时，

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{I}_N$$

所以，对应的信道容量的极限 (渐进) 值为

$$C = N \log_2(1 + \mathcal{P}/\sigma_n^2) \quad (2.19)$$

式中,  $\mathcal{P}$  是发送端信号的总功率。显然, 信道容量关于天线阵元数  $N$  是线性增长的, 而关于信噪比是以 3dB 为阶梯  $N$  速率线性增加的。

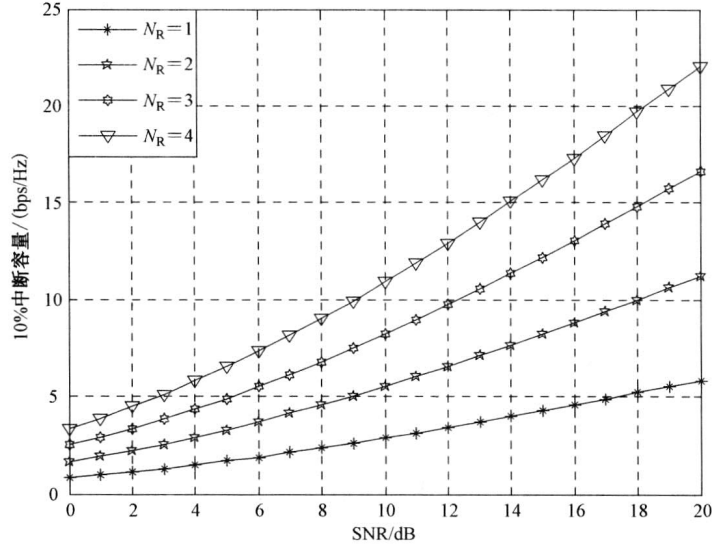


图 2.9 对不同的  $N$  10% 的中断容量的变化曲线

## 2.3 差错指数

信号传输中的信道容量 (Capacity)、Kullback-Leibler 信息<sup>[5]</sup>、信号检测精确度分析中的 Cramer-Rao 界<sup>[6, 9]</sup>等从本质上说是一些一致的概念, 它们所揭示的是关联问题的最佳的目标的。在工程实践中, 我们可能更为关心的是如何获得或到达这个标的。对当前问题, 我们所关心的是如何实现 (工程逼近) 这个对应的容量。差错指数 (Error Exponents) 概念可以部分地回答这个问题。对于给定分组长度  $n$  和传输速率  $R$  的分组码, 差错指数给我们提供一个误码率的上界:

$$\Pr(\text{error}) \leq \exp(-nE_r(R))$$

式中,  $E_r(R)$  称为差错指数或随机编码指数 (Random Coding Exponent), 定义为

$$E_r(R) = \max_{0 \leq \zeta \leq 1} E_0(\zeta) - \zeta R$$

式中, 函数  $E_0(\zeta)$  定义为, 对于发送信号  $\mathbf{s}$  所有可能的分布密度函数  $q_s$ , 在总发射功率为  $\mathcal{P}$ , 即  $E\{\mathbf{s}^H \mathbf{s}\} \leq \mathcal{P}$  的约束条件下, 关于接收信号在发送信号概率分布特性和总能量已知条件下分布指数的信息熵的上确界, 即

$$E_0(\zeta) = \sup_{q_s, E\{\mathbf{s}^H \mathbf{s}\} \leq \mathcal{P}} \mathcal{H}_0(\zeta, q_s) \quad (2.20)$$

式中,  $\mathcal{H}_0(\zeta, q_s) = -\log_2 \int \left[ \int q_s(\mathbf{x}) p(\mathbf{r} | \mathbf{x})^{1/(\zeta+1)} d\mathbf{x} \right]^{(\zeta+1)} d\mathbf{r}$ 。

对于理想信道,  $p(\mathbf{r}|\mathbf{x}) = \det(\pi \mathbf{I}_{N_r})^{-1} \exp\{-(\mathbf{r}-\mathbf{x})^H(\mathbf{r}-\mathbf{x})\}$ , 若进一步选择发送信号  $\mathbf{s}$  的分布密度函数  $q_s$  为高斯分布函数  $\gamma_{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) = \det(\pi \mathbf{Q})^{-1} \exp\{-\mathbf{x}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}\}$ , 则有 (通过一些简单的处理后, 用多维高斯积分)

$$\mathcal{H}_0(\zeta, \mathbf{Q}) = \zeta \log_2 \det[\mathbf{I}_{N_r} + (1+\zeta)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{Q} \mathbf{H}^H]$$

等价于式 (2.20) 的优化问题为

$$\sup_{\mathbf{Q}, \text{tr}\{\mathbf{Q}\} \leq P} \mathcal{H}_0(\zeta, q_s) \quad (2.21)$$

这等价于第 2.2 节曾经讨论过的, 在总的发射功率确定的条件下, 互信息熵  $\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$  关于矩阵  $\mathbf{Q}$  的优化问题。我们得到的解是

$$C(\mathbf{H}, \mathcal{P}(\mu)) = \sum_k [\log_2(\mu \lambda_k)]^+ \quad \text{及} \quad \mathcal{P}(\mu) = \sum_k (\mu - \lambda_k^{-1})^+$$

所以,  $E_0(\zeta) = \zeta \cdot C(\mathbf{H}, \mathcal{P}/(1+\zeta))$ 。

通过这些理论分析, 我们得出的结论是, 无论为了提高信息的传输速率还是为了降低差错率, 我们应将承载信息的信号设计成循环对称复高斯型的。

## 2.4 影响信道容量的其他一些因素

为了获得最大信道容量, 即最大系统吞吐量, 一方面要将发送信号设计成循环对称复高斯随机矢量, 即要求接收信号具有循环对称复高斯随机矢量的特性, 所以要求环境噪声也具有循环对称复高斯随机矢量的特性。另一方面, 要求有尽可能多的相互独立的信源与信宿之间的通信链路, 这等价于要求信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  的元素是相互独立的循环对称复高斯随机变量——瑞利信道特性, 即在最佳情形下,  $\mathbf{H}$  应满足条件

$$\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{H} \mathbf{H}^H = \beta_H^2 \cdot \mathbf{I}_N \quad (2.22)$$

式中,  $\beta_H^2$  是一个正实常数。若这些假设中有某一个条件不满足, 就会影响到系统容量的最佳实现。下面就讨论一些较为重要的影响系统吞吐量的因素。

### 2.4.1 衰落相关对信道容量的影响

在现实中, 有许多因素可能导致信道偏离瑞利的假设, 其中一个最常见的是信道之间的互相关性, 这可能是由于接收天线或发射天线之间的距离“较近”, 使收到的信号可能很“相似”。这种“相似度”用信号之间的相关系数反映。这种“缺陷”在基站可以用下面的方法“校正”(如图 2.10 所示):

- (1) 采用间距大于信道相干距离的偶极子天线。
- (2) 采用间距大于信道相干距离的阵列天线。

相对于基站的这些处理方法, 在移动终端, 由于设备物理尺寸、功耗等因素, 一般是不可行的。

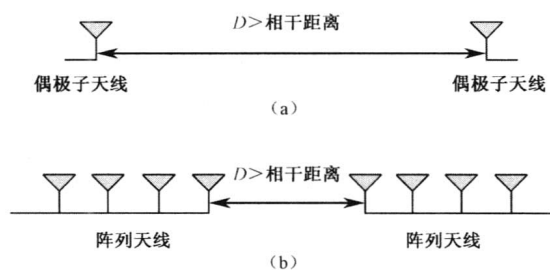


图 2.10 分离偶极子天线和分离阵列天线

(1) 对发送信号，当到达接收器时，由于接收器的几何特性使信号产生接收相关  $\mathbf{R}_r$ ，而传输信道本身依然是理想地用瑞利独立同分布随机矩阵  $\mathbf{H}_o$  来刻画的。

(2) 发送信号由于发送器本身的几何特征被相关“污染”或因为角度扩展被异化为  $\mathbf{R}_t$ 。同样，信道自身依然是具有理想特性的。

(3) 矩阵  $\mathbf{R}_H$  与  $\mathbf{R}_r$  和  $\mathbf{R}_t$  间的关联关系为  $\mathbf{R}_H = \mathbf{R}_t^T \otimes \mathbf{R}_r$ 。此处符号“ $\otimes$ ”表示矩阵的 Kronecker 积或称之为矩阵张量积。

由于发送相关和接收相关，现实信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  就产生了蜕化。理想情况下信道参数矩阵  $\mathbf{H}_o$  是满秩的，但矩阵  $\mathbf{H}$  的秩为  $\min\{\text{rank}(\mathbf{R}_t), \text{rank}(\mathbf{R}_r)\}$ 。不失一般性，假设矩阵  $\mathbf{R}_r$  和  $\mathbf{R}_t$  都是归一化的，即它们的对角线元素（表征自相关性）为 1，则在具有空域衰落相关、发送端无信道信息的 MIMO 系统的信道容量的表达式为

$$C = \log_2 \det(\mathbf{I}_{N_r} + \rho \sqrt{\mathbf{R}_r} \mathbf{H}_o \mathbf{R}_t \mathbf{H}_o^H \sqrt{\mathbf{R}_r}) \quad (2.23)$$

假设  $N_t = N_r = N$ ，且矩阵  $\mathbf{R}_r$  和  $\mathbf{R}_t$  是满秩的。在高 SNR 情形下，信道容量的表达式近似为

$$C \approx \log_2 \det(\rho \mathbf{H}_o \mathbf{H}_o^H) + \log_2 \det(\mathbf{R}_t) + \log_2 \det(\mathbf{R}_r) \quad (2.24)$$

从式 (2.24) 可以看出，相关矩阵  $\mathbf{R}_r$  和  $\mathbf{R}_t$  对信道容量的影响是完全相同的，也是相互独立的。下面量化矩阵  $\mathbf{R}_r$  和  $\mathbf{R}_t$  对信道容量的影响，我们只对矩阵  $\mathbf{R}_r$  与信道容量的关系做讨论，其结论对  $\mathbf{R}_t$  是完全一致适用的。由矩阵的行列式与其特征值之间的关系<sup>[7]</sup>，有

$$\det(\mathbf{R}_r) = \prod_{k=1}^{N_r} \lambda_k(\mathbf{R}_r) \leq 1 \quad (2.25)$$

另外，接收端对信号功率没有衰减也没有附加，所以接收端的总功率应该与其阵元个数一致，而根据前面的讨论  $\mathbf{R}_r$  的 F-范数表示接收端的总功率，即应该有约束条件  $\sum_{k=1}^{N_r} \lambda_k(\mathbf{R}_r) = N_r$ ；将此约束条件与式 (2.25) 结合，可以推断出  $\log_2 \det(\mathbf{R}_r) \leq 0$ ，等式成立当且仅当  $\mathbf{R}_r = \mathbf{I}_{N_r}$ 。将结论  $\log_2 \det(\mathbf{R}_r) \leq 0$  代入式 (2.24)，说明接收（发送）相关性的确减少了信道容量。

对于遍历性容量及中断容量，接收和发送的相关性对其影响可以表示为

$$\log_2 \det(\mathbf{R}_t) + \log_2 \det(\mathbf{R}_r)$$

图 2.11 给出了两发两收系统，仅存在接收相关，且给定

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

相关系数  $\alpha = 0.8$ （较强的相关性）时及  $\mathbf{R}_r = \mathbf{I}_{N_R}$  时遍历性容量随信噪比的变化曲线。从图中可见，当信噪比为 20dB 时，遍历性容量的损失约为 2.47bps/Hz。因此，可以断言，信道的相关性对于系统的吞吐量不是个好的东西。

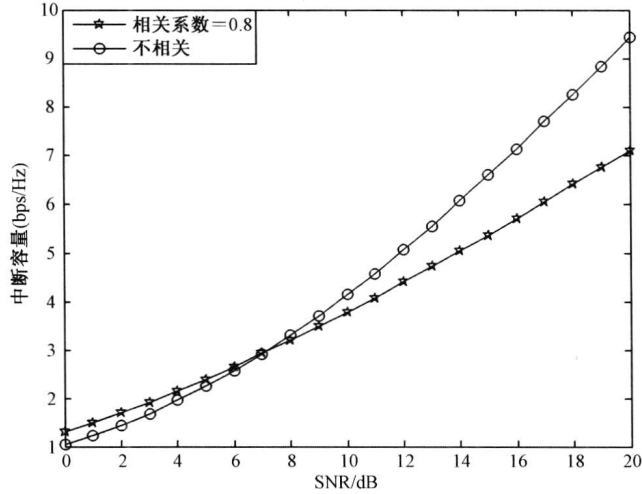


图 2.11 遍历性容量与信道相关性和关联性曲线

## 2.4.2 直达波对信道容量的影响

导致信道偏离独立同分布瑞利的假设的另一个因素就是直达波（line-of-sight）分量的存在。这时信道称为莱斯信道，而对应信道模型变成

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{LOS}} + \sqrt{\mathbf{R}_r} \mathbf{H}_o \sqrt{\mathbf{R}_t} \quad (2.26)$$

式中， $\mathbf{H}_{\text{LOS}}$  是直达波分量或莱斯分量，第二个分量是前面已经讨论过的。

直达波分量的存在是由于发送端与接收端处于相互可视的区域位置。由第 1 章关于信道特性的讨论，我们知道莱斯信道可以表示成固定分量和散射分量之和的形式，即

$$\mathbf{H}_{\text{LOS}} = \sqrt{\frac{K}{1+K}} \bar{\mathbf{H}} + \sqrt{\frac{1}{1+K}} \mathbf{H}_o \quad (2.27)$$

式中， $\sqrt{\frac{K}{1+K}} \bar{\mathbf{H}} = E\{\mathbf{H}_{\text{LOS}}\}$  是固定分量，而矩阵  $\bar{\mathbf{H}}$  的元素具有单位方差；因子  $K$  是莱斯  $K$  因子，定义为信道直达分量的功率与散射衰落分量功率之比。 $K = 0$  对应于独立同分布的瑞利信道假设；而  $K = \infty$  对应于无散射衰落的情形。直达波分量可用如下两种情况说明：

- (1) 直达波的存在是由于发送端与接收端处于相互可视的区域位置。
- (2) 直达波的存在是由于空旷的（无散射）传播环境。

图 2.12 所示是一个室内宽带无线局域网环境下空旷传播环境与丰富散射环境对传输效果的影响示意图。左侧是一个直达波占优及天线阵元耦合放置的情形，而右侧是一个具

有丰富散射环境的理想传输信道情形。

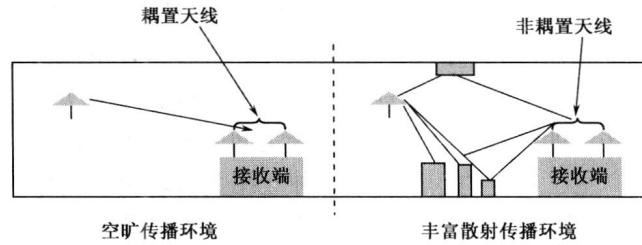


图 2.12 WLAN 的传播环境与传输效果的图示

总而言之，是相关性对传输效果起决定性影响，MIMO 技术的关键是提供同一个信号的多个相互独立的模板，来提高信号检测与估计的可靠性。若取矩阵  $\bar{H}$  具有如下形式

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

相关系数  $\alpha = 0.8$  (较强的相关性)，与前面关于衰落相关对信道容量的影响类似，在图 2.13 中，画出了遍历性容量随  $K$  因子的变化曲线。随着  $K$  因子的增大，遍历性容量是单调减的；由式 (2.27)，随着  $K$  因子的增大，直达波分量的均值是增大的，因此，可以断言，信道中的直达波分量对于系统吞吐量也不是个好的东西。我们必须尽力消除信道中的直达波分量。

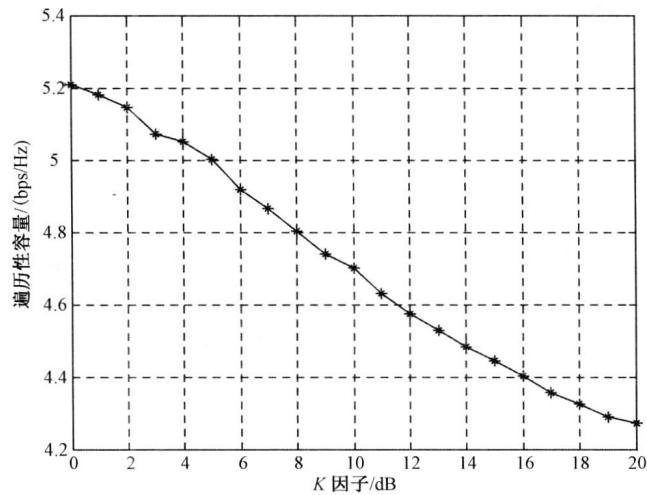


图 2.13 遍历性 MIMO 信道容量随  $K$  因子的变化曲线

### 2.4.3 交叉极化判别对信道容量的影响

迄今为止，我们没有涉及发射天线与移动终端的接收天线的极化问题。而事实上，当讨论系统吞吐量时，一直假设安置于基站的发射天线与移动终端的接收天线具有完全相同的极化。然而实际情形是发射和接收天线往往采用完全不同或相互正交的极化。要完成信

号的传输，各天线必须能够实现交叉极化判别（Cross-Polarization Discriminate, XPD），发射和接收天线的正交极化特性可以平衡信道矩阵  $\mathbf{H}$  的元素间的增益与相关性<sup>[8]</sup>。这种交叉极化判别也可以保证它们阵元之间的零耦合，使它们各自发出的信号相互正交不相关，还保证对与它们极化特性正交的信号实现完全理想的“屏蔽”或“盲视”。

然而在现实信号传输的过程中，总是有信号之间的相互“泄露”发生，因而破坏了原来相互正交的特性，产生了一定的互相关。这种互相关就影响了信号的传输效率或信道的容量。为分析理解这种泄露，我们引入与交叉极化判别相反的交叉极化耦合（Cross-Polarization Coupling, XPC）的概念。交叉极化判别意味着一个天线阵元能够很好地区别它与其他天线阵元的极化特性，而交叉极化耦合是指由于传输路径缺少丰富的散射物理条件使信号在传播过程中产生相互耦合。这些现象由参数  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) 来综合定义，若  $\alpha = 0$ ，则说明可以实现很好的交叉极化判别，即不存在干扰信号或不存在交叉极化耦合；若  $\alpha = 1$ ，则天线阵元无法实现交叉极化判别或无法辨别与之极化特性相同的信号因而产生严重的互干扰。

讨论一个  $2 \times 2$  的 MIMO 系统。假设信道的各个参数满足条件

$$E\{|h_{1,1}|^2\} = E\{|h_{2,2}|^2\} = 1; \quad E\{|h_{1,2}|^2\} = E\{|h_{2,1}|^2\} = \alpha$$

设信道是独立同分布的瑞利型的，交叉极化的信道矩阵  $\mathbf{H}$  可近似为

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\beta} \odot (\sqrt{\mathbf{R}_r} \mathbf{H}_o \sqrt{\mathbf{R}_t}) \quad (2.28)$$

式中，矩阵  $\boldsymbol{\beta}$  为

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

运算符号  $\odot$  表示 Hadamard 矩阵积（定义为矩阵对应元素相乘，即若  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \odot \mathbf{C}$  则  $[\mathbf{A}]_{i,j} = [\mathbf{B}]_{i,j} [\mathbf{C}]_{i,j}$ ）。矩阵  $\mathbf{R}_r$  和  $\mathbf{R}_t$  是前面已经定义过的描述接收端和发送端相关特性的矩阵，现在它们也包括了交叉极化耦合的因素。交叉极化耦合与传播路径的散射环境有关，若不存在散射传播，则式 (2.28) 中  $\mathbf{H} = \boldsymbol{\beta}$ 。所以对应信道容量为

$$C_{\alpha=0} = 2 \log_2(1 + \rho)$$

反之则为

$$C_{\alpha=1} = \log_2(1 + 2\rho)$$

注意：当  $\alpha = 1$  时，矩阵  $\mathbf{H}$  的四个元素全为 1，所以，其特征值分别为 2 和 0。

在小信噪比情形，即  $\rho \ll 1$ ，利用近似关系式  $\log_2(1+x) \approx x \log_2 e$  ( $x \ll 1$ )，则相应

$$C_{\alpha=0} \approx 2\rho \log_2 e \text{ 和 } C_{\alpha=1} \approx 2\rho \log_2 e$$

在小信噪比情形下能否实现交叉极化判别对信道容量无影响，这时环境噪声成了影响信号传输的主要因素。

在大信噪比情形，即  $\rho \gg 1$ ，利用近似关系式  $\log_2(1+x) \approx \log_2 x$  ( $x \gg 1$ )，则相应

$$C_{\alpha=0} \approx 2 \log_2 \rho \text{ 和 } C_{\alpha=1} \approx \log_2(2\rho) \quad (2.29)$$



图 2.14 给出了  $2 \times 2$  MIMO 系统的遍历性容量与能否实现交叉极化判别的相关度。说明在较大信噪比情形交叉极化判别对系统传输效率的重要性。

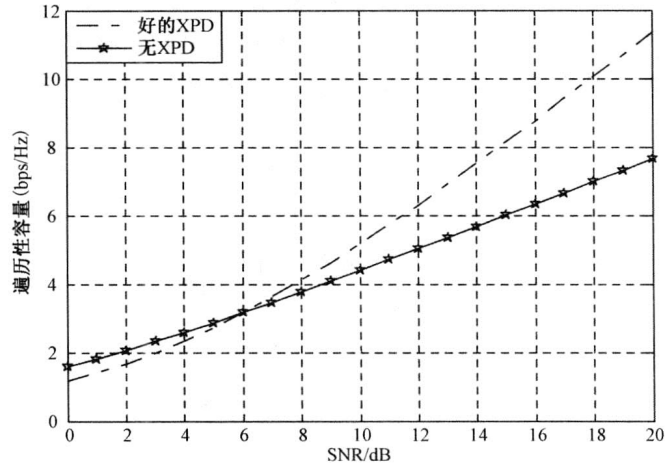


图 2.14 遍历性 MIMO 信道容量与好的 XPD ( $\alpha = 0$ )及无 XPD( $\alpha = 1$ )的关联性

#### 2.4.4 信道蜕化—锁眼效应对信道容量的影响

考虑一个  $2 \times 2$  系统, 天线阵元周围具有丰富的散射体, 且天线阵元之间是互不相关的。假设在收发天线之间存在有一个小洞的幕墙, 如图 2.15 所示, 信号只能通过此洞实现收发天线间的传播, 这种传播机理称为“锁眼效应”(Keyhole Effect)。

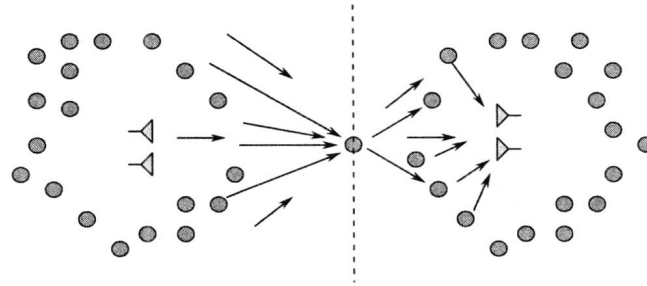


图 2.15 锁眼效应

设发送的信号矢量为

$$\mathbf{s} = [s_1 \quad s_2]^T$$

式中,  $s_1$  和  $s_2$  分别是第一个和第二个阵元发出的信号。到达锁眼的信号为

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{H}_t \mathbf{s}$$

式中, 矢量  $\mathbf{H}_t$  为

$$\mathbf{H}_t = [h_1 \quad h_2]$$

式中,  $h_1$  和  $h_2$  是对应于第一个和第二个阵元到锁眼的传播系数,  $h_1$  和  $h_2$  是相互独立的复高

斯随机变量。信号经过锁眼后的形式为

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{v}\mathbf{r}_0$$

式中,  $\mathbf{v}$  是锁眼的衰落系数。信号经过锁眼到达接收端的信号为  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{H}_r\mathbf{r}_1$ , 其中  $\mathbf{H}_r$  是锁眼到接收端的传播系数矩阵  $\mathbf{H}_r = [h_3 \ h_4]^T$ ,  $h_3$  和  $h_4$  是相互独立的复高斯随机变量。

令  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r\mathbf{H}_t$  表示整个从发送端到接收端的锁眼传播矩阵, 则接收信号矢量可以表示为

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{v}\mathbf{H}\mathbf{s}$$

而锁眼传播矩阵  $\mathbf{H}$  与锁眼前后传播系数的关系为

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1h_3 & h_2h_3 \\ h_1h_4 & h_2h_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}$$

由于矩阵  $\mathbf{H}$  是由两个矢量的外积构成的, 所以信道传播矩阵  $\mathbf{H}$  是缺秩的, 其秩为 1。  $\mathbf{H}$  的幅度分布是所谓双瑞利型的, 其概率分布密度函数为

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{x}{\omega\sigma_r^4} \exp\left\{-\frac{\omega^4 + x^2}{2\omega^2\sigma_r^2}\right\} d\omega, \quad x \geq 0$$

它是由相互独立的两个瑞利分布的随机变量的积产生的, 每个具有功率谱密度  $\sigma_r^2$ 。由于仅有一个传播通路, 对应的信道容量为

$$C = \log_2(1 + \rho\lambda)$$

式中,  $\rho$  是所给  $2 \times 2$  系统的信噪比;  $\lambda$  是  $\mathbf{H}$  的唯一特征值。

系统容量关于系统信噪比  $\rho$  是以  $\lambda$  为比例对数增长的, 这类似一个单输入单输出 (SISO) 系统的容量, 虽然实际系统是一个多输入多输出 (MIMO) 系统。图 2.16 给出了系统容量由于锁眼效应与正常相比的蜕化随信噪比的变化曲线。所以, 锁眼效应对系统容量是一个负效应。

锁眼现象的产生可以是信号穿过建筑物的窗户或穿过两边皆为高层建筑的狭长街道的传播现象。

## 2.4.5 频率选择性信道对信道容量的影响

如第 1 章所述, 所谓频率选择性信道是指信道对不同频率的信号产生的衰落是不相同的。因而影响信号传输的质量, 进而影响系统吞吐量。频率选择性信道对信道容量的影响问题的解决是将信道分割成  $N_f$  个子信道, 对每一个子信道而言信道是频率非选择性的, 这样在子信道上可以直接应用前面关于信道容量的讨论结果。

若将整个信道分为  $N_f$  个子信道, 则对应第  $l$  个子信道的接收信号表示为

$$\mathbf{r}_l = \mathbf{H}_l\mathbf{s}_l + \mathbf{n}_l \quad (l=1, 2, \dots, N_f)$$

式中,  $\mathbf{r}_l$  是对应第  $l$  个子信道的  $N_R \times 1$  维的接收信号矢量;  $\mathbf{s}_l$  是对应第  $l$  个子信道的  $N_T \times 1$  维的发送信号矢量;  $\mathbf{n}_l$  是对应第  $l$  个子信道的  $N_R \times 1$  维的加性噪声信号矢量。

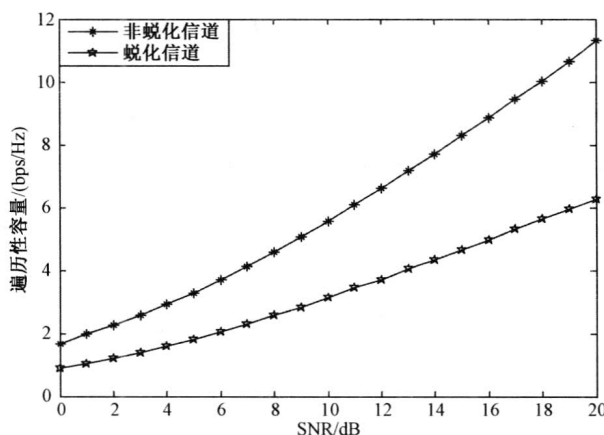


图 2.16 2×2 的蜕化信道与非蜕化容量曲线

将整个宽带信道的接收信号表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}$$

式中,  $\mathbf{r} = [r_1^T, r_2^T, \dots, r_{N_f}^T]^T$  是  $N_R N_f \times 1$  维的接收信号矢量;  $\mathbf{s} = [s_1^T, s_2^T, \dots, s_{N_f}^T]^T$  是  $N_T N_f \times 1$  维的发送信号矢量;  $\mathbf{n} = [n_1^T, n_2^T, \dots, n_{N_f}^T]^T$  是  $N_R N_f \times 1$  维的加性噪声信号矢量; 矩阵  $\mathbf{H}$  是  $N_R N_f \times N_T N_f$  维的以子信道矩阵  $\mathbf{H}_l$  为对角元素的分块对角矩阵。

设  $\mathbf{R}_s = E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^H\}$  是信号协方差矩阵, 满足传输信号功率约束  $\text{tr}(\mathbf{R}_s) = \mathcal{P}$ , 即发送信号满足总功率约束  $\mathcal{P}$ 。由式 (2.6), 这时系统的容量为

$$C_{\text{FS}} = (B/N_f) \max_{\text{tr}(\mathbf{R}_s) = N_f \mathcal{P}} \log_2 \det(\mathbf{I}_{N_f N_R} + \rho \mathbf{H} \mathbf{R}_s \mathbf{H}^H) \quad (\text{bps/Hz}) \quad (2.30)$$

下面进一步讨论发送端未知和已知信道参数两种情形下, 对应信道容量的表达式。

### 1. 发送端未知信道参数的情形

当发送端没有信道信息时, 它最佳的选择是全向地发送信号, 即信号协方差矩阵  $\mathbf{R}_s = \mathbf{I}_{N_T N_f}$ 。这时系统的容量为

$$C_{\text{FS}} \approx \frac{B}{N_f} \sum_{k=1}^{N_f} \log_2 \det(\mathbf{I}_{N_R} + \rho \mathbf{H}_k \mathbf{H}_k^H) \quad (\text{bps/Hz}) \quad (2.31)$$

若信道是平坦衰落信道, 则  $\mathbf{H}_l = \mathbf{H}$  ( $l=1, 2, \dots, N_f$ ), 这时式 (2.31) 变为

$$C_{\text{FS}} \approx \log_2 \det(\mathbf{I}_{N_R} + \rho \mathbf{H} \mathbf{H}^H) \quad (\text{bps/Hz})$$

这与通常情形下 MIMO 信道容量的表达式 (2.6) 是一样的。

进一步, 若各个子信道矩阵  $\mathbf{H}_l$  是独立同分布的(即信道参数的相干带宽是  $B/N_f$  Hz), 则当子信道分割数  $N_f \rightarrow \infty$ , 由式 (2.31) 知, 发送端未知信道信息时的信道容量渐近于一个固定值  $C_{\text{FS}}^\infty$ 。

若信道是随机的, 仿照前面的讨论, 则有遍历性容量和中断容量。遍历性容量的表达式为

$$C_{\text{FS}}^{\text{Ergodic}} = E_{\mathbf{H}} \left\{ \frac{B}{N_f} \sum_{k=1}^{N_f} \log_2 \det(\mathbf{I}_{N_r} + \rho \mathbf{H}_k \mathbf{H}_k^H) \right\} \text{ (bps/Hz)}$$

中断容量的定义与第 2.7 节完全一致，不过由于我们对信道的划分，产生了一定的频率分集，因而频率选择性信道的中断容量要好于平坦衰落信道（如图 2.17 所示）。

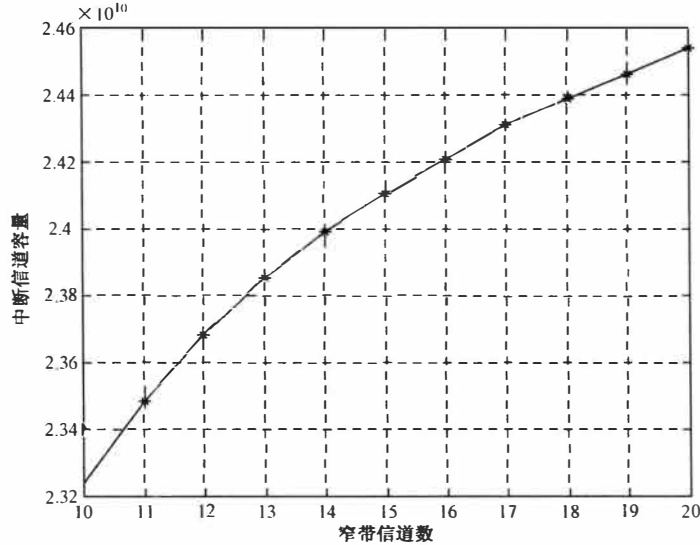


图 2.17 中断信道容量与频率选择性信道的子信道分割数之间的变化曲线

图 2.17 给出的是随着子信道分割数  $N_f$  的增加，中断容量的变化曲线。显然，随着  $N_f$  的增加，中断容量也是单调增的；而且随着  $N_f$  的增加，中断容量渐收敛于一个确定值。这与  $C_{\text{FS}}$  随  $N_f$  增加收敛于  $C_{\text{FS}}^{\infty}$  的结论是一致的。

在工程实践中，影响频率选择性 MIMO 信道遍历性容量和中断容量的因素诸如延迟色散、杂波角度色散、总角度色散等，我们必须综合考虑。

## 2. 发送端已知信道参数的情形

假设信道参数  $\mathbf{H}$  对发送端是已知的，可以将信道  $\mathbf{H}$  分解成  $r_H = \text{rank}(\mathbf{H})$  个空-频模式，这时信道容量的表达式为

$$C_{\text{FS}} = \frac{B}{N_f} \max_{\sigma_s^2 = N_f \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{r_H} \log_2 \det(\mathbf{I}_{N_r N_r} + \rho \gamma_k \lambda_k (\mathbf{H}\mathbf{H}^H)) \text{ (bps/Hz)}$$

式中， $\sigma_s^2 = \text{tr}(\mathbf{R}_s) = \sum_{k=1}^{r_s} \gamma_k$ ， $r_s = \text{rank}(\mathbf{R}_s)$ ； $\lambda_k(\mathbf{H}\mathbf{H}^H)$  ( $k=1, 2, \dots, r_H$ ) 是信道  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  的非零特征值； $\gamma_k$  是发送端将总发送功率配置给第  $k$  个链路的分量。具体实现是通过“注水算法”完成的。

## 2.5 模拟说明

本章计算机模拟图形均是在 MATLAB 2009a<sup>®</sup>平台上由作者完成的。部分原理图参考了文献[3]。

## 2.6 本章要点总结

- (1) 信道容量与信息传输速率的概念是等同的。
- (2) 信道容量是由接收信号矢量与加性环境噪声矢量的信息熵的差定义的。
- (3) 对于任意具有相同协方差特性的随机矢量，服从循环对称复高斯（Gaussian）的随机矢量其信息熵最大，若记其对应协方差矩阵为  $\mathbf{Q}$ ，则其信息熵为  $\log_2 \det(\pi e \mathbf{Q})$ 。
- (4) MIMO 系统的容量是信道参数  $\mathbf{H}$  和发送信号矢量协方差矩阵  $\mathbf{R}_s$  的函数，考虑到信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  的随机特性，系统容量取决于发送信号矢量协方差矩阵  $\mathbf{R}_s$ 。因此，从本质上说，系统容量是  $\mathbf{R}_s$  的函数，即

$$C(\mathbf{R}_s) = \log_2 \det(\mathbf{I}_{N_r} + \rho \mathbf{H} \mathbf{R}_s \mathbf{H}^H)$$

当发送端未知信道信息时，其最佳策略应该是全向发送，对应  $\mathbf{R}_s = \mathbf{I}_{N_t}$ ；当发送端已知信道信息时，发送端利用“注水算法”合理地配置其发射功率，以求实现系统容量最大化。

- (5) 中断容量是描述系统可靠性的一个指标，也有人将其称为“预留容量”，中断容量  $C_p$  是指信道可以  $(100 - p)\%$  的可靠性保证对应信息传输速率的实现。
- (6) 信道容量可定义为无差错情形下系统的传输速率，但实际上工程中差错是不可避免的。差错指数给我们提供一个将系统误码率与系统容量联系起来的契机。
- (7) 影响信道容量还有其他一些因素。

## 练习题

1. 在公式

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,N} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{T,1} & C_{T,2} & \cdots & C_{T,N} \end{bmatrix}$$

中，发射信号是这样表示的，时间标号垂直的变化，天线（空间）标号水平的变化。对时间标号水平的变化，天线（空间）标号垂直的变化重写公式  $\mathbf{r} = \mathbf{C}\mathbf{H} + \mathbf{n}$ 。证明新的矩阵是原公式中的矩阵的转置。

2. 考虑一个具有双发射天线和单接收天线的多输入多输出信道。同时, 假定加性高斯噪声具有零均值和单位方差, 并且限制每发射天线的平均功率为 1。当从第一根发射天线和第二根发射天线到接收的路径增益分别为  $\alpha_1 = 1$  和  $\alpha_2 = 1 + j$  时, 求该信道的容量。

3. 在第 2 题中, 若发射机对信道已知, 并且限制对 2 个天线的发射功率之和为 2, 求此时的信道容量。

4. 计算当信道为独立同分布瑞利衰落模型  $f_R(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ ,  $x \geq 0$ , 信噪比  $\gamma = 20$  dB 时, 如下信道由公式  $C = \log_2[\det(I_M + \frac{r}{N} \mathbf{H}^H \mathbf{H})]$  定义的容量的补累积分布函数 (CDF):

(1) 单发射天线和单接收天线; (2) 双发射天线和单接收天线; (3) 单发射天线和双接收天线; (4) 双发射天线和双接收天线。画出包含结果的图。

5. 考虑一个具有三发射天线和单接收天线的多输入多输出信道。当中断容量  $C_{\text{out}} = 1$  bps/Hz 时, 求当信噪比  $\gamma = 10$  时的中断概率。

## 参 考 文 献

- [1] Telatar E. Capacity of Multi-Antenna Gaussian Channels. European Transactions on Telecommunications, 1999, 10 (6) : 585–595.
- [2] Foschini G J, Gans M J. On Limits of Wireless Communications in a Fading Environment When Using Multiple Antennas. Wireless Personal Communications, Vol. 6, 1998: 311–335.
- [3] Jankiraman M. space-time codes and MIMO systems. Artech House, 2004.
- [4] Stoica P, Li J, Yao X. On Probing Signal Design For MIMO radar. IEEE Trans. on Sig. Proc., 2007, 55 (8) : 4151–4161.
- [5] Stoica P, Moses R. spectral analysis of signals. Pearson Education, 2005.
- [6] Kay S M. Modern Spectral Estimation Theory & Application. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.
- [7] Golub G, Van Loan C. Matrix Computations. 2nd edition. Baltimore, MD: John Hopkins University Press, 1989.
- [8] Nabar R, et al. Performance of Multi-Antenna Signaling Techniques in the Presence of Polarization Diversity. IEEE Trans. Sig. Proc., 2002, 50 (10) : 2553–2562.
- [9] 邵朝, 卢光跃. 交替分离算法的 Cramer-Rao 界. 电子与信息学报, 2007, 29 (3): 582-583.

## 第3章 空时分组码的设计准则

### 引言

在整个全书的叙述中，所谓码字是指从输入的比特流到发射符号的一种变换或称之为映射。依第2章中的讨论，假定符号从不同的天线同时发射。在本章中，通过求得不同的码字之间的一些界来研究它们到达接收端被解码的性能，通过这些界，能够求得在接收端发生错误解码的概率。进而，利用这些界为设计具有优良性能的码字提供指导。这样一种指导思想被称为准则。或者可以这样来理解，通过《高等数学》的学习，我们已经知道求解函数最大值或最小值的问题，即

$$\max_{x \in \Omega} f(x) \text{ 或 } \min_{x \in \Omega} f(x) \quad (3.1)$$

式中， $\Omega$  是一个给定或确定的集合； $f(x)$  为目标函数或代价函数；而自变量  $x$  可能有许多变化方式（途径）使目标函数  $f(x)$  达到最大或最小值，通过对这些方式或途径的研究，构成约束自变量  $x$  的法则或称为准则。因此，所谓设计准则一般都与某个优化问题相关联，或其本身就是一个最优化问题。

本章中绝大部分的分析都是渐近分析（在极限或逼近的意义下）。因此，不同的渐近假设可能得到不同的渐近分析。我们集中于讨论准静态瑞利衰落无线信道，以及一些导致获得最大分集和在高信噪比时优良性能的重要设计准则。

本章的讨论较多地参考了文献[1-3]关于空时编码设计准则的论述。

一个好的码字遵循某种准则，该准则为码字增加了某种最优的概念。例如，考虑线性二元分组信道码在二元对称信道上的传输。该系统的误比特率取决于码字对之间的汉明（Hamming）距离。定义所有可能的码字对和相应的汉明距离的集合，我们用  $d_{\min}$  表示最小汉明距离。可以证明，一个具有最小汉明距离  $d_{\min}$  的码字可以纠正所有权重小于或等于  $\lfloor (d_{\min} - 1)/2 \rfloor$  的差错，其中  $\lfloor x \rfloor$  表示小于或等于  $x$  的最大整数。因此，对于给定的冗余度，一个“好的”码字应具有大的汉明距离。这样一个码字的设计准则就是最大化所有可能的码字对的最小汉明距离。两种具有相同冗余度的码字相比较，具有较大汉明距离的码字更为优越。假设通信信道为加性高斯白噪声（AWGN）信道，一个好的设计准则就是最大化（对应码字的纠错能力）所有可能的码字对的最小汉明距离（欧氏距离）。

在随后的部分中，我们研究空时编码的设计准则，获得在高信噪比时保证可能的最大分集增益和编码增益的码字，从而保证系统能够在相同频谱效率或频谱有效性、中断概率下获得最大吞吐量。

$$\underset{T \times N_R}{\mathbf{r}} = \underset{T \times N_T}{\mathbf{C}} \underset{N_T \times N_R}{\mathbf{H}} + \underset{T \times N_R}{\mathbf{n}}$$

### 3.1 秩和行列式准则

为了提出一种设计准则，首先需要对码字的错判的影响进行量化。在空时编码中，其  $T \times N_T$  的码字矩阵由式 (2.1) 所给出。假定发射的码字  $\mathbf{C}^{(1)}$  为

$$\mathbf{C}^{(1)} = \begin{bmatrix} c_{1,1}^{(1)} & c_{1,2}^{(1)} & \cdots & c_{1,N_T}^{(1)} \\ c_{2,1}^{(1)} & c_{2,2}^{(1)} & \cdots & c_{2,N_T}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{T,1}^{(1)} & c_{T,2}^{(1)} & \cdots & c_{T,N_T}^{(1)} \end{bmatrix}$$

若译码器的误判认为发射的是另一个码字  $\mathbf{C}^{(2)}$ ，那么此时就发生了错误判决。例如，错判为

$$\mathbf{C}^{(2)} = \begin{bmatrix} c_{1,1}^{(2)} & c_{1,2}^{(2)} & \cdots & c_{1,N_T}^{(2)} \\ c_{2,1}^{(2)} & c_{2,2}^{(2)} & \cdots & c_{2,N_T}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{T,1}^{(2)} & c_{T,2}^{(2)} & \cdots & c_{T,N_T}^{(2)} \end{bmatrix}$$

如果所有码字集合的码字表仅包含  $\mathbf{C}^{(1)}$  和  $\mathbf{C}^{(2)}$ ，我们将发射的是  $\mathbf{C}^{(1)}$  并且将之检测为  $\mathbf{C}^{(2)}$  的成对错误概率 (Pair-Error-Probability, PEP) 用  $\Pr\{\mathbf{C}^{(1)} \rightarrow \mathbf{C}^{(2)}\}$  来表示。注意，在通常情况下，码字表包含  $I$  个码字，应用一致界，当发射  $\mathbf{C}^{(0)}$  时，其错误概率的上界为

$$\Pr\{\text{error} \mid \mathbf{C}^{(0)} \text{ is sent}\} \leq \sum_{i=1}^{I-1} P(\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(i)}) \quad (3.2)$$

应用式 (3.2)，可以计算得到全部的错误概率的上界。

随后，计算成对错误概率  $\Pr\{\mathbf{C}^{(1)} \rightarrow \mathbf{C}^{(2)}\}$ ，并且用它来定义设计准则。为了计算成对错误概率，首先假定信道矩阵已知，然后通过对  $\mathbf{H}$  的分布求期望来计算平均错误概率。

为不失一般性，用式 (2.1) 来表示信道的输入、输出之间的关系和第 2.1 节中的相应的规约。每一个天线的平均符号传输功率为  $E_s = 1/N_T$ ，而噪声样本的方差为

$$E\{|n_{i,m}|^2\} = \sigma_n^2 = 1/\rho$$

式中， $\rho$  为信号传输的信噪比 (SNR)。考虑已知码字  $\mathbf{C}$  和信道矩阵  $\mathbf{H}$  时接收信号的条件概率分布，即  $f(\mathbf{r} \mid \mathbf{C}, \mathbf{H})$ 。注意，相互独立的高斯随机变量的线性组合仍然是一个高斯随机变量。因为对于给定的  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{H}$ ，假定具有多个独立成分的高斯噪声  $\mathbf{n}$ ，所以接收矢量  $\mathbf{r}$  也是一个多维的高斯随机变量。因此，其条件概率分布密度函数为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r} \mid \mathbf{C}, \mathbf{H}) &= \frac{1}{(\sqrt{\pi}\sigma_n)^{T \cdot N_R}} \exp\{-\text{tr}[(\mathbf{r} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C})^H (\mathbf{r} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C})] / \sigma_n^2\} \\ &= \left(\frac{\rho}{\pi}\right)^{T \cdot N_R / 2} \exp\{-\rho \text{tr}[(\mathbf{r} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C})^H (\mathbf{r} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C})]\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

用矩阵的 F 范数将式 (3.3) 重新整理为



$$\begin{aligned}
f(\mathbf{r} | \mathbf{C}, \mathbf{H}) &= \left(\frac{\rho}{\pi}\right)^{T \cdot N_R / 2} \exp\{-\rho \|\mathbf{r} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}\|_F^2\} \\
&= \left(\sqrt{\frac{\rho}{\pi}}\right)^{T \cdot N_R} \exp\left\{-\rho \sum_{\tau=1}^T \sum_{m=1}^{N_R} |(\mathbf{r} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C})_{\tau, m}|^2\right\} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

式中， $\|\mathbf{r} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}\|_F^2 = \sum_{\tau=1}^T \sum_{m=1}^{N_R} |(\mathbf{r} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C})_{\tau, m}|^2$  是由 F 范数的定义公式所得到的，其中  $(\mathbf{r} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C})_{\tau, m}$  表示矩阵  $(\mathbf{r} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C})$  的第  $(\tau, m)$  个元。利用最大似然 (Maximum Likelihood, ML) 译码判决选择求解使得  $f(\mathbf{r} | \mathbf{C}, \mathbf{H})$  最大化的码字矩阵  $\mathbf{C}$  应该具有的结构，这等价于求 F 范数  $\|\mathbf{r} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}\|_F^2$  的最小化。

假设发射的是码字  $\mathbf{C}^{(0)}$ ，则接收信号矢量为  $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(0)} + \mathbf{n}^{(0)}$ ，并且给定信道矩阵  $\mathbf{H}$ ，假设将其误判为  $\mathbf{C}^{(1)}$ ，即误认为接收信号矢量为  $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{n}^{(0)}$ ，产生这个错误认识是因为发生了事件  $\left\{\|\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(0)}\|_F^2 > \|\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1)}\|_F^2\right\}$ 。所以条件成对错误概率为

$$\begin{aligned}
\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} &= \Pr\left\{\|\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(0)}\|_F^2 - \|\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1)}\|_F^2 > 0 | \mathbf{H}\right\} \\
&= \Pr\left\{\text{tr}[(\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(0)})^H (\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(0)})] - \text{tr}[(\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1)})^H (\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1)})] > 0 | \mathbf{H}\right\} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

将关系式  $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(0)} + \mathbf{n}^{(0)}$  代入式 (3.5)，根据

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(0)})^H (\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(0)}) &= (\mathbf{n}^{(0)})^H \mathbf{n}^{(0)} \\
(\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1)})^H (\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1)}) &= [\mathbf{H} \cdot (\mathbf{C}^{(0)} - \mathbf{C}^{(1)}) + \mathbf{n}^{(0)}]^H [\mathbf{H} \cdot (\mathbf{C}^{(0)} - \mathbf{C}^{(1)}) + \mathbf{n}^{(0)}] \\
&= \mathbf{Z} - \mathbf{X} + (\mathbf{n}^{(0)})^H \mathbf{n}^{(0)}
\end{aligned}$$

式中， $\mathbf{Z} = (\mathbf{C}^{(0)} - \mathbf{C}^{(1)})^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} (\mathbf{C}^{(0)} - \mathbf{C}^{(1)})$ ，由于信道矩阵  $\mathbf{H}$  是确定的，编码矩阵  $\mathbf{C}^{(0)}$ 、 $\mathbf{C}^{(1)}$  是给定的，所以矩阵  $\mathbf{Z}$  是确定的，且

$\text{tr}[\mathbf{Z}] = \text{tr}[(\mathbf{C}^{(0)} - \mathbf{C}^{(1)})^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} (\mathbf{C}^{(0)} - \mathbf{C}^{(1)})] = \|\mathbf{H} \cdot (\mathbf{C}^{(0)} - \mathbf{C}^{(1)})\|_F^2$   
Hermite 矩阵  $\mathbf{X} = (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})^H \mathbf{H}^H \mathbf{n}^{(0)} + (\mathbf{n}^{(0)})^H \mathbf{H} (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})$  由于含有随机噪声分量  $\mathbf{n}^{(0)}$ ，所以  $\mathbf{X}$  是随机矩阵。在给定  $\mathbf{H}$  时， $\mathbf{X}$  是一个零均值、方差为  $2\sigma_n^2 \|\mathbf{H}(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})\|_F^2$  的复高斯随机变量。

经重新整理，成对错误概率计算式为

$$\begin{aligned}
\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} &= \Pr\left\{\text{tr}[(\mathbf{n}^{(0)})^H \mathbf{n}^{(0)}] - \text{tr}[\mathbf{Z} - \mathbf{X} + (\mathbf{n}^{(0)})^H \mathbf{n}^{(0)}] > 0 | \mathbf{H}\right\} \\
&= \Pr\left\{\text{tr}[\mathbf{X}] > \text{tr}[\mathbf{Z}] | \mathbf{H}\right\}
\end{aligned}$$

为了计算成对错误概率，定义函数

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

函数  $Q(x)$  对应于标准 (高斯) 正态分布的随机变量  $\xi: \mathcal{N}(0,1)$  对应的事件  $\{\xi > x\}$  的概率，显然随着自变量  $x$  的增大， $Q(x)$  单调递减。将随机矩阵  $\mathbf{X}$  标准化，即除以  $\sqrt{2\sigma_n} \|\mathbf{H}(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})\|_F$ ，得

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} = \Pr\left\{\text{tr}[\tilde{\mathbf{X}}] > \|\mathbf{H}(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})\|_F / (\sqrt{2\sigma_n}) | \mathbf{H}\right\}$$

因此，可以应用函数  $Q(x)$  来计算成对差错概率。

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} = Q\left(\frac{\|\mathbf{H}(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})\|_F}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) \quad (3.6)$$

因此，剩下的工作就是计算  $\|\mathbf{H}(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})\|_F$  以获得条件成对错误概率。由  $\|\mathbf{H}(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})\|_F$  的定义，

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{H}(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})\|_F \\ &= \text{tr}[(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})^H \mathbf{H}^H \mathbf{H}(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})] \\ &= \text{tr}[\mathbf{H}^H \mathbf{H}(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})^H] \quad (\text{假设 } \mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{I}) \\ &= \text{tr}[(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})^H (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})] \\ &= \text{tr}[(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})^H] \\ &= \text{“矩阵 } (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})^H (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)}) \text{ 的特征值的和”} \end{aligned}$$

所以，定义差错（差异）距离矩阵为

$$\underline{\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)}) = \mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)}}$$

而称矩阵

$$\underline{\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)}) = \mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})^H \mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)}) = (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})^H (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})}$$

为编码增益距离（Coding Gain Distance, CGD）矩阵。

所以，成对错误概率与矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  的特征值的和有关。将矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  的特征值用  $\lambda_n$ ,  $n=1, 2, \dots, N_T$  来表示，且假设  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_T}$ 。因为  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  是一个复共轭对称（Hermitian）矩阵，所以  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  的特征值都是非负的实数，即  $\lambda_n \geq 0$ 。应用特征分解定理，得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)}) = \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^H$$

式中， $\mathbf{V}$  是酉矩阵，即  $\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^H = \mathbf{I}$ ，而  $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_T}\}$ 。因此，有

$$\|\mathbf{H}(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})\|_F^2 = \text{tr}[(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})^H \mathbf{H}^H \mathbf{H}(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})] = \text{tr}[\mathbf{H} \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^H \mathbf{H}^H]$$

因为  $\mathbf{H}$  的各元素是相互独立的高斯随机变量，而  $\mathbf{V}$  是酉矩阵，所以  $(\mathbf{H} \mathbf{V})^H$  的元素也是高斯变量。用  $\beta_{n,m}$  来表示  $(\mathbf{H} \mathbf{V})^H$  的第  $(n, m)$  个元素。因此，有

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{H}(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})\|_F^2 \\ &= \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} \beta_{1,1}^* & \beta_{1,2}^* & \cdots & \beta_{1,N_T}^* \\ \beta_{2,1}^* & \beta_{2,2}^* & \cdots & \beta_{2,N_T}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{N_R,1}^* & \beta_{N_R,2}^* & \cdots & \beta_{N_R,N_T}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{2,1} & \cdots & \beta_{N_R,1} \\ \beta_{1,2} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{N_R,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{1,N_T} & \beta_{2,N_T} & \cdots & \beta_{N_R,N_T} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \sum_{m=1}^{N_R} \sum_{n=1}^{N_T} \lambda_n |\beta_{m,n}|^2 \quad (3.7) \end{aligned}$$

将式 (3.7) 的结果代入式 (3.6)，得到条件成对错误概率的表达式为

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} = Q\left(\sqrt{\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{m=1}^{N_R} \sum_{n=1}^{N_T} \lambda_n |\beta_{m,n}|^2}\right) \quad (3.8)$$

利用  $Q(x)$  函数一个比较紧致的上界函数  $Q(x) \leq \frac{1}{2} \exp(-x^2/2)$  ( $x \geq 0$ ) [4] (如图 3.1 所示) 对条件成对错误概率做上界近似逼近, 可以得到条件成对错误概率的上界为

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} \leq \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{1}{4\sigma_n^2} \sum_{m=1}^{N_R} \sum_{n=1}^{N_T} \lambda_n |\beta_{m,n}|^2\right\} \quad (3.9)$$

注意: 因为  $\beta_{m,n}$  是复高斯随机变量, 所以它们的幅度  $|\beta_{m,n}|$  是具有瑞利分布的随机变量。假设随机变量  $\beta_{m,n}$  同分布, 服从  $N(0, \sigma_\beta^2)$ , 则其幅度函数  $|\beta_{m,n}|$  的概率分布密度函数为

$$f(\beta) = \frac{2\beta}{\sigma_\beta^2} \exp\left(-\frac{\beta^2}{\sigma_\beta^2}\right), \quad \beta \geq 0$$

根据  $|\beta_{m,n}|$  的分布, 计算成对错误概率关于随机矩阵  $\mathbf{H}$  的期望值

$$\begin{aligned} \Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} &= E_{\mathbf{H}}[\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\}] \\ &\leq \prod_{m=1}^{N_R} \prod_{n=1}^{N_T} \frac{1}{1 + \lambda_n \sigma_\beta^2 / (4\sigma_n^2)} \\ &= \prod_{n=1}^{N_T} \left[ \frac{1}{1 + \lambda_n \sigma_\beta^2 / (4\sigma_n^2)} \right]^{N_R} \end{aligned} \quad (3.10)$$

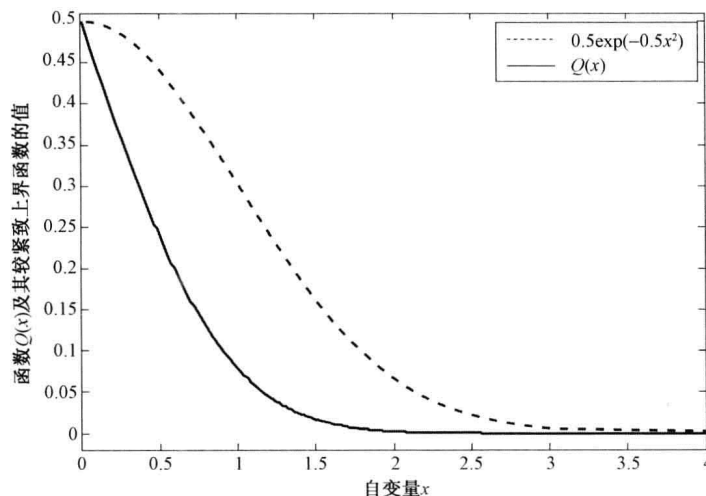


图 3.1 曲线  $Q(x)$  与曲线  $0.5\exp\{-0.5x^2\}$  的比较

由式 (3.10), 显然当  $\lambda_n \sigma_\beta^2 / (4\sigma_n^2) > 0$  确定时,  $N_T$  和  $N_R$  越大, 成对差错概率  $\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\}$  就越小; 而当  $N_T$  和  $N_R$  给定时,  $\lambda_n \sigma_\beta^2 / (4\sigma_n^2)$  越大, 成对差错概率

$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\}$  也越小。前者与发射及接收天线的阵元个数有关；而后者与编码增益距离矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  的特征值  $\lambda_n$ 、传输路径增益  $\sigma_\beta^2$  和环境噪声功率  $\sigma_n^2$  有关。所以前者对应于多天线的空间分集增益，而后者对应于空时编码增益、路径传输增益和信噪比增益。

若矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  是一个满秩矩阵，那么它没有零特征值，再根据其特征值的降序排列规则，可得成对差错概率  $\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\}$  小于或等于（有上界）

$$\left[ \frac{1}{1 + \lambda_{N_T} \sigma_\beta^2 / (4\sigma_n^2)} \right]^{N_R \cdot N_T} \quad (3.11)$$

式 (3.11) 说明成对差错概率  $\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\}$  是以  $N_R \cdot N_T$  的指数幂衰减的，称这种空时编码方案满足空域满分集 (full diversity)。这个空域满分集特性是在矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  是一个满秩阵的条件下得到的，所以称空时编码满足秩准则。

值得注意的是，若某个  $\lambda_n$  等于零，则对应此序号后面的  $\lambda_n$  全部为零，这样式 (3.10) 中相乘的项数就大为减少，成对差错概率  $\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\}$  就相应增加。若编码增益距离矩阵的秩满足

$$\text{rank}[\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})] = r \quad (r < N_T)$$

不失一般性，假设有  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ ，并且  $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_{N_T} = 0$ 。当信噪比很高时，即  $\sigma_\beta^2 / \sigma_n^2 \gg 1$ ，这样就可以简化式 (3.10) 中的分母，并且可以基于非零的特征值将上界重新整理为

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} \leq \left[ \frac{\sigma_\beta^2}{4\sigma_n^2} \right]^{-r \cdot N_R} \left[ \prod_{n=1}^r \lambda_n \right]^{-N_R} = \left[ \frac{\rho}{4} \right]^{-r \cdot N_R} \left[ \prod_{n=1}^r \lambda_n \right]^{-N_R} \quad (3.12)$$

式中， $\rho = \sigma_\beta^2 / \sigma_n^2$ 。在最差的情况就是发送的是  $\mathbf{C}^{(0)}$  而将之译码为  $\mathbf{C}^{(1)}$ ，这个事件发生的概率的上界由式 (3.12) 给出。将式 (3.12) 的右边分成两部分，对应矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  的特征值的部分和对应系统传输信噪比的部分。利用这两个不同部分，能够定义分集增益  $G_D$  以及编码增益  $G_C$ 。

$$G_C = \left[ \prod_{n=1}^r \lambda_n \right]^{1/r}, \quad G_D = r \cdot N_R$$

对照式 (3.12)，此时系统的编码增益  $G_C$  仅与矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  的特征值的大小及其秩有关，而分集增益  $G_D$  与矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  的秩和接收天线数有关。

利用分集增益  $G_D$  和编码增益  $G_C$ ，式 (3.12) 的右边可表示为

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} \leq \left[ \frac{\rho}{4} G_C \right]^{-G_D} \quad (3.13)$$

由式 (3.13)，系统误码率与编码增益  $G_C$  成线性关系（也与系统传输信噪比成线性关系），而与分集增益  $G_D$  成指数关系，即分集增益  $G_D$  是系统误码率曲线的斜率。这也从一个侧面说明分集增益对系统的重要意义。

另外，我们注意到

$$\prod_{n=1}^{N_T} \lambda_n = \det[A(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})]$$

此处，函数  $\det[\cdot]$  表示相应矩阵的行列式。所以定义两个码字  $\mathbf{C}^{(0)}$  和  $\mathbf{C}^{(1)}$  之间的编码增益距离为

$$\text{CGD}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)}) = \det[A(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})]$$

显然，对于所有可能的编码增益距离矩阵，若它们的编码增益距离 CGD 不等于零，就能获得一个满分集的编码增益。而一个保证满分集增益的好的设计准则就是要确保对于所有可能的码字  $\mathbf{C}^{(k)}$  和  $\mathbf{C}^{(l)}$ ，当  $k \neq l$  时，编码增益矩阵  $A(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)})$  为满秩的。

因此，为了提高一个满分集码的编码增益，一个附加的优良的设计准则就是最大化所有  $k \neq l$  时的矩阵  $A(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)})$  的行列式的最小值。

上述两个设计空时码的准则被称为秩和行列式准则，也被称为 TSC (Tarokh/Ssshadri/Calderbank) [1] 准则。图 3.2 (a) 所示是式 (3.13) 对于不同的  $G_D$  和  $G_C$  (取  $\rho = 4$ ·SNR 时，其中 SNR 表示系统信噪比) 的变化曲线。

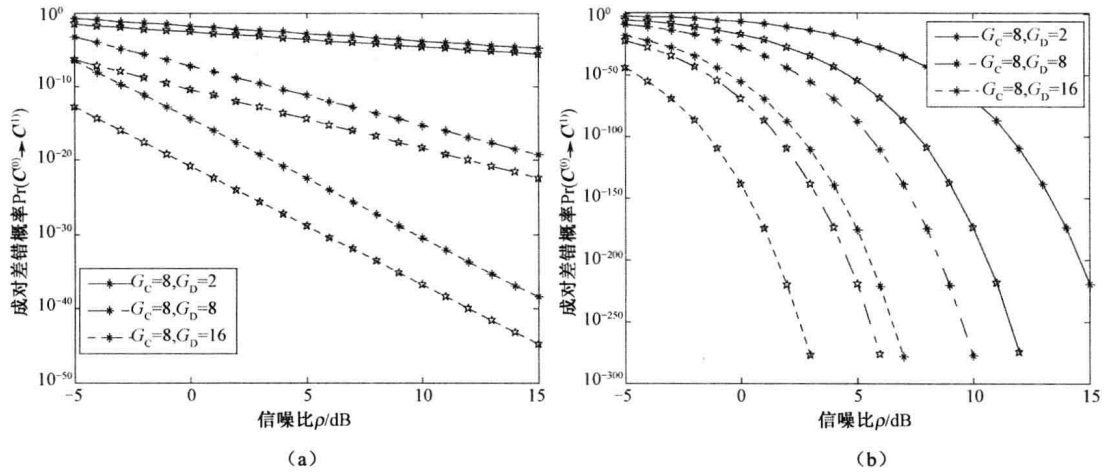


图 3.2 成对差错概率对不同编码增益和分集增益的变化曲线

**注意：**要求在调制符号功率一定的条件下编码增益矩阵  $A(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})$  的特征值的乘积最大化，这等价于要求在调制符号功率一定的条件下编码增益矩阵  $A(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})$  的行列式值最大化。利用几何平均小于或等于算术平均的结论，得到编码增益矩阵  $A(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})$  的各个特征值相等时其行列式值最大。这时利用归一化原理  $A(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)})$  应该等于常数乘单位矩阵，所以最佳情形编码矩阵  $\mathbf{C}$  为正交矩阵。

对于任意两个码字  $\mathbf{C}^{(k)} \neq \mathbf{C}^{(l)}$ ，秩准则意味着对于所有的  $k \neq l$ ，差错距离矩阵

$$\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)}) = \mathbf{C}^{(k)} - \mathbf{C}^{(l)}$$

必须为满秩矩阵，以获得满分集增益  $N_T \cdot N_R$ 。行列式准则表明，对于所有的  $k \neq l$ ，

$$A(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)}) = [\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)})]^H \cdot \mathbf{D}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)})$$

的行列式的最小值必须达到最大，以获得高的编码增益。

## 3.2 迹准则

本节首先通过对范数  $\|(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})\mathbf{H}\|_F$  的整理来重新计算式 (3.6), 即

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})\mathbf{H}\|_F^2 &= \text{tr}\{\mathbf{H}^H[\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})]^H \mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})\mathbf{H}\} \\ &= \text{tr}\{\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H[\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})]^H\}\end{aligned}\quad (3.14)$$

这是针对固定的信道  $\mathbf{H}$  关于差错矩阵  $\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})$  的计算。进一步, 关于对信道矩阵  $\mathbf{H}$  的概率分布来计算式 (3.14) 关于差错矩阵  $\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})$  的期望值, 因为  $\mathbf{H}$  的各元素是相互独立的高斯随机噪声, 所以可以假设有

$$E\{\mathbf{H}\mathbf{H}^H\} = N_R \sigma_\beta^2 \mathbf{I}_{N_T}$$

式中,  $\mathbf{I}_{N_T}$  是  $N_T \times N_T$  阶的单位矩阵。因此, 可以计算得到

$$\begin{aligned}E\left\{\|(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})\mathbf{H}\|_F^2\right\} &= \text{tr}\left\{\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})E[\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H][\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})]^H\right\} \\ &= \sigma_\beta^2 N_R \text{tr}\left\{\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})[\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})]^H\right\} \\ &= \sigma_\beta^2 N_R \text{tr}\left\{\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})\right\} \\ &= N_R \|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})\|_F^2\end{aligned}\quad (3.15)$$

注意: 式 (3.15) 中差错距离矩阵的 F 范数  $\|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})\|_F$  是关于空时码的码表的度量。

它满足下面一些有关欧氏距离度量的性质。

- (1) 对称性:  $\|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})\|_F = \|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})\|_F$ 。
- (2) 非负性:  $\|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})\|_F \geq 0$ , 当且仅当  $\mathbf{C}^{(1)} = \mathbf{C}^{(0)}$  时等号成立。
- (3) 三角不等式:  $\|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(2)})\|_F \leq \|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})\|_F + \|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(2)})\|_F$ 。

因此, 与欧氏距离或汉明 (Hamming) 距离被用作对单输入单输出信道中编码调制方案的码表的距离测量一样,  $\|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})\|_F$  可被用作对不同的空时编码的一个距离度量。该距离度量显然是独立于信道矩阵  $\mathbf{H}$  的。

另外一种深入研究范数  $\|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})\|_F$  的特性的方法是考虑其在接收天线数目非常大时信道的统计特性。在这种情况下, 有

$$\lim_{N_R \rightarrow \infty} \frac{1}{N_R} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H) = \sigma_\beta^2 \mathbf{I}_{N_T}$$

此式可解释为不同发射天线的信号到达接收端时, 其空间大样本是统计独立的。因此, 可以证明

$$\lim_{N_R \rightarrow \infty} \frac{1}{N_R} \|(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})\mathbf{H}\|_F^2 = \sigma_\beta^2 \|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})\|_F^2 \quad (3.16)$$

因为式 (3.16) 的右边是与信道矩阵  $\mathbf{H}$  无关的函数, 所以当接收天线数很大时, 相应于式 (3.6) 应该有

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} \approx \Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} \mid \mathbf{H}\} \approx Q\left(\sqrt{\frac{N_R}{2}}\rho\|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})\|_F\right) \quad (3.17)$$

在此, 再一次利用  $Q(x)$  的紧致上界的公式  $Q(x) \leq 0.5 \exp(-x^2/2)$  ( $x \geq 0$ ) 来求当接收天线数很大时成对差错概率的上界, 有

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} \leq \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{N_R \rho^2}{4} \|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})\|_F^2\right\} \quad (3.18)$$

另外一种求得一个类似的上界的方法就是利用中心极限定理来计算式(3.7)中的范数。由假设, 可以认为对于所有的  $n$  和  $m$  ( $n=1, 2, \dots, N_T$ ,  $m=1, 2, \dots, N_R$ ), 随机变量  $|\beta_{n,m}|^2$  服从具有均值  $\mu_\beta$  和方差为  $\sigma_\beta^2$  的  $\chi^2$  分布 (满足独立同分布的条件, 注意此处的  $\sigma_\beta^2$  与前面定义的可能不同)。中心极限定理表明, 当  $r \cdot N_R$  很大时, 二次和式

$$\xi = \sum_{m=1}^{N_R} \sum_{n=1}^{N_T} \lambda_n |\beta_{m,n}|^2 = \sum_{m=1}^{N_R} \sum_{n=1}^r \lambda_n |\beta_{m,n}|^2$$

是一个高斯随机变量, 其中  $r$  是矩阵  $\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(0)})$  的秩 (也就是说当  $n > r$  时,  $\lambda_n = 0$ )。

并且高斯随机变量  $\xi$  的均值和方差分别为  $N_R \mu_\beta \sum_{n=1}^r \lambda_n$  和  $N_R \sigma_\beta^2 \sum_{n=1}^r \lambda_n^2$ , 这样就可以写出随机变量  $\xi$  的分布密度函数  $f_\xi(x)$ , 即

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi \tilde{\sigma}_\beta}} \exp\left\{-\frac{(x - \tilde{\mu}_\beta)^2}{\tilde{\sigma}_\beta^2}\right\}, \quad \tilde{\mu}_\beta = N_R \mu_\beta \sum_{n=1}^r \lambda_n, \quad \tilde{\sigma}_\beta^2 = N_R \sigma_\beta^2 \sum_{n=1}^r \lambda_n^2$$

对式 (3.9) 高斯随机变量  $\xi = \sum_{m=1}^{N_R} \sum_{n=1}^{N_T} \lambda_n |\beta_{m,n}|^2 = \sum_{m=1}^{N_R} \sum_{n=1}^r \lambda_n |\beta_{m,n}|^2$  进行积分 (等价于关于信道参数  $\mathbf{H}$  取期望), 得到

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{4\sigma_n^2}\right) f_\xi(x) dx \quad (3.19)$$

计算式 (3.19) 中的积分并且应用上界的公式  $Q(x) \leq 0.5 \exp(-x^2/2)$  ( $x \geq 0$ ), 得到一个与式 (3.18) 非常相似的上界, 即

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} \leq \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{N_R \rho^2}{4} \|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})\|_F^2\right) \quad (3.20)$$

从式 (3.18) 和式 (3.20), 可以看出成对差错概率与度量  $\|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})\|_F^2$  有关, 而且  $\|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})\|_F^2$  的值越大, 成对差错发生的概率越小。基于这个结果可以总结出如下设计准则:

对于所有可能的  $k \neq l$ , 使最小距离  $\|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)})\|_F^2$  最大化。

由于 F 范数是一个矩阵求迹运算, 所以这个准则被称为迹准则。

图 3.2 (b) 所示是式 (3.20) 对不同接收天线阵元数 (分集增益) 和差错距离 (编码增益) 时的变化曲线。图中的  $G_C = [8 \ 20]$ ,  $G_D = [2 \ 8 \ 16]$ 。

在图 3.2 (a) 中, 我们看到三组平行线, 这与对式 (3.13) 的分析结果是一致的。从图 3.2 (b) 看到其成对差错概率曲线比图 3.2 (a) 中有较快的下降速率, 这是因为它是在  $r \cdot N_R$  较大的前提下利用中心极限定理得到的, 具有额外的约束条件的结果。

### 3.3 最大互信息熵准则

通信的最根本的任务是将信息由信源送达信宿, 而实现这个任务的最直接表达是接收信号与发送信号互信息熵。可以通过设计空时编码矩阵, 使接收信号与发送信号互信息熵取得最大。这就是所谓的最大互信息熵准则。

最大互信息熵准则通过选择码字的参数来最大化发射信号与接收信号之间的互信息熵。这里用  $\mathbf{s}$  来表示要传送的数据符号矢量。通过对  $\mathbf{s}$  进行空时编码结构化成码字矩阵  $\mathbf{C}$ , 码字矩阵  $\mathbf{C}$  被定义为数据符号矢量  $\mathbf{s}$  的函数。如图 3.3 所示, 编码器和信道对数据符号的联合影响可视为一个“等效信道”  $\mathbf{H}$ 。于是, 发送数据符号和接收数据符号  $\mathbf{r}$  之间的输入/输出关系为

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}\mathbf{H} + \mathbf{n} \quad (3.21)$$

式中,  $\mathbf{n}$  是信道的加性高斯噪声。我们的目标就是设计一种能够最大化输入  $\mathbf{s}$  和输出  $\mathbf{r}$  之间的互信息的码。若需要最大化吞吐量的空间复用增益, 那么这样一种设计准则是最为有益的。事实上, 这样一种设计准则背后的主要依据就是, 基于最大化吞吐量这一目标, 码字不应该限制多输入多输出信道的容量。因此, 最好的码字就是最大化输入  $\mathbf{s}$  和输出  $\mathbf{r}$  之间的互信息的码, 该互信息就等于原始的信道的容量。当然, 与信道容量的其他论点一样, 这样一种优化也遵从于对输入功率的某种限制。

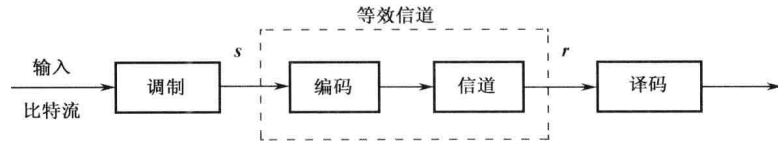


图 3.3 空时码系统的方框图

依据第 2 章的讨论, 就是设计发送数据  $\mathbf{s}$  的空时格式, 使得接收数据  $\mathbf{r}$  与发送数据  $\mathbf{s}$  的平均互信息熵  $\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$  取得最大值。也就是对应于优化问题, 即式 (2.3)

$$\max_{p(\mathbf{s}), E[\mathbf{s}^H \mathbf{s}] \leq \mathcal{P}} \mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$$

$p(\mathbf{s})$  是发送信号  $\mathbf{s}$  的概率分布密度函数, 而  $E[\mathbf{s}^H \mathbf{s}] \leq \mathcal{P}$  是发送信号平均总功率的限制条件。若假设发送信号  $\mathbf{s}$  的协方差矩阵为  $\mathbf{Q}$ , 而接收矢量  $\mathbf{r}$  具有协方差矩阵为  $E[\mathbf{r}\mathbf{r}^H] = \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^H + \mathbf{I}_{N_R}$ , 则互信息熵  $\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$  主要与矩阵  $\mathbf{I}_{N_R} + \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^H$  有关, 而  $\mathbf{H}$  是信道特有的, 所以基于最大互信息熵准则的设计思想的核心是根据信道信息来设计适当的发送信号  $\mathbf{s}$  的协方差矩阵为  $\mathbf{Q}$ , 以使  $\mathcal{I}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$  取得最大值。

本章的讨论为我们提供了改善系统吞吐量的几个重要途径, 它们是整个空时编码方案



的理论基础。如何实现这些途径，是下面各章节讨论的主要问题，既然已经有了空时码字的设计准则，那么后面的问题就是如何设计出满足这些准则的空时码，因而设计的方法主要是构造性的。

### 3.4 本章要点总结

(1) 秩准则：当  $k \neq l$  时，差错矩阵  $\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)}) = \mathbf{C}^{(k)} - \mathbf{C}^{(l)}$  必须为满秩矩阵，以获得满分集增益  $N_R N_T$ 。

(2) 行列式准则：对所有的  $k \neq l$ ，最大化  $A(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)}) = [\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)})]^H \mathbf{D}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)})$  的行列式的最小值，即码的最小编码增益距离最大化，以获得高的编码增益。同时也能保证分集增益最大化。

(3) 迹准则：对所有的  $k \neq l$ ，最大化  $\|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)})\|_F^2$  的最小值，以获得高的编码增益。

(4) 最大互信息准则：最大化发射信号和接收信号之间的互信息熵，以获得最大的吞吐量（最大的传输速率）。

(5) 综上所述，与传统通信编码理论是一致的，实现了码字之间最小距离

$$\max \min_{k,l,k \neq l} \|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)})\|_F^2$$

的最大化；其余就是物理层发射天线、接收天线阵元个数的问题。所以空时编码的核心问题是优化问题。

### 练习题

为了计算成对错误概率，可以用  $\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  取代  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$ ，对码字差矩阵  $\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  应用奇异值分解定理。为了不失一般性，假定  $\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  是  $T \times N_T$  维的，且  $T \geq N_T$ ，则依据矩阵奇异值分解定理，分别存在维数为  $T \times T$  和  $N_T \times N_T$  的正交矩阵  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$ ，有

$$\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)}) = \mathbf{U}^H \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}$$

式中， $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{t,n})$  是以  $\sigma_{t,n}$  为元素的一个  $T \times N_T$  维的秩为  $r$  的伪对角矩阵，即  $\boldsymbol{\Sigma}$  的元素满足关系  $\sigma_{1,1} \geq \sigma_{2,2} \geq \dots \geq \sigma_{r,r} > \sigma_{r+1,r+1} = \dots = \sigma_{N_T,N_T} = 0$ 、 $\sigma_{t,n} = 0$  ( $\forall t \neq n$ )。注意， $r$  也是矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  的秩，若矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  的特征值用  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_{N_T} = 0$ ，则  $\sigma_{n,n} = \sqrt{\lambda_n}$ ， $n=1,2,\dots,N_T$ 。

1. 以正交矩阵  $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{V}$  和伪对角矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  的形式重新表示式 (3-6)，证明

$$P(\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}) = \Pr(X > \text{tr}[\mathbf{H}^H \mathbf{V}^H \boldsymbol{\Sigma}^H \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V} \mathbf{H}])$$

2. 定义  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V} \mathbf{H}$  以及  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{U} \mathbf{n}^{(0)}$ ，证明

$$P(\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}) = \Pr(\text{tr}[\boldsymbol{\xi}^H \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^H \boldsymbol{\xi}] > \text{tr}[\boldsymbol{\xi}^H \boldsymbol{\xi}])$$

3. 利用  $\|\boldsymbol{\xi}\|_F = \|(\mathbf{C}^{(0)} - \mathbf{C}^{(1)})\mathbf{H}\|_F$  将条件成对错误概率写为

$$P(\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}) \leq Q(\|\xi\|_F / \sqrt{2}\sigma_n)$$

式  $P(\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}) = \Pr(\text{tr}[\xi^H \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^H \xi] > \text{tr}[\xi^H \xi])$  和  $P(\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}) \leq Q(\|\xi\|_F / \sqrt{2}\sigma_n)$  计算了已知固定信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  时的条件成对差错概率。为了计算成对差错概率, 需要计算该条件概率关于信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  的期望值, 应用 Jensen 不等式和一些简单的计算, 可以得到

$$P(\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}) \leq Q\left(\sqrt{E\{\|\xi\|_F^2\}} / \sqrt{2}\sigma_n\right)$$

4. 因为矩阵  $\mathbf{H}$  的各元素是相互独立的零均值复高斯随机变量,  $\xi$  是对矩阵  $\mathbf{H}$  的西变换叠加为对角变换, 这是一个线性变换, 所以  $\xi$  也是零均值的高斯随机变量。证明当  $N_r = 1$  接收天线时,  $E\{\|\xi\|_F^2\} = \|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})\|_F^2$ , 并且利用  $\sigma_n^2 = 1/\rho$ , 证明

$$P(\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}) \leq Q\left(\sqrt{\rho \|\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})\|_F^2 / 2}\right)$$

## 参 考 文 献

- [1] Tarokh V, et al. Space-Time Codes for High Data Rate Wireless Communication: Performance Criterion and Code Construction. IEEE Trans. Inform. Theory, 1998, 44 (2) : 744–765.
- [2] Jafarkhani H. Space-Time Coding: Theory and Practice. Cambridge University Press, 2005.
- [3] Vucetic B, Yuan Jinhong. Space-Time Coding. John Wiley & Sons, 2003.
- [4] Verdu S. Multiuser Detection. Cambridge University Press, 1998.

## 第4章 正交空时分组码编码及性能分析

### 引言

近年来,随着全球移动通信用户规模的不断扩大,对于无线系统语音和高速数据传输业务能力的要求也在不断增长。在这种背景下,在20世纪90年代中后期AT&T Bell实验室的学者提出了一种全新的通信系统结构,即MIMO通信系统。

MIMO通信系统在发送端和接收端均采用阵列天线,数据流并行的由多个发射天线阵元发送到空间信道后由多个接收天线阵元接收,由于各发射信号占用同一频带,因而并未增加带宽。若各发射接收天线间的信道响应独立,则MIMO系统可以创造多个并行的空间信道。通过这些并行空间信道独立地传输信息,数据率必然可以成倍提高,在第2章已经证明,MIMO系统的容量随最小天线阵元数的增加而近似线性增加。因此,MIMO系统能最大程度地利用无线信道的信道容量,实现高速、可靠的通信。

正交频分复用(Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM)技术能够有效地对抗多径传播引起的频率选择性衰落,将MIMO和OFDM技术结合起来,即构成MIMO-OFDM系统,既能弥补MIMO系统的不足,又能发挥OFDM的优势,被公认为是第四代移动通信系统(4G)最具竞争力的方案之一。而空时编码又是MIMO技术中的核心技术,所以将空时编码应用于MIMO-OFDM系统能够大大地提高系统容量和频谱利用率。

空时编码利用多发射和多接收天线,将发射分集和接收分集技术相结合,在通信的发送端与接收端建立起多条相互独立的通信链路。空时编码技术将信号处理技术与编码技术有机地结合在一起,非常有利于利用无线信道的多径传播特征,有效地补偿了信道的衰减、增加了系统的容量,有效地抑制了噪声和干扰、提高了传输质量、降低了误码率,并获得了很高的编码增益和分集增益。空时编码作为一种新的信道编码技术,将编码、调制、发送分集和接收分集有机地结合起来,充分有效地提高了多径衰落信道的传输性能。

本章将以第3章所讨论的空时编码的设计准则和第2章所讨论的多阵元天线对系统容量影响的理论为基础,研究设计空时分组码(Space-Time Block Code, STBC)在多阵元天线无线通信系统中实现信息的传输。假定信道是第1章中所阐述的准静态平坦衰落信道。考虑了一个包含 $N_T$ 个发射天线阵元和 $N_R$ 个接收天线阵元系统的译码器,采用式(2.1)中描述多输入多输出信道的输入/输出关系。空时编码设计的目标就是获得最大分集增益 $N_T \cdot N_R$ 、最大编码增益和可能的最大吞吐量(还希望有最简单的译码算法)。另外,译码的复杂度非常重要。在一个典型的无线通信系统中,移动收发机只能从电池获得有限的功

率，而且它应当是一个尺寸较小的物理设备。为了延长电池的寿命，采用低复杂度的编码和译码算法至关重要。另外，在一个合理的范围内，基站并不严格受限于功率和物理尺寸，而是可以将多个相互独立的天线置于基站一端。在很多实际的场合，一个具有多个发射天线阵元且具有非常低复杂度的系统是比较理想的。空时分组码就是一种能满足这些性质的方案。空时分组码可视为一种能够提供满分集增益及具有非常低的编码和译码复杂度的多个发射天线系统的调制方案。

为了能够很好地理解和掌握空时分组码设计的思想、空时分集的概念、独立符号的最大似然解码算法等空时编码的重要理论基础，先从一个具有天才设计理念的例子开始。

## 4.1 Alamouti 空时编码方案

假定一个具有 2 发射天线的系统采用的是 Alamouti 码，如图 4.1 所示<sup>[1]</sup>。

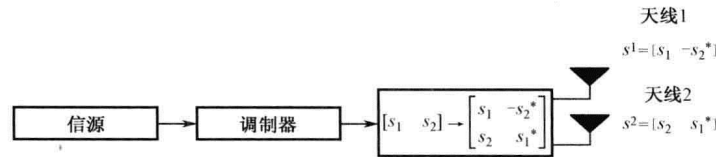


图 4.1 Alamouti 空时编码器的原理框图

在图 4.1 中，设信源输出的是比特流，为了实现一个时隙传送  $k$  bit 符号流的要求，采用这样一种调制方案，将每  $k$  bit 信息映射为一个具有  $2^k$  个符号的星座图中的一个符号，星座图可以是实的或者复的，如 PAM、PSK、QAM 等。这样信源输出的是比特流，经调制器调制后输出信号变化为符号流  $\{s_l\}$ 。

如图 4.1 所示，Alamouti 空时编码的方案是将符号流  $\{s_l\}$  两两分组（串/并变换），假设在当前时刻得到一个分组为  $[s_1, s_2]$ ，在当前时隙，发射天线 1 和 2 分别发送符号  $s_1$ 、 $s_2$ ；而在下一个时隙，发射天线 1 和 2 分别发送符号  $-s_2^*$ 、 $s_1^*$ 。这样用两个时隙完成两个符号的发送（发送过程没有改变调制器的符号输出速率）。依据这一原理，就得到空时编码矩阵为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ -s_2^* & s_1^* \end{bmatrix} \quad (4.1a)$$

或

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix} \quad (4.1b)$$

空时编码矩阵 (4.1a) 的列序对应于天线序，而行序对应于时隙序；与之恰巧相反，空时编码矩阵 (4.1b) 的列序对应于时隙序，而行序对应于天线序。因为这种对应关系并非严格意义上的，所以基本上采用 (4.1a) 的序对应法则来表述设计的空时编码矩阵，或在不引起混淆的情形下，两种方案都采用。

为了检验 Alamouti 空时编码方案能否提供满分集增益，需要计算所有可能的符号差错

矩阵  $\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)})$  的秩，并且证明当  $k \neq l$  时，差错矩阵  $\mathbf{D}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}^{(l)})$  的秩等于 2。考虑一个不同的符号对  $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$ ，相应的 Alamouti 空时编码矩阵为

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \tilde{s}_1 & \tilde{s}_2 \\ -\tilde{s}_2^* & \tilde{s}_1^* \end{bmatrix}$$

对应的差错矩阵为

$$\mathbf{D}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}}) = \begin{bmatrix} s_1 - \tilde{s}_1 & s_2 - \tilde{s}_2 \\ -s_2^* + \tilde{s}_2^* & s_1^* - \tilde{s}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 - \tilde{s}_1 & s_2 - \tilde{s}_2 \\ -(s_2 - \tilde{s}_2)^* & (s_1 - \tilde{s}_1)^* \end{bmatrix}$$

此差错矩阵的行列式为

$$\det[\mathbf{D}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})] = |s_1 - \tilde{s}_1|^2 + |s_2 - \tilde{s}_2|^2$$

很明显地，当且仅当  $s_1 \neq \tilde{s}_1$  或  $s_2 \neq \tilde{s}_2$  时上式不为零，即当且仅当 Alamouti 空时编码矩阵  $\mathbf{C} \neq \tilde{\mathbf{C}}$ ，差错矩阵的行列式  $\det[\mathbf{D}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})] \neq 0$ 。因此，当  $\mathbf{C} \neq \tilde{\mathbf{C}}$  时， $\mathbf{D}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})$  总是一个满秩矩阵，即对于所有的空时编码矩阵  $\mathbf{C}$ 、 $\tilde{\mathbf{C}}$ ，只要  $\mathbf{C} \neq \tilde{\mathbf{C}}$ ，矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})$  的所有特征值全大于零。这样 Alamouti 空时编码矩阵满足行列式准则和秩准则。

根据第 3 章的结论，Alamouti 空时编码方案获得满分集 (Full Diversity)。当接收天线数为  $N_R$  时，它所能提供的分集阶数为  $2N_R$  ( $\because N_T = 2$ )。

事实上，式 (4.1) 给出的矩阵  $\mathbf{C}$  是复正交矩阵，即

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^H = \mathbf{C}^H\mathbf{C} = \sigma_s^2 \mathbf{I}_2$$

式中， $\mathbf{I}_2$  表示 2 阶单位矩阵 (Identity Matrix)； $\sigma_s^2 = |s_1|^2 + |s_2|^2$  表示所发送符号的能量，所以 Alamouti 空时编码是一个复正交空时编码方案<sup>[2]</sup>。

另外，Alamouti 空时编码方案没有改变调制器输出的符号速率，在前端调制器确定的两个时隙内实现了两个符号的发送，我们称它满足全速率 (Full Rate)。这是一个满分集增益码能够获得的最大可能符号速率<sup>[3]</sup>。

在 Alamouti 空时编码方案<sup>[1]</sup>中采用单根接收天线系统，如图 4.2 所示。假定从发射天线 1 和发射天线 2 到接收天线的路径增益分别为  $h_1$  和  $h_2$ 。于是，基于在式 (2.1) 中的模型，译码器在时隙 1 和时隙 2 收到信号  $r_1$  和  $r_2$ ，结果有

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= h_1 s_1 + h_2 s_2 + n_1 \\ r_2 &= -h_1 s_2^* + h_2 s_1^* + n_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

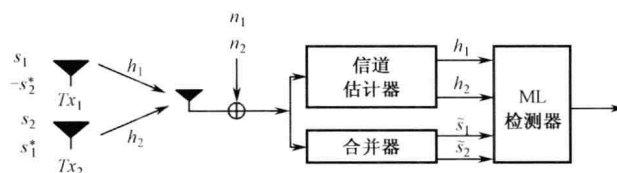


图 4.2 Alamouti 两发一收分集系统原理图

对于接收机已知信道路径增益  $h_1$  和  $h_2$  (或通过图 4.2 的信道估计器获得) 的相干检测

方案而言，最大似然检测就等于对星座图中所有可能的  $s_1$  和  $s_2$ ，选择最小化的判决度量符号为

$$|r_1 - h_1 s_1 - h_2 s_2|^2 + |r_2 + h_1 s_2^* - h_2 s_1^*|^2 \quad (4.3)$$

这样一种译码方案需要在所有可能的符号对  $(s_1, s_2)$  上进行搜索，假设所考虑的调制方式的星座图有  $M$  个点，则需要计算式 (4.3)  $M^2$  次。所以在一般情况下，其复杂度随发射天线数呈指数上升。将代价函数式 (4.3) 展开，可以忽略公共（已知）常数项  $|r_1|^2 + |r_2|^2$ 。于是，代价函数式 (4.3) 可分解为两部分，其中一部分仅为  $s_1$ （未知）的函数式如

$$-[r_1 h_1^* s_1^* + r_1^* h_1 s_1 + r_2 h_2^* s_1 + r_2^* h_2 s_1^*] + |s_1|^2 \sum_{n=1}^2 |h_n|^2 \quad (4.4a)$$

而另一部分仅为  $s_2$ （未知）的函数式如

$$-[r_1 h_2^* s_2^* + r_1^* h_2 s_2 - r_2 h_2^* s_2 - r_2^* h_2 s_2^*] + |s_2|^2 \sum_{n=1}^2 |h_n|^2 \quad (4.4b)$$

因此，对关于代价函数在所有可能的符号对  $(s_1, s_2)$  上进行搜索取而代之的是分别对式 (4.4a) 和式 (4.4b) 中的代价函数同时所有可能的符号  $s_1$  和符号  $s_2$  上搜索最小值（其对应上面的计算量是  $2M$ ）。其结果就是该种编码的译码复杂度随发射天线数呈线性增长，而不是呈指数增长。

另外，若星座中的符号具有相等的能量，如 PSK，那么  $|s_1|^2 \sum_{n=1}^2 |h_n|^2$  和  $|s_2|^2 \sum_{n=1}^2 |h_n|^2$  项可以忽略。其结果就是对于等符号能量的星座，最大似然译码可以进一步简化。

从另外一个角度看，将式 (4.2) 改写为

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2^* \end{bmatrix} \text{ 或 } \mathbf{r} = \mathbf{\Omega} \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (4.5)$$

式中

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2^* \end{bmatrix}$$

容易证明，矩阵  $\mathbf{\Omega}$  满足关系

$$\mathbf{\Omega}^H \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}^H = \alpha^2 \cdot \mathbf{I}_2, \quad \alpha^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2 \quad (4.6)$$

式中， $\alpha^2$  为正实常数，所以矩阵  $\mathbf{\Omega}$  是一个复正交信道矩阵。这样 Alamouti 空时编码方案通过对传输符号的空时正交编码，实现了对信道参数的正交空时编码。对式 (4.5) 左右两边同乘以矩阵  $\mathbf{\Omega}^H$ ，则有

$$\mathbf{\Omega}^H \mathbf{r} = \alpha^2 \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \mathbf{\Omega}^H \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2^* \end{bmatrix}$$

式中

$$\mathbf{\Omega}^H \mathbf{r} = \begin{bmatrix} h_1^* r_1 + h_2 r_2^* \\ h_2^* r_1 - h_1 r_2^* \end{bmatrix}$$

即

$$\mathbf{s} = \alpha^{-2} \mathbf{\Omega}^H \mathbf{r} + \alpha^{-2} \mathbf{\Omega}^H \mathbf{n} \quad (4.7)$$

此处，将分项  $-\alpha^{-2} \mathbf{\Omega}^H \mathbf{n}$  中的“负号”归并到向量  $\mathbf{n}$  内。假设  $\mathbf{n}$  为零均值、方差为  $\sigma_n^2$  的白加性循环对称复高斯（Additive White Circularly Symmetric Complex Gaussian）随机噪声信号， $\mathbf{n}: \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 \mathbf{I})$ ，由式 (4.7)，二维随机向量  $\mathbf{s}$  是均值为  $\alpha^{-2} \mathbf{\Omega}^H \mathbf{r}$ 、方差为  $(\sigma_n^2 / \alpha^2) \mathbf{I}_2$  的白加性循环对称复高斯随机信号，其分布密度函数可以写成

$$f_s(\mathbf{s}) = \frac{1}{\pi(\sigma_n^2 / \alpha^2)} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_n^2 / \alpha^2} \|\mathbf{s} - \alpha^{-2} \mathbf{\Omega}^H \mathbf{r}\|^2 \right\}$$

对应的似然函数为

$$\log f_s(\mathbf{s}) = \text{const} - \frac{1}{\sigma_n^2 / \alpha^2} \|\mathbf{s} - \alpha^{-2} \mathbf{\Omega}^H \mathbf{r}\|^2$$

所以关于发送信号  $\mathbf{s}$  的最大似然估计等价于优化问题

$$\min_{\mathbf{s} \in \Theta} \|\mathbf{s} - \alpha^{-2} \mathbf{\Omega}^H \mathbf{r}\|^2 \quad (4.8)$$

式中， $\Theta$  为调制器对应的映射星座图集合。对目标函数 (4.8) 乘以常数  $\alpha^2$  不改变其极小值所对应的星座图点。所以，对符号  $s_1$ 、 $s_2$  估计判决统计量分别为

$$\min_{s_1 \in \Theta} |s_1 - r_1 h_1^* - r_2^* h_2|^2; \quad \min_{s_2 \in \Theta} |s_2 - r_1 h_2^* + r_2^* h_1|^2$$

或者写成

$$\min_{s_1 \in \Theta} |s_1 - \tilde{s}_1|^2; \quad \min_{s_2 \in \Theta} |s_2 - \tilde{s}_2|^2 \quad (4.9)$$

式中， $\tilde{s}_1 = r_1 h_1^* + r_2^* h_2$ ， $\tilde{s}_2 = r_1 h_2^* - r_2^* h_1$  是图 4.2 中最大比合并器的输出量。图 4.3 给出了 Alamouti 空时编码方案的最大似然译码器原理图。



图 4.3 Alamouti 空时编码方案的最大似然译码器原理图

对于性能优异的最大似然检测器能够满足线性复杂度实现译码的式 (4.9) 是 Alamouti 空时编码方案的第三个优异特点。因为它对应的符号译码是相互独立进行的，这使得算法的复杂度满足线性（发射天线阵元数与星座图点数的乘积）。将 Alamouti 空时编码方案特点总结如下：

(1) Alamouti 空时编码矩阵是一个复正交矩阵，所以它实现了满分集传输。而且它通过对传输符号的空时正交编码，演绎成对信道参数的空时正交编码。

(2) Alamouti 空时编码方案是一个全速率传输。

(3) Alamouti 空时编码可以实现对在发送端联合发送的两个符号在接收端采用最大似然算法完成相互独立的译码，即能用最简单的线性译码算法实现两个联合发送符号的最优

解码。

Alamouti 空时编码几乎集成了我们所期望的空时编码方案的所有优秀特性，是进行空时编码方案研究的参照标杆。

## 4.2 Alamouti 空时编码方案与最大比合并器的比较

Alamouti 空时编码方案是一个两发一收的天线系统，所以这里与之比较的是一个一发两收的采用最大比合并器最大似然检测算法的天线系统。图 4.4 所示是一个一发两收最大比合并系统的示意图（图中 $\odot$ 是取共轭运算）。假设发射天线送出的信号为  $s_0$ ，则两个接收天线收到的信号分别为

$$\begin{aligned} r_1 &= h_1 s_0 + n_1 \\ r_2 &= h_2 s_0 + n_2 \end{aligned}$$

最大比合并器输出的信号为

$$\tilde{s}_0 = h_1^* r_1 + h_2^* r_2 = (|h_1|^2 + |h_2|^2) s_0 + h_1^* n_1 + h_2^* n_2$$

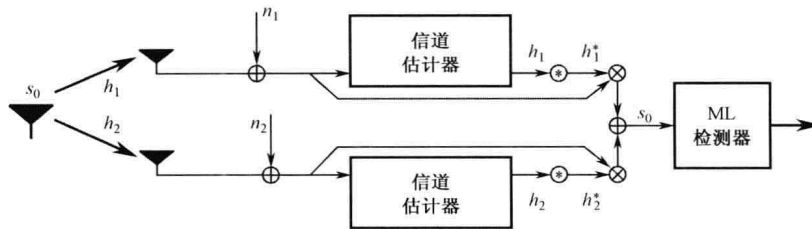


图 4.4 一发两收最大比合并系统

沿用前面的假设  $h_1$ 、 $h_2$  是实高斯随机变量，则参数  $|h_1|^2 + |h_2|^2$  是一个自由度为 2 的  $\chi^2$  分布随机变量，此处的自由度 2 正是该系统的空域接收分集数。当参数  $|h_1|^2 + |h_2|^2$  已知时，很容易通过最大似然估计得到发送信号  $s_0$  的最优估计。

通过这些分析，可以得到如下的关于 Alamouti 空时编码方案与一发两收的采用最大比合并器检测算法的系统比较关系：

(1) Alamouti 空时编码方案将一发两收的采用最大比合并器最大似然检测算法的天线系统的接收分集移置到发送端变换成相应的发送分集，两个不同系统实现了相同的分集数。这样就可以使移动终端功耗降低、轻巧便捷。

(2) 这两个系统的传输速率是相同的。

(3) 由第 3 章的论述，这两个方案所对应的系统误（比特）符号率曲线的斜率是相同的。

对于当接收天线数  $N_R$  大于 1 时的 Alamouti 空时编码系统，在接收端采用最大比合并和最大似然解码。若将接收信号矢量表示成  $\mathbf{r}$ ，发送信号矢量记为  $\mathbf{s}$ ，信道矩阵记为  $\mathbf{H}$ ，加性噪声矢量记为  $\mathbf{n}$ ，则它们具有分块形式



$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \dots \\ \mathbf{r}_{N_R} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \dots \\ \mathbf{H}_{N_R} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \dots \\ \mathbf{n}_{N_R} \end{bmatrix}$$

而每一个分块都具有与式 (4.5) 相同的结构, 即  $\mathbf{r}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{s} + \mathbf{n}_k$  ( $k=1, 2, \dots, N_R$ )。所以接收信号矢量应有形式

$$\mathbf{r} = \mathbf{H} \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (4.10)$$

对式 (4.10) 采用最大比合并滤波, 即对式 (4.10) 两边同乘以矩阵  $\mathbf{H}^H$ , 最大比合并滤波的输出记为  $\tilde{\mathbf{s}}$ , 则

$$\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{H}^H \mathbf{r} = \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{s} + \mathbf{H}^H \mathbf{n}$$

由于  $\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \sum_{k=1}^{N_R} \mathbf{H}_k^H \mathbf{H}_k = \left( \sum_{k=1}^{N_R} \alpha_k^2 \right) \mathbf{I}_2 = \alpha^2 \mathbf{I}_2$ , 其中每个  $\alpha_k^2$  ( $k=1, 2, \dots, N_R$ ) 都具有式 (4.6) 的形式, 是一个非负随机数, 而  $\alpha^2$  是一个具有自由度 (分集数)  $2N_R$  的  $\chi^2$  分布的随机数。所以, 当加性噪声矢量  $\mathbf{n}: \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 \mathbf{I})$  时, 最大比合并滤波的输出的加性噪声矢量  $\mathbf{H}^H \mathbf{n}: \mathcal{CN}(0, \alpha^2 \sigma_n^2 \mathbf{I})$ 。这样很容易写出  $\tilde{\mathbf{s}}$  的概率分布密度函数, 从而得到发送信号矢量  $\mathbf{s}$  的最大似然估计。图 4.5 所示是关于采用 Alamouti 空时编码方案的两发一收系统与采用最大比合并滤波的一发两收系统误符号率曲线的比较, 所传输的符号采用 QPSK 编码调制。在图 4.5 中, 也绘出了单输入单输出 (无空时分集) 情形的误码率曲线, 还给出了后面 (例 4.12) 推导出的 Alamouti 空时编码方案的理论误码率曲线进行比较。很明显, 采用空时分集的 Alamouti 空时编码方案与最大比合并方案相对单输入单输出系统有明显的优势, 而 Alamouti 空时编码方案与最大比合并方案的误码率曲线具有相同的下降斜率, 但最大比合并方案比 Alamouti 方案有 3dB 的优势, 这是因为 Alamouti 空时编码方案发送端每个天线阵元的传输功率是最大比合并方案传输功率的一半。

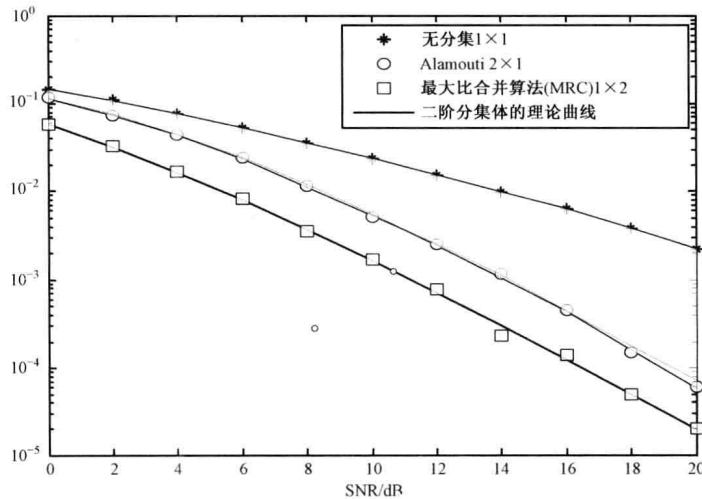


图 4.5 Alamouti 与最大比合并滤波系统误比特率曲线的比较

上面详细地讨论、分析了 Alamouti 空时编码方案，这是一个非常具有代表性的案例，但其局限性是不言而喻的。作为能够在未来移动通信系统中备案的关键技术，必须具有广泛的普适性。所以必须解决一般意义下多输入多输出情形下的空时编码方案，而且关于其解码必须是在最大似然意义下的简单译码。

对应于式 (2.1) 所示的 MIMO 问题，假设  $\mathbf{C}$  为给定的空时编码矩阵，则对应最大似然译码算法为

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{C}} &= \arg \min_{\mathbf{C}} \text{tr} [(\mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{H})^{\text{H}}(\mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{H})] \\ &= \arg \min_{\mathbf{C}} \text{tr} [\mathbf{H}^{\text{H}}\mathbf{C}^{\text{H}}\mathbf{C}\mathbf{H} - (\mathbf{H}^{\text{H}}\mathbf{C}^{\text{H}}\mathbf{r} + \mathbf{r}^{\text{H}}\mathbf{C}\mathbf{H})]\end{aligned}\quad (4.11)$$

下面讨论的核心问题就是设计  $\mathbf{C}$ ，使式 (4.11) 的解码问题变成简单的线性复杂度问题。

### 4.3 实正交设计

依据最大比合并和 Alamouti 空时编码原理，提高空域分集的关键在发送端。当发射天线数等于 2 时，Alamouti 为我们设计出了具有很好性质的空时码。现在的问题是 Alamouti 的设计方法能否推广到一般情形，即能否设计出适合于任意发射天线数，具有 Alamouti 方案性能的码字。实现这一目标的空时编码设计就是所谓的正交设计。为了能够较好地理解所要介绍的正交设计的思想，还是从 Alamouti 空时编码原理出发，将式 (4.1) 写成如下形式

$$\mathbf{C} = \sum_{k=1}^{2N_{\text{T}}} x_k \mathbf{B}_k \quad (4.12)$$

式中， $x_k$  为  $s_k$  的实、虚部； $\mathbf{B}_k$  是由  $\pm 1$ 、 $\pm j$  ( $j$  为虚单位) 为元素构成的稀疏矩阵。依据 Alamouti 空时编码矩阵式 (4.1)，很容易写出矩阵  $\mathbf{B}_k$  ( $k=1,2,3,4$ ) 的形式。现在的问题是，对于一般的  $N_{\text{T}}$ ，是否存在具有式 (4.12) 结构的空时编码矩阵？

事实上，Radon 和 Hurwitz 早在 20 世纪就完成了这个问题的研究<sup>[10]</sup>，称之为 Radon 和 Hurwitz 正交设计理论。下面就来讨论 Radon 和 Hurwitz 正交设计理论，或者说对 Hurwitz-Radon 理论进行复习理解并将它应用于空时编码设计。下面的叙述方式较多地参考了文献[2]和[3]。

**定义 4.1** 若一个具有  $L$  个  $N \times N$  维的实矩阵  $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_L)$  的集合满足条件：

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_l^{\text{T}} \mathbf{B}_l &= \mathbf{I}_N & l=1,2,\dots,L \\ \mathbf{B}_l^{\text{T}} &= -\mathbf{B}_l & l=1,2,\dots,L \\ \mathbf{B}_l \mathbf{B}_k &= -\mathbf{B}_k \mathbf{B}_l & 1 \leq l < k \leq L\end{aligned}\quad (4.13)$$

则称它是一个大小为  $L$  的 Hurwitz-Radon 族。

如随后所见，对于给定的矩阵维数  $N$ ，一个较大的 ( $L$ ) Hurwitz-Radon 族更能满足空时编码设计的要求。通过 Radon 定理来确立 Hurwitz-Radon 族的存在性。

将任意一个正整数  $N$  表示为  $N=2^a b$ ，其中  $a=4c+d$ ， $c \geq 0$ ， $0 \leq d < 4$ ，而  $b$  是一个奇数。定义  $\rho(N)=8c+2^d$ ，它是一个正整数，且  $\rho(N) \leq N$  (这可以通过数学归纳法证

明或参考表 4.1，其给出了当  $N = 2^a$  时  $\rho(N)$  的值。

表 4.1 函数  $N$ 、 $\rho(N)$  及参数  $c$ 、 $d$  的对应值

$a$	$c$	$D$	$N = 2^a$	$8c$	$2^d$	$\rho(N)$
1	0	1	2	0	2	2
2	0	2	4	0	4	4
3	0	3	8	0	8	8
4	1	0	16	8	1	9
5	1	1	32	8	2	10
6	1	2	64	8	4	12
7	1	3	128	8	8	16
8	2	0	256	16	1	17

注意：表 4.1 中参数  $c$  的值是递增的，而  $d$  的值是周期变化的； $\rho(N)$  在  $N=2, 4, 8$  取得其相应最大值。这几点在后面的定理证明中将被采用。

对比定义 4.1，介绍下面的定理。

**定理 4.1 (Radon 定理)**：任何一个  $N \times N$  的 Hurwitz-Radon 族其大小  $L$  (包含的矩阵个数) 小于  $\rho(N)$ 。

首先来分析一下这个定理所传达的信息。一般情况下，所关心的正整数  $N$  是一个 2 的正整数幂，即  $N = 2^a$ 。那么，由定理 4.1 Hurwitz-Radon 族中矩阵的个数  $L$  必定小于  $\rho(N)$ ，因此，必须先看一下函数  $\rho(N)$  的变化特性。

表 4.1 中所列的值  $N = 2^a$ 、 $\rho(N)$  在正交设计理论中起着非常重要的作用。基于上述定理，可能的最大 Hurwitz-Radon 族的大小为  $L = \rho(N) - 1$ 。越大的  $L$  对设计正交矩阵越有利，即相应的  $\rho(N)$  相对于正整数  $N$  越大，对设计正交矩阵越有利。

下面通过一些定义完成我们的准备工作。

**定义 4.2** 若一个矩阵的所有元素由  $-1$ 、 $0$  或者  $1$  组成，那么该矩阵被定义为一个整数矩阵。

**定义 4.3** 一个  $M \times N$  维的矩阵  $A = [a_{i,j}]$  与矩阵  $B$  的矩阵的张量积  $A \otimes B$  被定义为

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,N}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \cdots & a_{2,N}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{M,1}B & a_{M,2}B & \cdots & a_{M,N}B \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

也被称为 Kronecker 积。在下面的构造 Hurwitz-Radon 族的过程中，经常要用这个矩阵运算。

下面的引理给出了对于任意的正整数  $N$ ，整数矩阵的 Hurwitz-Radon 族的大小。

**引理 4.1 (Hurwitz-Radon 族的存在性)** 对于任意的正整数  $N$ ，总存在一个由  $N \times N$  维整数矩阵构成的大小为  $\rho(N) - 1$  的 Hurwitz-Radon 族。

**证明** 由定义，若  $N = 2^a b$  且  $b$  为一个奇数，那么  $\rho(N) = \rho(2^a)$ ，所以我们先假设对

于  $N = 2^a$ , 存在一个由  $2^a \times 2^a$  维整数矩阵  $(A_1, A_2, \dots, A_L)$ , 它是要求的 Hurwitz-Radon 族, 并且其族的大小为  $L = \rho(2^a) - 1 = \rho(N) - 1$ 。

于是对于  $N = 2^a b$  ( $b$  为一个奇数), 矩阵族  $(A_1 \otimes I_b, A_2 \otimes I_b, \dots, A_L \otimes I_b)$  便是一个由  $N \times N$  维整数矩阵组成的大小为  $L = \rho(N) - 1$  的 Hurwitz-Radon 族。这样问题就变成了对  $N = 2^a$  时关于该引理的证明。

下面用数学归纳法 (三段论法) 来对引理当  $N = 2^a$  时进行证明。当  $a = 1$  时, 由表 4.1, 我们有  $N = 2$ ,  $c = 0$ ,  $d = 1$ , 并且有  $\rho(N) = \rho(2) = 2$ 。因此, 一个大小为  $\rho(2) - 1 = 1$  的 Hurwitz-Radon 族仅包含一个成员, 如

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

同样, 当  $a = 2$  时, 有  $\rho(N) = N = 4$ , 并且一个大小为  $\rho(4) - 1 = 3$  的 Hurwitz-Radon 族为  $\{Q \otimes R, R \otimes I_2, P \otimes R\}$ , 其中矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

另外, 当  $a = 3$  时, 有  $\rho(N) = N = 8$ , 并且一个大小为  $\rho(8) - 1 = 7$  的 Hurwitz-Radon 族为  $\{Q \otimes Q \otimes R, I_2 \otimes R \otimes I_2, I_2 \otimes P \otimes R, R \otimes Q \otimes I_2, P \otimes Q \otimes R, R \otimes P \otimes Q, R \otimes P \otimes P\}$  (4.17)

所以对于  $a = 1, 2, 3$ , 即  $N = 2, 4, 8$ , 我们构造出了大小为  $\rho(N) - 1$  的 Hurwitz-Radon 族式 (4.15)、式 (4.16)、式 (4.17)。这样也就完成  $d$  的第一个周期的构造证明。

下面要进行的是假设和推论步骤。为了完成这两个步骤, 对  $N = 2^a$  依据  $a = 4c + d$ ,  $c \geq 0$ ,  $0 \leq d < 4$  及  $\rho(N)$  的表达式做分类, 即

$$\begin{array}{ll} N_1 = 2^{4s+3} & \rho(N_1) = 8(s+1) \\ N_2 = 2^{4(s+1)} & \rho(N_2) = 8(s+1) + 2^0 \quad d = 0 \\ N_3 = 2^{4(s+1)+1} & \rho(N_3) = 8(s+1) + 2^1 \quad d = 1 \\ N_4 = 2^{4(s+1)+2} & \rho(N_4) = 8(s+1) + 2^2 \quad d = 2 \\ N_5 = 2^{4(s+1)+3} & \rho(N_5) = 8(s+1) + 2^3 \quad d = 3 \end{array}$$

其相应的  $\rho(N)$  之间的关系为

$$\begin{aligned} \rho(N_2) &= \rho(N_1) + 1 \\ \rho(N_3) &= \rho(N_1) + 2 \\ \rho(N_4) &= \rho(N_1) + 4 \\ \rho(N_5) &= \rho(N_1) + 8 \end{aligned}$$

现在假设引理对  $N_1$  成立, 由  $\rho(N)$  之间的关系, 证明引理同样对  $N_2$ 、 $N_3$ 、 $N_4$  和  $N_5$  也成立, 也就完成了假设和推论的步骤。

为了从  $N_1$  到  $N_2$ , 我们利用这样的事实, 若  $(A_1, A_2, \dots, A_L)$  是一个由  $N \times N$  的整数矩阵构成的 Hurwitz-Radon 族, 那么

$$\{\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_N\} \cup \{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{A}_l, l=1,2,\dots,L\}$$

是一个由  $2N \times 2N$  维的整数矩阵构成的大小为  $L+1$  的 Hurwitz-Radon 族。注意,  $N_2 = 2N_1$ , 且  $\rho(N_2) = \rho(N_1) + 1$ 。

为了完成其余的证明, 我们利用这样的事实, 若  $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_K\}$  是一个由  $M \times M$  的整数矩阵构成的大小为  $K$  的 Hurwitz-Radon 族, 那么

$$\{\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}_l, l=1,2,\dots,L\} \cup \{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{B}_k \otimes \mathbf{I}_N, k=1,2,\dots,K\} \cup \{\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_{NM}\} \quad (4.18)$$

是一个由  $2NM \times 2NM$  的整数矩阵构成的大小为  $L+K+1$  的 Hurwitz-Radon 族。

这样可以通过在式 (4.18) 中应用  $M = N_1$  和  $N = 2$  完成了从  $N_1$  的成立到  $N_3$  的成立。

同样, 通过在式 (4.18) 中应用  $M = N_1$  和  $N = 4$  可完成从  $N_1$  的成立到  $N_4$  的成立。

最后从一个  $N_1$  的成立到  $N_5$  的成立可通过在式 (4.18) 中应用  $M = N_1$  和  $N = 8$  得到。

在定义正交设计之前, 提及当且仅当  $N = 2, 4, 8$  时, 存在有一个大小为  $N-1$  的 Hurwitz-Radon 族。这很容易从定理 4.1 得以证明, 并且有这样一个事实, 当且仅当  $N = 2, 4, 8$  时,  $\rho(N) = N$  (表 4.1)。

**定义 4.4** (实正交设计) 一个维数为  $N$  的实正交设计是一个由  $x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots, x_N, -x_N$  为元素构成的  $N \times N$  维的正交矩阵  $\mathbf{G}_N$ , 并且满足关系式

$$\mathbf{G}_N^T \mathbf{G}_N = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2) \mathbf{I}_N \quad (4.19)$$

应用 Radon 定理 4.1, 证明下面的关于实正交设计存在性的定理<sup>[2]</sup>。

**定理 4.2** (实正交设计存在性定理) 当且仅当  $N = 2, 4, 8$  时, 实正交设计存在。

**证明** 将正交矩阵  $\mathbf{G}_N$  重新写成  $\mathbf{G}_N = \sum_{n=1}^N x_n \mathbf{A}_n$ , 其中  $\mathbf{A}_n$  ( $n=1,2,\dots,N$ ) 是一系列整数

矩阵。于是

$$\mathbf{G}_N^T \mathbf{G}_N = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N x_n x_m \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_m \quad (4.20)$$

为了从式 (4.20) 得到式 (4.19), 并且对所有可能的变量  $x_1, x_2, \dots, x_N$  成立, 应当有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_m &= 0, & 1 \leq n < m \leq N \\ \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_n &= \mathbf{I}_N, & 1 \leq n \leq N \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

定义  $\mathbf{B}_n = \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_n$  ( $n=2,3,\dots,N$ ), 则关于矩阵  $\mathbf{A}_n$  的要求条件式 (4.21) 等价于要求矩阵  $\mathbf{B}_n$  ( $n=2,3,\dots,N$ ) 是满足定义 4.1 的大小为  $N-1$  的 Hurwitz-Radon 族条件:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_n^T \mathbf{B}_n &= \mathbf{I}_N & n=2,3,\dots,N \\ \mathbf{B}_n^T &= -\mathbf{B}_n & n=2,3,\dots,N \\ \mathbf{B}_n \mathbf{B}_m &= -\mathbf{B}_m \mathbf{B}_n & 2 \leq n < m \leq N \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

应用 Radon 定理 4.1, 满足条件式 (4.22) 大小为  $\rho(N) = N-1$  的 Hurwitz-Radon 族存在当且仅当  $N = 2, 4, 8$ 。

事实上, 该定理的证明是一种构造性的证明, 并且我们给出了现有的三个正交设计方案。注意, 该设计方案并非唯一的设计。

在构造性的证明中，我们有一个自由度，也就是选择满足  $\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 = \mathbf{I}_N$  的  $\mathbf{A}_1$ 。通常选取  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}_N$ ，结果当  $n=2,3,\dots,N$  时， $\mathbf{B}_n = \mathbf{A}_n$ 。

然而，对于任意给定的正交设计  $\mathbf{G}_N = \sum_{n=1}^N x_n \mathbf{A}_n$ ，以及任意的正交矩阵  $\mathbf{U}$  ( $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I}_N$ )，矩阵  $\tilde{\mathbf{G}}_N = \sum_{n=1}^N x_n (\mathbf{U} \mathbf{A}_n)$  也是一个正交设计。这是很容易证明的，若  $\mathbf{G}_N = \sum_{n=1}^N x_n \mathbf{A}_n$  是一个正交设计，则  $\mathbf{G}_N^T \mathbf{G}_N = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2) \mathbf{I}_N$ ，所以

$$\tilde{\mathbf{G}}_N^T \tilde{\mathbf{G}}_N = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N x_m x_n (\mathbf{U} \mathbf{A}_m)^T (\mathbf{U} \mathbf{A}_n) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N x_m x_n \mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_n = \left( \sum_{n=1}^N x_n^2 \right) \mathbf{I}_N \quad (4.23)$$

下面应用  $a=1$  构造的 Hurwitz-Radon 族来完成相应的正交设计，即将式 (4.15) 中的矩阵  $\mathbf{R}$  作为  $\mathbf{A}_2$ ，令  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}_2$ ，就得到一个  $2 \times 2$  的正交设计为

$$\mathbf{G}_2 = x_1 \mathbf{I}_2 + x_2 \mathbf{R} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

应用  $a=2$  时我们构造的大小为 3 的 Hurwitz-Radon 族  $\{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{R}, \mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_2, \mathbf{P} \otimes \mathbf{R}\}$ ，其中矩阵  $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{Q}$  如式 (4.16) 所示，作为矩阵  $\mathbf{A}_2$ 、 $\mathbf{A}_3$ 、 $\mathbf{A}_4$ ，并令  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}_4$  就可以确定一个  $4 \times 4$  的正交设计矩阵族，对应的矩阵为

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这样一个  $4 \times 4$  的正交设计为

$$\mathbf{G}_4 = x_1 \mathbf{I}_4 + x_2 \mathbf{A}_2 + x_3 \mathbf{A}_3 + x_4 \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

用同样的方法可以从  $\rho(8)-1=7$  Hurwitz-Radon 得到  $a=3$  时的  $8 \times 8$  正交设计矩阵族，对应的矩阵形式为

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
A_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
A_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

相应的一个 $8 \times 8$ 正交设计为

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_8 &= x_1 I_8 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 + x_5 A_5 + x_6 A_6 + x_7 A_7 + x_8 A_8 \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 & -x_6 & x_5 & x_8 & -x_7 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 & x_7 & x_8 & -x_5 & -x_6 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 & x_8 & -x_7 & x_6 & -x_5 \\ -x_5 & x_6 & -x_7 & -x_8 & x_1 & -x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_6 & -x_5 & -x_8 & x_7 & x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_7 & -x_8 & x_5 & -x_6 & -x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & -x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \end{bmatrix} \tag{4.26}
\end{aligned}$$

这里给出的时空编码矩阵式(4.24)、式(4.25)、式(4.26)，其列序为天线顺序，而行序为时隙顺序。观察式(4.24)、式(4.25)、式(4.26)，可以看出如下的规律，若令式

(4.24) 为  $\mathcal{G}_2 = \mathbf{B}_{1,2}$ ，则式 (4.25) 和式 (4.26) 可分别表示为形式  $\mathcal{G}_4$  和  $\mathcal{G}_8$ ，即

$$\mathbf{B}_{1,2} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{G}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,2} & \mathbf{B}_{3,4} \\ -\mathbf{B}_{3,4}^T & \mathbf{B}_{1,2}^T \end{bmatrix}; \quad \mathcal{G}_8 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,2,3,4} & \mathbf{B}_{5,6,7,8} \\ -\mathbf{B}_{5,6,7,8}^T & \mathbf{B}_{1,2,3,4}^T \end{bmatrix}$$

它们的局部相似，规律不言而喻。另外，应该切记，正交设计不是唯一的，只要它们满足关系

$$\mathcal{G}_N^T \mathcal{G}_N = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2) \mathbf{I}_N$$

即使对于  $N_T = 2, 4, 8$  的实正交设计矩阵，也完全可以有与上面的叙述不同的形式。

通过上面的讨论，对于实空时分组码，可以用上述的正交设计来构造。若将正交空时编码矩阵记为  $\mathcal{G}$ ，则实空时分组码构造流程图如图 4.6 所示。

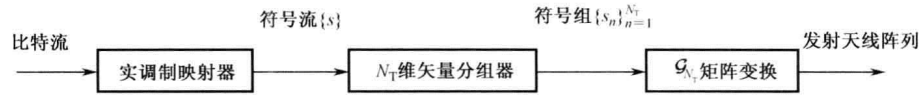


图 4.6 实空时分组码构造流程图

这种实空时分组码编码器是首先将比特流做实数编码调制，如 PAM，将比特流转换成符号流；然后依据发射天线的个数  $N_T$  将符号流分成一个个  $N_T$  维符号矢量  $s_1, s_2, \dots, s_{N_T}$ ；最后将这  $N_T$  个符号送入矩阵  $\mathcal{G}_{N_T}$  替代其中的符号  $x$ 。对于矩阵  $\mathcal{G}_{N_T}$  中的符号，依据其天线顺序和时隙顺序将它们通过发送天线逐次发送。

对于式 (4.24)、式 (4.25)、式 (4.26) 所给出的正交空时编码矩阵，其对应的成对差错矩阵是满秩的（矩阵的正交是强于满秩的条件）。依据第 3 章的结论，它们都是满分集的，它们的分集数分别为 2、4、8，与相应的发射天线数相一致；它们也是全速率的。

**定理 4.3** 当有  $N_R$  个接收天线时，上述的空时分组码的分集阶数为  $N_R N_T$ 。

**证明** 为了证明上述码字可提供满分集增益，证明若发射的是两个不同码字  $s_1, s_2, \dots, s_{N_T}$  与  $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_{N_T}$ ，利用码字的线性性质，有

$$\mathcal{G}_{N_T}(s_1, s_2, \dots, s_{N_T}) - \mathcal{G}_{N_T}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_{N_T}) = \mathcal{G}_{N_T}(s_1 - \tilde{s}_1, s_2 - \tilde{s}_2, \dots, s_{N_T} - \tilde{s}_{N_T})$$

为了证明这是一个非奇异矩阵，利用事实

$$\mathcal{G}_{N_T}(s_1 - \tilde{s}_1, s_2 - \tilde{s}_2, \dots, s_{N_T} - \tilde{s}_{N_T})^T \mathcal{G}_{N_T}(s_1 - \tilde{s}_1, s_2 - \tilde{s}_2, \dots, s_{N_T} - \tilde{s}_{N_T}) = \left( \sum_{n=1}^{N_T} (s_n - \tilde{s}_n)^2 \right) \mathbf{I}_{N_T}$$

由假设数  $\sum_{n=1}^{N_T} (s_n - \tilde{s}_n)^2 \neq 0$ 。那么差错矩阵  $\mathbf{D}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}}) = \mathcal{G}_{N_T}(s_1, s_2, \dots, s_{N_T}) - \mathcal{G}_{N_T}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_{N_T})$  是一个满秩矩阵。利用第 3 章所讨论的行列式准则， $\mathcal{G}_{N_T}(s_1, s_2, \dots, s_{N_T})$  是满发送分集的。

同样可以证明符号可以独立的译码。不失为一般性，且为了简化论述起见，这里讨论只有一个接收天线的情形（当接收天线数  $N_R$  大于 1 时，利用最大比合并来得到类似的公式）。在正交设计中用  $s_n$  代替  $x_n$ ，并把它们经过平坦衰落信道发送到接收端，同时利用式 (2.1) 中的输入/输出关系，有



$$\mathbf{r} = \mathbf{C}\mathbf{H} + \mathbf{n}$$

正交编码矩阵  $\mathbf{C}$  是形如式 (4.24)、式 (4.25)、式 (4.26) 所示的  $N_T \times N_T$  维的矩阵。信道矩阵  $\mathbf{H}$  是  $N_T \times 1$  维的列矢量，假设  $\mathbf{H}$  在所讨论的符号发送周期内是不变的，即  $\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_{N_T}]^T$  为常数矢量，利用正交设计的理论，有

$$\mathbf{r} = \sum_{n=1}^{N_T} s_n \mathbf{A}_n \mathbf{H} + \mathbf{n} = \sum_{n=1}^{N_T} s_n \boldsymbol{\Omega}_n + \mathbf{n} = (s_1, s_2, \dots, s_{N_T}) \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{n}$$

式中， $\boldsymbol{\Omega}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{H}$  是  $N_T \times 1$  维的常数列矢量， $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2, \dots, \boldsymbol{\Omega}_{N_T})$  是形如式 (4.24)、式 (4.25)、式 (4.26) 所示的  $N_T \times N_T$  维的以  $\mathbf{H}$  的元素为元素的正交矩阵。所以有

$$\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}^T = (s_1, s_2, \dots, s_{N_T}) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^T + \mathbf{n} \boldsymbol{\Omega}^T = \left( \sum_{n=1}^{N_T} h_n^2 \right) (s_1, s_2, \dots, s_{N_T}) + \tilde{\mathbf{n}} \quad (4.27)$$

式中， $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \boldsymbol{\Omega}^T$ ，若  $\mathbf{n} : \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 \mathbf{I})$ ，则  $\tilde{\mathbf{n}} : \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 \sigma_H^2 \mathbf{I})$ ；这样就很容易写出随机矢量  $\tilde{\mathbf{s}}$  的概率密度函数，也很容易看出，关于符号  $s_1, s_2, \dots, s_{N_T}$  的估计（译码）是相互独立进行的。

在式 (4.27) 中

$$\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^T = \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} = \left( \sum_{n=1}^{N_T} h_n^2 \right) \mathbf{I}_{N_T}$$

的成立与否利用上面关于正交设计的结论是不言自明的。也可以利用 Hurwitz-Radon 族的性质予以简单的证明，其证明有助于我们加深对 Hurwitz-Radon 正交理论的理解和记忆。

由定义  $\boldsymbol{\Omega}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{H}$  ( $n=1, 2, \dots, N_T$ )，矩阵  $\boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega}$  的第  $(k, l)$  个元素为  $\boldsymbol{\Omega}_k^T \boldsymbol{\Omega}_l = \mathbf{H}^T \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_l \mathbf{H}$ ，这是一个标量，于是它的转置等于它自身，但由  $\{\mathbf{A}_n\}$  是 Hurwitz-Radon 族的假设，有

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_l = -\mathbf{A}_l^T \mathbf{A}_k \quad (k \neq l); \quad \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k = \mathbf{I}_{N_T}$$

所以当  $k \neq l$  时， $\boldsymbol{\Omega}_k^T \boldsymbol{\Omega}_l = -\boldsymbol{\Omega}_l^T \boldsymbol{\Omega}_k$ ，即  $\boldsymbol{\Omega}_k^T \boldsymbol{\Omega}_l = 0$ ；而当  $k = l$  时， $\boldsymbol{\Omega}_k^T \boldsymbol{\Omega}_l = \mathbf{H}^T \mathbf{H} = \sum_{n=1}^{N_T} h_n^2$ 。

与前面讨论过的 Alamouti 空时编码理论类似，我们看到矩阵  $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2, \dots, \boldsymbol{\Omega}_{N_T})$ ， $\boldsymbol{\Omega}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{H}$  ( $n=1, 2, \dots, N_T$ ) 在空时分组码的译码算法中起着重要的作用，所以我们对不同的例子中的  $\boldsymbol{\Omega}$  进行计算。对于式 (4.24) 中的  $2 \times 2$  正交设计而言，其对应  $\boldsymbol{\Omega}$  矩阵为

$$\boldsymbol{\Omega}(a_1, a_2) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

对于式 (4.25) 中的  $4 \times 4$  正交设计而言，其对应  $\boldsymbol{\Omega}$  是一个  $4 \times 4$  的矩阵，定义为

$$\boldsymbol{\Omega}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & -a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

最后，对于式 (4.26) 中的  $8 \times 8$  正交设计而言，其  $\boldsymbol{\Omega}$  是一个  $8 \times 8$  的矩阵，定义为

$$\boldsymbol{\Omega}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 & a_6 & -a_5 & -a_8 & a_7 \\ a_3 & a_4 & -a_1 & -a_2 & a_7 & a_8 & -a_5 & -a_6 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & a_8 & -a_7 & a_6 & -a_5 \\ a_5 & -a_6 & -a_7 & -a_8 & -a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_6 & a_5 & a_8 & -a_7 & -a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_7 & -a_8 & a_5 & a_6 & -a_3 & a_4 & -a_1 & -a_2 \\ a_8 & a_7 & -a_6 & a_5 & -a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

可以直接计算并且证明对于式 (4.28)、式 (4.29) 和式 (4.30) 中的  $\boldsymbol{\Omega}$ ，有  $\boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} = \left( \sum_{n=1}^{N_T} a_n^2 \right) \mathbf{I}_{N_T}$ ，其中  $N_T = 2, 4, 8$ 。

注意，当给定  $N_T = 2, 4, 8$  时，正交设计并不是唯一的。事实上，上述正交设计与参考文献[2]中的最初的正交设计并不相同，我们选择上述方法来构造正交设计是为了遵循建立的式 (4.24) 至式 (4.26) 的形式。这样它从小向大膨胀时结构简单，容易写出。

然而，事实上，由上面给出的当  $N_T = 2, 4, 8$  时 Hurwitz-Radon 矩阵族，以及表达式  $\boldsymbol{\Omega}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{H}$  ( $n=1, 2, \dots, N_T$ )，我们得到的  $\boldsymbol{\Omega}$  应该分别是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}(a_1, a_2) &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\Omega}(a_1, a_2, a_3, a_4) &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & -a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}(a_1, a_2) & \mathbf{B}(a_3, a_4) \\ \boldsymbol{\Omega}(a_3, a_4) & -\mathbf{B}(a_1, a_2) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\Omega}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 & -a_6 & a_5 & a_8 & -a_7 \\ a_3 & a_4 & -a_1 & -a_2 & a_7 & a_8 & -a_5 & -a_6 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & a_8 & -a_7 & a_6 & -a_5 \\ a_5 & a_6 & -a_7 & -a_8 & -a_1 & -a_2 & a_3 & a_4 \\ a_6 & -a_5 & -a_8 & a_7 & a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_7 & -a_8 & a_5 & -a_6 & -a_3 & a_4 & -a_1 & a_2 \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}(a_1, a_2, a_3, a_4) & \boldsymbol{\Omega}(a_5, a_6, a_7, a_8) \\ \boldsymbol{\Omega}(a_5, a_6, a_7, a_8) & -\boldsymbol{\Omega}(a_1, a_2, a_3, a_4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

与之相对应的正交设计的例子对  $N_T = 2, 4, 8$  而言，令  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}_{N_T}$ ，矩阵  $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_{N_T}$  为包含  $N_T - 1$  个整数矩阵组成的 Hurwitz-Radon  $N_T \times N_T$  维矩阵族。设  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_{N_T})$  为所要传送的符号，令  $\mathcal{G}_{N_T} = (\mathbf{A}_1 \mathbf{X}^T, \mathbf{A}_2 \mathbf{X}^T, \dots, \mathbf{A}_{N_T} \mathbf{X}^T)$ 。依照上述方法，得到  $N_T = 2, 4, 8$

时的正交设计为

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_4 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & -x_1 & x_2 \\ x_4 & x_3 & -x_2 & -x_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_8 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_2 & -x_1 & x_4 & -x_3 & x_6 & -x_5 & -x_8 & x_7 \\ x_3 & -x_4 & -x_1 & x_2 & -x_7 & -x_8 & x_5 & x_6 \\ x_4 & x_3 & -x_2 & -x_1 & -x_8 & x_7 & -x_6 & x_5 \\ x_5 & -x_6 & x_7 & x_8 & -x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_6 & x_5 & x_8 & -x_7 & -x_2 & -x_1 & x_4 & -x_3 \\ x_7 & x_8 & -x_5 & x_6 & x_3 & -x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_8 & -x_7 & -x_6 & -x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & -x_1 \end{pmatrix}$$

至此，证明了上述实空时分组码具有 Alamouti 码所具有的一切优良特性。遗憾的是，由 Radon 定理可知，仅当发射天线数  $N_T = 2, 4, 8$  时成立。注意，Radon 定理对方阵都成立。随后，将正交设计推广到不是方阵的情形，并且给出了当发射天线数任意时，对于实的星座图如何设计在每个时隙中发射一个符号的全速率、且能提供满分集增益和简单的独立译码的空时分组码。

## 4.4 广义实正交设计

本节，将正交设计推广到不是方阵的情形，从参考文献[2]中的广义实正交设计的定义开始。

**定义 4.5** 一个广义实正交设计是一个由变量  $x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots, x_K, -x_K$  构成一个  $T \times N_T$  维矩阵  $\mathbf{G}$ ，且满足

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \kappa (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_K^2) \mathbf{I}_{N_T} \quad (4.31)$$

式中， $\mathbf{I}_{N_T}$  是一个  $N_T \times N_T$  的单位矩阵，并且  $\kappa$  是一个常数。

一个实正交空时分组码是通过利用  $\mathbf{G}$  作为其发射矩阵所定义。假定星座图包含  $2^b$  个符号。对于每一个  $K \cdot b$  bit 的分组，编码器首先从星座中选取  $K$  个符号  $(s_1, s_2, \dots, s_K)$ 。接着，在  $\mathbf{G}$  中利用  $s_k$  取代  $x_k$  而得到  $\mathbf{C} = \mathbf{G}(s_1, s_2, \dots, s_K)$ 。在  $t=1, 2, \dots, T$  时隙内，矩阵  $\mathbf{C}$  的第  $(t, n)$  个元素  $C_{t,n}$ ，从第  $n$  ( $n=1, 2, \dots, N_T$ ) 个天线发射。

假设系统有  $N_T$  个发射天线，空时分组矩阵  $\mathbf{G}$  由  $K$  个符号构成，这  $K$  个符号用  $T$  个时隙发送完成。因此，对应所确定的空时分组矩阵  $\mathbf{G}$ ，该种码字的符号速率为  $R_G = K/T$ 。

系统的频谱有效性定义为

$$\eta = R_b / B = bR_s R_g / R_s = bK / T \quad (\text{bps/Hz}) \quad (4.32)$$

式中,  $b$  为星座图一个点的比特数。

基于上节的讨论, 正交设计的空时分组码是当  $N_T = K = T$  时的广义正交设计的一个特例, 它对应于满分集、全速率  $R=1$ , 频谱有效性  $\eta = b$  (bit/s/Hz) 的传输性能。

我们讨论的目标是证明广义正交设计  $\mathcal{G}$  的存在性; 通过实例说明它可用于不同发射天线数的情形; 我们研究的目标是寻找能够尽可能提供高的传输速率的空时编码矩阵  $\mathcal{G}$ , 同时该矩阵能提供满分集增益且保证符号可以相互独立地进行最大似然译码。另外, 我们对全速率的码字的设计特别地感兴趣。

如下的定理表明了对于任意的发射天线数, 全速率的实空时分组码的存在性, 但是其所需的时隙数要大于发射天线数。

**定理 4.4** 对于任意的发射天线数  $N_T$ , 都存在有一个全速率  $R=1$  且分组大小等于  $T = \min_{c,d} \{2^{4c+d}\}$  的实空时分组码; 其中最小化运算是对于集合  $\{c \geq 0, 4 > d \geq 0 \mid \rho(T) = 8c + 2^d \geq N_T\}$  中所有可能的正整数  $c$  和  $d$  进行的。

**证明** 对于给定的数  $N_T$ , 选择最小的时隙数  $T$ , 使得  $N_T = \rho(T) - 1$  (参阅表 4.1)。我们定义  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_T)$  为一个包含  $T$  个变量的行矢量。基于引理 4.1 的构造性证明, 存在有一个大小为  $\rho(T) - 1$  个  $T \times T$  维矩阵的 Hurwitz-Radon 簇。用  $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_{\rho(T)}$  来表示该 Hurwitz-Radon 簇的各成员, 并添加  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}_T$  至该族, 这样就得到一个大小为  $\rho(T)$  的  $T \times T$  维的矩阵簇:

$$\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_{\rho(T)}\}$$

利用此矩阵簇来构造一个生成矩阵  $\mathcal{G}$ , 令其各列为矢量  $\mathbf{g}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{x}^T$  ( $n=1, 2, \dots, N_T$ ), 即

$$\mathcal{G} = (\mathbf{A}_1 \mathbf{x}^T, \mathbf{A}_2 \mathbf{x}^T, \dots, \mathbf{A}_{N_T} \mathbf{x}^T) = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{N_T})$$

**注意:**  $\mathcal{G}$  是一个由  $T$  个待确定变量  $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$  组成的  $T \times N_T$  矩阵。 $\mathcal{G}^T \mathcal{G}$  的第  $(k, l)$  个元素为  $\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_l = \mathbf{x} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_l \mathbf{x}^T$ 。

根据 Hurwitz-Radon 簇的性质, 当  $k=l$  时, 有  $\mathbf{x} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{x}^T = \mathbf{x} \mathbf{x}^T = \sum_{i=1}^T x_i^2$ ; 而当  $k \neq l$  时, 因为  $\mathbf{x} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_l \mathbf{x}^T$  是一个标量, 应该有  $\mathbf{x} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_l \mathbf{x}^T = (\mathbf{x} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_l \mathbf{x}^T)^T = -\mathbf{x} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_l \mathbf{x}^T = 0$ ; 所以有

$$\mathcal{G}^T \mathcal{G} = \left( \sum_{i=1}^T x_i^2 \right) \mathbf{I}_{N_T}$$

所以  $\mathcal{G}$  是一个实列正交分组码矩阵, 并且  $\mathcal{G}$  定义了一个全速率 ( $R=1$ ) 的实空分组码。

所剩下的就是证明定理中定义的  $T$  满足  $T = \min_{c,d} \{2^{4c+d}\}$ ,  $c, d \in \{c \geq 0, d \geq 0 \mid 8c + 2^d \geq N_T\}$ 。首先, 证明  $T$  是 2 的幂。假定  $T = 2^a b$ , 其中  $b$  是大于 1 的奇数。我们有  $N_T \leq \rho(T) = \rho(2^a)$  而  $2^a < T$ , 这与  $T$  最小的整数这一事实矛盾。

**注意:** 不能用一个更小的  $T'$  来构造正交设计, 例如  $T' < T$ 。为了证明这一点, 假定  $\mathcal{G}$  是一个由  $T'$  个待定的变量构成的一个  $T' \times N_T$  的正交设计。因为  $\mathcal{G}$  的各列是  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{T'})$  的元素的线性组合, 对  $\mathcal{G}$  的任意第  $n$  列而言, 存在  $T' \times T'$  维矩阵  $\mathbf{B}_n$ , 它写为  $\mathbf{B}_n \mathbf{x}^T$ , 由  $\mathcal{G}$  各

列的正交性可得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_k &= \mathbf{I}_{T'}, & k=1,2,\dots,N_T \\ \mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_l &= -\mathbf{B}_l^T \mathbf{B}_k, & 1 \leq k < l \leq N_T \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

定义  $\mathbf{A}_n = \mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_n$ , 其中  $n=2,3,\dots,N_T$ , 于是有一个包含  $N_T-1$  个  $T' \times T'$  矩阵成员 Hurwitz-Radon 族矩阵。因此,  $N_T-1 \leq \rho(T')-1$ 。这也与  $T$  是最小的整数这一事实矛盾。于是有  $T' \geq T$ 。这样也就完成了定理的证明。

因为对于任意的发射天线数, 上述的证明是构造性的, 定理 4.4 告诉我们如何设计一个能够提供全速率、满分集增益和简单的最大似然译码的实正交空时分组码 (OSTBC)。

同时, 应注意的是对于确定的发送天线数  $N_T$ ,  $\mathcal{G}$  是一个维数为  $T \times N_T$  矩阵, 参数  $T$  的物理意义是只有当  $T$  个符号参数  $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$  发送完毕时, 接收端才能利用最大似然解码算法, 实现独立分量的解码。所以这个  $T$  是一个意味着码的时延大小的重要参数。事实上, 一个具有最小分组长度  $T$  的正交设计和相应的空时分组码被称为“时延最优”<sup>[2]</sup>。定理 4.4 表明时延最优的码其分组长度是 2 的幂。为了强调我们的证明的构造性本质, 提供如下的例子。

**注意:** 由定理 4.4 的构造性证明可得, 存在无限多个维数为  $T \times N_T$  的全速率编码矩阵  $\mathcal{G}$ , 而定理最终选择一个“时延最优”的为所求。

**例 4.1** 在本例中, 将设计一个  $N_T=9$  的全速率正交空时分组码。首先, 利用表 4.1 和定理 4.4 的证明, 得到  $T=K=16$ 。因此, 考虑  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_{16})$ 。该  $16 \times 16$  的 Hurwitz-Radon 矩阵族包含  $N_T-1=8$  个成员。增加一个单位矩阵  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{I}_{16}$ , 利用这 9 个  $16 \times 16$  的矩阵  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_9$  来构造一个  $16 \times 9$  的实正交设计。 $\mathcal{G}$  的第  $n$  列为  $\mathbf{B}_n \mathbf{x}^T$  ( $n=1,2,\dots,9$ )。因此, 有

$$\mathcal{G}_{16 \times 9} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ x_2 & -x_1 & x_4 & -x_3 & x_6 & -x_5 & -x_8 & x_7 & x_{10} \\ x_3 & -x_4 & -x_1 & x_2 & -x_7 & -x_8 & x_5 & x_6 & x_{11} \\ x_4 & x_3 & -x_2 & -x_1 & -x_8 & x_7 & -x_6 & x_5 & x_{12} \\ x_5 & -x_6 & x_7 & x_8 & -x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 & x_{13} \\ x_6 & x_5 & x_8 & -x_7 & -x_2 & -x_1 & x_4 & -x_3 & x_{14} \\ x_7 & x_8 & -x_5 & x_6 & x_3 & -x_4 & -x_1 & -x_2 & x_{15} \\ x_8 & -x_7 & -x_6 & -x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & -x_1 & x_{16} \\ x_9 & -x_{10} & -x_{11} & -x_{12} & -x_{13} & -x_{14} & -x_{15} & -x_{16} & -x_1 \\ x_{10} & x_9 & -x_{12} & x_{11} & -x_{14} & x_{13} & x_{16} & -x_{15} & -x_2 \\ x_{11} & x_{12} & x_9 & -x_{10} & x_{15} & x_{16} & -x_{13} & -x_{14} & -x_3 \\ x_{12} & -x_{11} & x_{10} & x_9 & x_{16} & -x_{15} & x_{14} & -x_{13} & -x_4 \\ x_{13} & x_{14} & -x_{15} & -x_{16} & x_9 & -x_{10} & x_{11} & x_{12} & -x_5 \\ x_{14} & -x_{13} & -x_{16} & x_{15} & x_{10} & x_9 & -x_{12} & x_{11} & -x_6 \\ x_{15} & -x_{16} & x_{13} & -x_{14} & -x_{11} & x_{12} & x_9 & x_{10} & -x_7 \\ x_{16} & x_{15} & x_{14} & x_{13} & -x_{12} & -x_{11} & -x_{10} & x_9 & -x_8 \end{bmatrix}$$

相应的矩阵  $\Omega$  被定义为

$$\Omega(\alpha_1, \dots, \alpha_9) = \begin{bmatrix} \Omega(\alpha_1, \dots, \alpha_8) & -\text{diag}\{\alpha_9, \dots, \alpha_9\} \\ \text{diag}\{\alpha_9, \dots, \alpha_9\} & \Omega^T(\alpha_1, \dots, \alpha_8) \end{bmatrix}$$

式中  $\text{diag}\{\alpha_9, \dots, \alpha_9\}$  是由  $\alpha_9$  为对角元的  $8 \times 8$  维的对角阵； $\Omega(\alpha_1, \dots, \alpha_8)$  是由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$  构成的如下矩阵

$$\Omega(\alpha_1, \dots, \alpha_8) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & -\alpha_7 & -\alpha_8 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_6 & -\alpha_5 & -\alpha_8 & \alpha_7 \\ \alpha_3 & -\alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_7 & -\alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_8 & \alpha_7 & -\alpha_6 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & -\alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_8 & -\alpha_7 & -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_4 & -\alpha_3 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & -\alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_3 & -\alpha_4 & \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_8 & -\alpha_7 & -\alpha_6 & -\alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} = \mathcal{G}_8(\alpha_1, \dots, \alpha_8)$$

对于小于 9 根发射天线的情形，只要上面去掉正交设计的若干列就得到了想要的一个正交设计。我们称这样一种去掉某一系列的过程为“缩帧”。若初始的正交设计是一个时延最优的正交设计，那么该缩帧的正交设计也是时延最优。利用该性质来设计如下的正交设计和相应的 OSTBC。

**例 4.2** 当  $N_T = 3$  发射天线时，由式 (4.25) 得到如下的  $4 \times 3$  正交设计，是全速率的和时延最优的。

$$\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 \\ -x_3 & x_4 & x_1 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 \end{pmatrix}$$

**例 4.3** 当发射天线数  $N_T = 7$  时，由式 (4.26) 得到如下的  $8 \times 7$  正交设计，是全速率的和时延最优的。

$$\mathbf{s}_7 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 & -x_6 & x_5 & x_8 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 & x_7 & x_8 & -x_5 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 & x_8 & -x_7 & x_6 \\ -x_5 & x_6 & -x_7 & -x_8 & x_1 & -x_2 & x_3 \\ -x_6 & -x_5 & -x_8 & x_7 & x_2 & x_1 & -x_4 \\ -x_7 & -x_8 & x_5 & -x_6 & -x_3 & x_4 & x_1 \\ -x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & -x_4 & -x_3 & -x_2 \end{pmatrix}$$

**例 4.4** 当发射天线数  $N_T = 5$  和  $N_T = 6$ ，由式 (4.26) 得全速率的且时延最优的正交设计分别为

$$s_5 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 & -x_6 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 & x_7 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 & x_8 \\ -x_5 & x_6 & -x_7 & -x_8 & x_1 \\ -x_6 & -x_5 & -x_8 & x_7 & x_2 \\ -x_7 & -x_8 & -x_5 & -x_6 & -x_3 \\ -x_8 & x_7 & x_6 & -x_5 & -x_4 \end{pmatrix}; s_6 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 & -x_6 & x_5 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 & x_7 & x_8 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 & x_8 & -x_7 \\ -x_5 & x_6 & -x_7 & -x_8 & x_1 & -x_2 \\ -x_6 & -x_5 & -x_8 & x_7 & x_2 & x_1 \\ -x_7 & -x_8 & x_5 & -x_6 & -x_3 & x_4 \\ -x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & -x_4 & -x_3 \end{pmatrix}$$

图 4.7 给出了例 4.2 中  $s_3$  与原式 (4.25)  $\mathcal{G}_4$  编码方案在调制方式为 BPSK 时, 误码率曲线的比较。而图 4.8 给出了例 4.3 和例 4.4  $N_T = 5, 6, 7$  的  $s_5, s_6, s_7$  与原式 (4.26)  $\mathcal{G}_8$  编码方案在调制方式为 BPSK 时, 误码率曲线的比较。

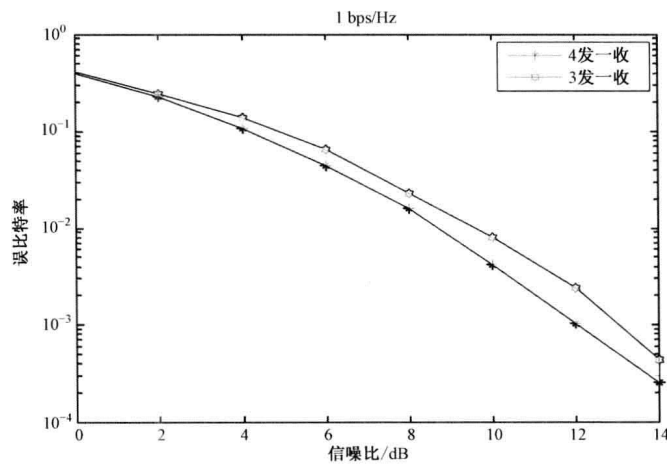


图 4.7  $N_T = 3, 4$  BPSK 调制单位频谱有效性时的误码率曲线

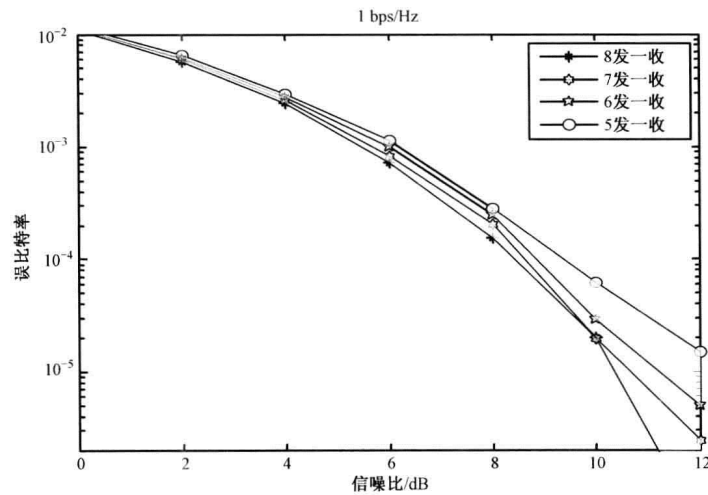


图 4.8  $N_T = 5, 6, 7, 8$  BPSK 调制单位频谱有效性时的误码率曲线

至此，列举了若干满速率是正交设计及其相应的空时分组码的例子。依照第 4.4 节中的第一种设计方法，其中正交设计被定义为  $\mathbf{G} = \sum_{k=1}^T x_k \mathbf{A}_k$ ，我们能够定义另外一类不同的正交设计。下面通过一个例子来定义这种新的正交设计。

**例 4.5** 考虑例 4.1 中的 9 个  $16 \times 16$  的矩阵  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_9$ 。利用  $\mathbf{G} = \sum_{k=1}^9 x_k \mathbf{B}_k$  来设计一种正交实空时分组码在  $T=16$  个时隙中通过  $N_T=16$  个发射天线来发射  $K=9$  个符号。这样一种正交设计的码率为  $R=K/T=9/16$ 。类似第 4.4 节中的码字，很容易证明该种构造的空时分组码具有实正交空时分组码在较低码率时的所有优良性质。注意，去掉  $\mathbf{G}$  的某些列将得到一个对应于具有较少的发射天线数且具有相同的码率的正交空时分组码。可以通过去掉  $\mathbf{G}$  的某些列来设计  $N_T=1, 2, \dots, 16$  时码率  $R=9/16$  的码字。

利用类似的方法，我们能够设计在任意的为 2 的幂的  $T$  时隙中发射  $K=\rho(T)$  个实符号且为方阵的正交设计。这样一种码的码率为  $R=K/T=\rho(T)/T$ ，它很容易从表 4.1 计算得到。这些正交码是针对  $N_T=\rho(T)$  个发射天线或者更少的发射天线数来设计的。基于 Radon 定理，首先从一个 Hurwitz-Radon 矩阵族和单位矩阵开始，得到  $K=\rho(T)$  个矩阵  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_K$ 。接着，用  $\mathbf{G} = \sum_{k=1}^K x_k \mathbf{B}_k$  来构造码字。生成矩阵  $\mathbf{G}$  是一个对于  $N_T=\rho(T)$  个发射天线的正交空时分组码。若需要对应于较少发射天线的正交空时分组码，可以通过去掉  $\mathbf{G}$  的某些列而得到。

我们要特别强调上述两种方法得到具有不同码率的正交设计。还有另外一种由第一种方法设计的具有全速率的码字。因为不是方阵，生成矩阵的各元素是待定的变量  $x_1, x_2, \dots, x_K$  的线性组合，所以它们可写为

$$\mathbf{G} = \sum_{k=1}^K x_k \mathbf{B}_k \quad (4.34)$$

式中，矩阵  $\mathbf{B}_k$  是  $T \times N_T$  的整数矩阵。利用式 (4.34) 中的生成矩阵的正交性重新整理为

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \left( \sum_{k=1}^K x_k \mathbf{B}_k^T \right) \left( \sum_{l=1}^K x_l \mathbf{B}_l \right) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K x_k x_l \mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_l = \left( \sum_{k=1}^K x_k^2 \right) \mathbf{I} \quad (4.35)$$

因为式 (4.34) 对于待定量变量的任意选择均成立，所以，必须有

$$\begin{cases} \mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_l^T \mathbf{B}_k = \mathbf{0}_{N_T} & k \neq l \\ \mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_k = \mathbf{I}_{N_T} \end{cases} \quad (4.36)$$

式中， $\mathbf{0}_{N_T}$  是一个  $N_T \times N_T$  的零矩阵。式 (4.36) 对非方形矩阵的集合成立，并且对于 Hurwitz-Radon 矩阵族，它非常类似于式 (4.13)。因此，式 (4.36) 和它们的存在性通过定理 4.4 的构造性证明被称为对于非方形矩阵的广义 Hurwitz-Radon 理论<sup>[2]</sup>。式 (4.35) 的重要性就在于用它来得到一个简单的最大似然译码。类似于一般实正交设计的情形，我们给出了如何对来自广义实正交设计的空时分组码的各符号进行独立地译码。

假设在衰落信道上发射符号  $(s_1, s_2, \dots, s_K)$ ，由式 (2.1) 中的输入/输出关系得

$$\mathbf{r}^T = \mathbf{H}^T \mathbf{C}^T + \mathbf{n}^T = \sum_{k=1}^K s_k \mathbf{H}^T \mathbf{B}_k^T + \mathbf{n}^T$$



$$= \sum_{k=1}^K s_k \boldsymbol{\Omega}_k^T + \mathbf{n}^T = (s_1, s_2, \dots, s_K) \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{n}^T \quad (4.37)$$

式中,  $\boldsymbol{\Omega}_k = \mathbf{H}^T \mathbf{B}_k^T$ , 是  $K \times T$  维的矩阵  $\boldsymbol{\Omega}$  的第  $k$  行, 它包含  $T$  个元素, 这些元素为  $N_T$  个天线路径增益  $h_1, h_2, \dots, h_{N_T}$  的函数。注意

$$\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^T = \left( \sum_{n=1}^{N_T} a_n^2 \right) \mathbf{I}_K \quad (4.38)$$

为了证明式 (4.38) 成立, 考虑  $\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^T$  的第  $(k, l)$  个元素, 当  $k=l$  时, 此元素为  $\boldsymbol{\Omega}_k \boldsymbol{\Omega}_k^T = \mathbf{H}^T \mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{H} = \mathbf{H}^T \mathbf{H} = \sum_{n=1}^{N_T} a_n^2$ , 它们构成矩阵  $\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^T$  的对角线元素; 而当  $k \neq l$  时, 由于  $\boldsymbol{\Omega}_k \boldsymbol{\Omega}_l^T$  为一个标量, 其转置是不变的, 所以有  $\boldsymbol{\Omega}_k \boldsymbol{\Omega}_l^T = \mathbf{H}^T \mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_l \mathbf{H} = -\mathbf{H}^T \mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_l \mathbf{H} = 0$ , 它们构成矩阵  $\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^T$  的非对角线元素。于是式 (4.38) 得证。

为了对符号进行译码, 我们对式 (4.37) 的两边乘以  $\boldsymbol{\Omega}^T$ , 得到

$$\mathbf{r}^T \boldsymbol{\Omega}^T = (s_1, s_2, \dots, s_K) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^T + \mathbf{n}^T \boldsymbol{\Omega}^T = \left( \sum_{n=1}^{N_T} a_n^2 \right) (s_1, s_2, \dots, s_K) + \tilde{\mathbf{n}}$$

再次提示读者, 即使广义实正交设计也不具备唯一性。事实上, 对任何实正交设计  $\mathcal{G}$  乘以一个具有特性  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$  的  $\mathbf{U}$  矩阵 (满足这个性质的矩阵  $\mathbf{U}$  是正交矩阵), 我们将得到另外一个实正交设计  $\tilde{\mathcal{G}} = \mathbf{U} \mathcal{G}$ 。这很容易从  $\tilde{\mathcal{G}}^T \tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}^T \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathcal{G} = \mathcal{G}^T \mathcal{G}$  得以证明。

## 4.5 复正交设计和广义复正交设计

至此, 我们研究了对于任意的天线数都能够提供满分集增益并且具有简单的最大似然译码的实空时分组码。但是, 这种结构的空时分组码仅限于实星座图。很自然地, 将这些方案扩展到复信号星座图是一件非常具有理论和实际价值的事情。为此, 先介绍下面的定义。

**定义 4.6** 一个  $N_T$  维复正交设计就是一个由复变量  $x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots, x_{N_T}, -x_{N_T}$ , 及它们的复共轭  $x_1^*, -x_1^*, x_2^*, -x_2^*, \dots, x_{N_T}^*, -x_{N_T}^*$  这些待定的变量乘以  $\pm 1$ 、 $\pm j$  (其中  $j = \sqrt{-1}$  是虚单位), 组成的  $N_T \times N_T$  维的正交矩阵, 即  $\mathcal{G}_{N_T} = \sum_{k=1}^{N_T} x_k \mathbf{A}_k + \sum_{k=1}^{N_T} x_k^* \mathbf{B}_k$ , 而  $\mathbf{A}_k$ 、 $\mathbf{B}_k$  的元素是由元素  $\pm 1$  与  $\pm j$  构成的稀疏矩阵。于是有式

$$\mathcal{G}_{N_T}^H \mathcal{G}_{N_T} = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_{N_T}|^2) \mathbf{I}_{N_T}$$

本节将研究复正交设计的存在性及其简单的构造方法, 同样也给出一定量的实际例子来说明问题。如下的结构表明了实正交设计与复正交设计之间的关系。我们用如下的  $2 \times 2$  维实矩阵代替每一个复变量  $x_n = \text{Re}(x_n) + j \text{Im}(x_n)$  ( $1 \leq n \leq N_T$ ),

$$\begin{bmatrix} \text{Re}(x_n) & \text{Im}(x_n) \\ -\text{Im}(x_n) & \text{Re}(x_n) \end{bmatrix}$$

这样, 给定一个  $N_T$  维的复正交设计, 就得到一个  $2N_T \times 2N_T$  维实正交设计。前面已经得到结论是仅当  $N_T = 2, 4, 8$  时存在实正交设计, 所以立即就可以断定仅当  $N_T = 2, 4$  时存在复正交设计。

当  $N_T = 2$  时有如下的在第 4.2 节中所讨论的 Alamouti 空时编码矩阵是一个复正交设计

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

下面定理表明 Alamouti 空时编码矩阵 (4.39) 是唯一可能的复正交设计。

**定理 4.5** 当且仅当  $N_T = 2$  时, 复正交设计存在。

**证明** 为了证明该定理, 仅需证明  $N_T = 4$  时的复正交设计不存在, 证明过程见参考文献[2]。至此, 我们证明了仅当  $N_T = 2$  时复正交设计的存在。

由具有满分集、全速率、独立最大似然译码的复正交是严重受限的, 仿照对实正交设计的讨论, 我们将复正交设计理论推广到一般广义复正交设计。

**定义 4.7** 一个广义复正交设计就是由  $K$  个待定的变量  $x_1, x_2, \dots, x_K$  以及它们的复共轭的线性组合构成的一个  $T \times N_T$  维矩阵  $\mathbf{G}$ , 且满足

$$\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \kappa (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_K|^2) \mathbf{I}_{N_T} \quad (4.40)$$

式中,  $\kappa$  为常数。

**注意:** 通过对  $\mathbf{G}$  中的元素进行归一化处理就有可能使  $\kappa = 1$ 。同时, 用一个酉矩阵乘以一个广义复正交设计将得到另外一个广义复正交设计。设  $\mathbf{U}$  为任意一个酉矩阵, 即  $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$ , 那么  $\mathbf{U}\mathbf{G}$  也是一个广义复正交设计。这可以由  $(\mathbf{U}\mathbf{G})^H \mathbf{U}\mathbf{G} = \mathbf{G}^H \mathbf{U}^H \mathbf{U}\mathbf{G} = \mathbf{G}^H \mathbf{G}$  很容易得到证明。类似的,  $\mathbf{G}\mathbf{U}$  也是一个广义复正交设计, 因为

$$(\mathbf{G}\mathbf{U})^H \mathbf{G}\mathbf{U} = \mathbf{U}^H \mathbf{G}^H \mathbf{G}\mathbf{U} = \kappa \left( \sum_{k=1}^K |x_k|^2 \right) \mathbf{U}^H \mathbf{I}_{N_T} \mathbf{U} = \kappa \left( \sum_{k=1}^K |x_k|^2 \right) \mathbf{I}_{N_T}$$

复星座的空时分组码可利用广义复正交设计来构造。继续沿用发射天线数为  $N_T$  的设置。假定基带发射信号的星座包含  $2^b$  个星座。在时隙 1,  $K \cdot b$  bit 到达编码器, 编码器选定相应的星座符号  $s_1, s_2, \dots, s_K$ 。将  $\mathbf{G}$  中的  $x_k$  置换为  $s_k$ , 得到一个编码矩阵  $\mathbf{C} = \mathbf{G}(s_1, s_2, \dots, s_K)$ , 其元素是  $s_1, s_2, \dots, s_K$  及其共轭的线性组合。因而,  $\mathbf{G}$  由待定的复变量  $s_1, s_2, \dots, s_K$  构成。而编码矩阵  $\mathbf{C}$  由特定的星座符号构成。它们将  $K \cdot b$  bit 信息按如下的方式经由  $N_T$  个天线发射; 若  $C_{t,n}$  表示矩阵  $\mathbf{C}$  的第  $t$  行第  $n$  列的元素,  $C_{t,n}$  在时间  $t = 1, 2, \dots, T$  从天线  $n = 1, 2, \dots, N_T$  于同一时隙发射出去。因而矩阵  $\mathbf{C}$  的第  $n$  列表示从第  $n$  个天线发射的符号,  $\mathbf{C}$  的第  $t$  行表示在时隙  $t$  发射的符号。注意, 矩阵  $\mathbf{C}$  是利用  $\mathbf{G}$  来定义的。因而,  $\mathbf{G}$  各列的正交性保证了简单的最大似然译码方案的可行性。由于共有  $K$  个符号, 所以对应码速率为  $R = K/T$ 。图 4.9 给出了复空时分组码构造流程图, 与图 4.6 的区别在于其调制映射器在复数域内。

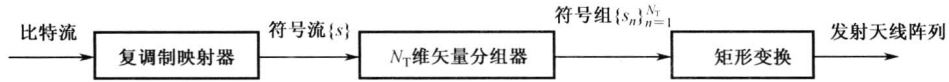


图 4.9 复空时分组码构造流程图

**定理 4.6** 当发射天线数为  $N_T$ ，接收天线数为  $N_R$  时，由  $T \times N_T$  矩阵定义的广义复正交设计得到的复空时分编码能够提供  $N_T N_R$  的分集增益，并且对各个符号可以进行相互独立的最大似然译码。

**证明** 先证明由广义复正交设计得到的空时分组码具有满分集增益，这需要证明对于任意两个不同的输入  $(s_1, s_2, \dots, s_K) \neq (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_K)$ ，差错矩阵  $\mathcal{G}(s_1, s_2, \dots, s_K) - \mathcal{G}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_K)$  是一个满秩矩阵（非奇异矩阵）。因为由广义复正交设计的定义  $\mathcal{G}(s_1, s_2, \dots, s_K)$  各元素是  $s_1, s_2, \dots, s_K$  的线性组合。所以有

$$\mathcal{G}(s_1, s_2, \dots, s_K) - \mathcal{G}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_K) = \mathcal{G}(s_1 - \tilde{s}_1, s_2 - \tilde{s}_2, \dots, s_K - \tilde{s}_K)$$

这已充分表明了  $\mathcal{G}(s_1, s_2, \dots, s_K) - \mathcal{G}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_K)$  是一个非奇异矩阵（矩阵准则）。等价的，可以证明，对于任意两个不同的输入

$$\det[\mathcal{G}^H(s_1 - \tilde{s}_1, s_2 - \tilde{s}_2, \dots, s_K - \tilde{s}_K)\mathcal{G}(s_1 - \tilde{s}_1, s_2 - \tilde{s}_2, \dots, s_K - \tilde{s}_K)] \neq 0$$

同样由广义复正交设计的定义，有

$$\det[\mathcal{G}^H(s_1 - \tilde{s}_1, s_2 - \tilde{s}_2, \dots, s_K - \tilde{s}_K)\mathcal{G}(s_1 - \tilde{s}_1, s_2 - \tilde{s}_2, \dots, s_K - \tilde{s}_K)] = \kappa \left( \sum_{k=1}^K |s_k - \tilde{s}_k|^2 \right) \neq 0 \quad (4.41)$$

等式成立当且仅当  $(s_1, s_2, \dots, s_K) = (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_K)$  时。上述行列式的值不等于零，这就意味着上述差错矩阵是满秩的（行列式准则）。

最后证明由广义复正交设计得到的空时分组码可以对各符号进行相互独立的译码。该性质归于  $\mathcal{G}$  的各列的正交性。其证明类似于实正交设计的证明。最大似然译码就是寻找使得式 (3.4) 中的概率密度最大的码字  $\mathbf{C}$ ，或者等价地使得式 (4.11) 最大比合并算法的最大似然解码算法中的代数函数最小的码字  $\mathbf{C}$ 。因此，最有可能的信号为

$$\arg \min_{s_1, s_2, \dots, s_K} \left\{ \kappa \sum_{k=1}^K |s_k|^2 \operatorname{tr}[\mathbf{H}^H \mathbf{H}] - \operatorname{tr}[\mathbf{H}^H \mathbf{C}^H \mathbf{r} - \mathbf{r}^H \mathbf{C} \mathbf{H}] \right\} \quad (4.42)$$

式 (4.42) 中求最小值的跟踪是  $s_k$  和  $|s_k|^2$  的线性组合，并且可以写成  $\sum_{k=1}^K f_k(s_k)$ ，其中  $f_k(s_k)$ ， $k=1, 2, \dots, K$  仅为  $s_k$  的函数。其结果就是，式 (4.42) 中的求最小值就等于  $K$  个相互独立的求最小值问题，也就等价于  $K$  个相互独立的求最小值过程  $\min_{s_k} f_k(s_k)$ ， $k=1, 2, \dots, K$ 。因此，发射的符号就可以被相互独立地译码。

最小化  $\min_{s_k} f_k(s_k)$ ， $k=1, 2, \dots, K$  的具体表达式取决于表达式中  $\mathbf{C}$  相应的 STBC 的结构。对由正交设计得到的很多现存的 STBC 的特定译码表达式，将随后给出。

**注意：**当接收天线数  $N_R = 1$  时，式 (4.42) 中的代价函数求最小值就是

$$\kappa \sum_{n=1}^{N_T} |h_n|^2 \sum_{k=1}^K |s_k|^2 - 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{N_T} \sum_{t=1}^T h_n^* C_{t,n}^* \mathbf{r} \right\} = \kappa \alpha_H^2 \sigma_s^2 - 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{N_T} \sum_{t=1}^T h_n^* C_{t,n}^* \mathbf{r} \right\} \quad (4.43)$$

同时，当有  $N_R$  个接收天线时，式 (4.42) 中的最大似然译码代价函数可以被写为

$$\sum_{m=1}^{N_R} \left[ \kappa \sum_{n=1}^{N_T} |h_{n,m}|^2 \sum_{k=1}^K |s_k|^2 - 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{N_T} \sum_{t=1}^T h_{n,m}^* C_{t,n}^* r_{n,m} \right\} \right] = \kappa \alpha_H^2 \sigma_s^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{N_R} \left\{ \sum_{n=1}^{N_T} \sum_{t=1}^T h_{n,m}^* C_{t,n}^* r_{n,m} \right\} \quad (4.44)$$

式中， $\alpha_H^2$  是信道传输增益； $\sigma_s^2$  是传输符号的总能量。因此，如第 4.3 节讨论的那样，利用最大比合并算法，可以从单接收天线时的代价函数求  $N_R$  个接收天线的代价函数。换言之， $f_k(s_k)$  ( $k=1,2,\dots,K$ ) 在  $N_R > 1$  接收天线的表达式可以从  $N_R = 1$  时单接收天线相对应的表达式计算得到。首先，假定该天线存在，对不同的接收天线写出其代价函数。然后通过计算得到  $N_R$  个中间代价函数，再将它们叠加在一起来计算该最终的代价函数。更精确地说，计算式 (4.44) 用  $N_R$  的标号  $m$  代替标号 1，并且将求和符号  $\sum_{m=1}^{N_R}$  置于其前面，从而，得到式 (4.44) 中的代价函数的最小值。

至此，已经证明了由广义复正交设计得到的空时分组码具有 Alamouti 码所具有的两个令人满意的性质。我们称这些码字为广义复正交空时分组码。

一个重要的必须解决的问题就是对于给定的码率，正交空时分组码的存在性，或者等价的相应的广义复正交设计的存在性。随后研究不同的正交空时分组码的例子以及在较高码速率时的存在性。首先证明在符号（码）速率  $R = 0.5$  时，对于任意数目的发射天线，都存在有复正交空时分组码，并且给出如何设计复正交空时分组码。然后，对不同的发射天线数，给出所能达到的最高符号（码）速率的复正交空时分组码。

假定一个速率为  $R$  的实正交设计具有一个  $T \times N_T$  维的发射矩阵  $\mathcal{G}$ 。注意，在每一个包含  $T$  个时隙的分组中，发射  $K = R \cdot T$  个符号。 $\mathcal{G}$  的共轭是一个  $T \times N_T$  维的矩阵，用  $\mathcal{G}^*$  来表示，它是通过用  $x_k^*$  代替  $\mathcal{G}$  中的  $x_k$  得到的。通过将  $\mathcal{G}$  与  $\mathcal{G}^*$  按如下的方式级联，设计一个  $2T \times N_T$  维的复正交设计，即

$$\mathcal{G}_c = \begin{bmatrix} \mathcal{G} \\ \mathcal{G}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K x_k \mathbf{B}_k \\ \sum_{k=1}^K x_k^* \mathbf{B}_k \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

为了证明  $\mathcal{G}_c$  是一个复正交设计，根据实矩阵  $\mathbf{B}_k$  来计算  $\mathcal{G}_c^H \mathcal{G}_c$ ，即

$$\mathcal{G}_c^H \mathcal{G}_c = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K (x_k^* x_l \mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_l + x_k x_l^* \mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_l) \quad (4.46)$$

将式 (4.36) 应用于式 (4.46) 中，得

$$\mathcal{G}_c^H \mathcal{G}_c = \left( \sum_{k=1}^K |x_k|^2 \right) \mathbf{I}_{N_T} \quad (4.47)$$

利用上述构造，能够从任意的码率  $R$  的广义实正交设计来设计一个码率为  $R/2$  的广义复正交设计。基于定理 4.6，式 (4.47) 表明，最终的广义复正交设计提供满分集增益且具有简单的最大似然译码。

为了得到另外一种具有简单的最大似然准则译码的空时编码，当接收天线为 1 时，用  $\mathbf{r}$  表示  $2T \times 1$  维接收矢量，用  $\mathbf{C}$  来表示  $2T \times N_T$  维码字。为了简化起见，给出了单接收天线时的公式，当接收天线大于 1 时利用最大比合并，很容易得到类似的公式成立。我们用  $T \times N_T$  矩阵  $\mathbf{C}_R$  来表示  $\mathbf{C}$  的前  $T$  行。注意，尽管  $\mathbf{C}_R$  对应于实正交设计  $\mathcal{G}$ ，但是其元素并非

实数，因为它通过用复星座中的元素  $s_k$  来代替  $\mathcal{G}$  中的  $s_k$  所得到的。以发射信号  $\mathbf{C}$ ，信道路径增益  $\mathbf{H}$  以及加性噪声  $\mathbf{n}$  的形式来表示接收矢量  $\mathbf{r}$ ，有

$$\mathbf{r} = \mathbf{C}\mathbf{H} + \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_R \\ \mathbf{C}_R^* \end{bmatrix} \mathbf{H} + \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_R \mathbf{H} \\ \mathbf{C}_R^* \mathbf{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

因为路径增益为复数， $\mathbf{H} = (h_1, h_2, \dots, h_{N_T})$  的共轭  $\mathbf{H}^*$  是通过  $h_n^*$  来代替  $h_n$ 。定义一个  $2T \times 1$  维矢量  $\tilde{\mathbf{r}}$  为

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_R \mathbf{H} \\ \mathbf{C}_R \mathbf{H}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

其转置可以写成两个行矢量的级联的形式为

$$\tilde{\mathbf{r}}^T = (h_1, h_2, \dots, h_{N_T}, h_1^*, h_2^*, \dots, h_{N_T}^*) \mathbf{C}_R^T + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^T & \mathbf{n}_2^H \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

注意：前面证明了存在一个  $K \times T$  维的矩阵  $\boldsymbol{\Omega}_R(h_1, h_2, \dots, h_{N_T})$  满足

$$\mathbf{H}^T \mathbf{C}_R^T = (s_1, s_2, \dots, s_K) \boldsymbol{\Omega}_R \quad (4.51)$$

对于复路径增益，采用类似步骤，可以证明

$$\boldsymbol{\Omega}_R \boldsymbol{\Omega}_R^H = \left( \sum_{n=1}^{N_T} |h_n|^2 \right) \mathbf{I}_K \quad (4.52)$$

为了以发射符号  $s_1, s_2, \dots, s_K$  的形式表示  $\tilde{\mathbf{r}}$ ，通过将两个  $K \times T$  维矩阵并列来构造  $K \times 2T$  维矩阵为

$$\boldsymbol{\Omega} = [\boldsymbol{\Omega}_R(h_1, h_2, \dots, h_{N_T}), \boldsymbol{\Omega}_R(h_1^*, h_2^*, \dots, h_{N_T}^*)] \quad (4.53)$$

在式 (4.50) 中用式 (4.51) 的结果，并且应用式 (4.52) 和式 (4.53) 有

$$\tilde{\mathbf{r}}^T = (s_1, s_2, \dots, s_K) \boldsymbol{\Omega} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^T & \mathbf{n}_2^H \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

很容易验证

$$\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^H = 2 \left( \sum_{n=1}^{N_T} |h_n|^2 \right) \mathbf{I}_K \quad (4.55)$$

因此，对于式 (4.54) 的两边乘以  $\boldsymbol{\Omega}^H$  将得到如下的能够对发射的符号进行独立译码的简单算法的表达式为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}^T \boldsymbol{\Omega}^H &= (s_1, s_2, \dots, s_K) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^H + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^T & \mathbf{n}_2^H \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}^H \\ &= 2\alpha_H^2 (s_1, s_2, \dots, s_K) + \tilde{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (4.56)$$

这样就很容易实现对符号  $(s_1, s_2, \dots, s_K)$  的独立译码。

前面已经证明了对任意的发射天线数，都存在有一个全速率  $R=1$  的广义实正交设计，所以可以断言对于任意的发射天线数，都存在有一个半速率  $R=0.5$  的广义复正交设计。

**例 4.6** 以式 (4.45) 为据，构造适合  $N_T = 4$  的复数符号的广义复正交设计。

**解：**依据式 (4.45) 与  $N_T = 4$  的标准正交设计 (4.25)，得

$$\mathcal{G}_4 = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2 & -s_3 & -s_4 & s_1^* & -s_2^* & -s_3^* & -s_4^* \\ s_2 & s_1 & s_4 & -s_3 & s_2^* & s_1^* & s_4^* & -s_3^* \\ s_3 & -s_4 & s_1 & s_2 & s_3^* & -s_4^* & s_1^* & s_2^* \\ s_4 & s_3 & -s_2 & s_1 & s_4^* & s_3^* & -s_2^* & s_1^* \end{bmatrix}$$

例 4.7 基于例 4.6 构造适合  $N_T = 3$  的复数符号的广义复正交设计。

解：对上例中  $\mathcal{G}_4$ ，删去一行，就得到适合  $N_T = 3$  的复数符号的广义复正交设计。

$$\mathcal{G}_3 = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2 & -s_3 & -s_4 & s_1^* & -s_2^* & -s_3^* & -s_4^* \\ s_2 & s_1 & s_4 & -s_3 & s_2^* & s_1^* & s_4^* & -s_3^* \\ s_3 & -s_4 & s_1 & s_2 & s_3^* & -s_4^* & s_1^* & s_2^* \end{bmatrix}$$

图 4.10 和图 4.11 分别给出了空时编码矩阵  $\mathcal{G}_3$ 、 $\mathcal{G}_4$  在频谱有效性为 1bps/Hz 和 3bps/Hz 时的误比特率曲线。为了比较，同时绘出了单输入单输出情形和 Alamouti 编码方案的误比特率曲线。显然在较高比特传输速率时，编码矩阵  $\mathcal{G}_3$ 、 $\mathcal{G}_4$  误比特率曲线下降速率较慢。

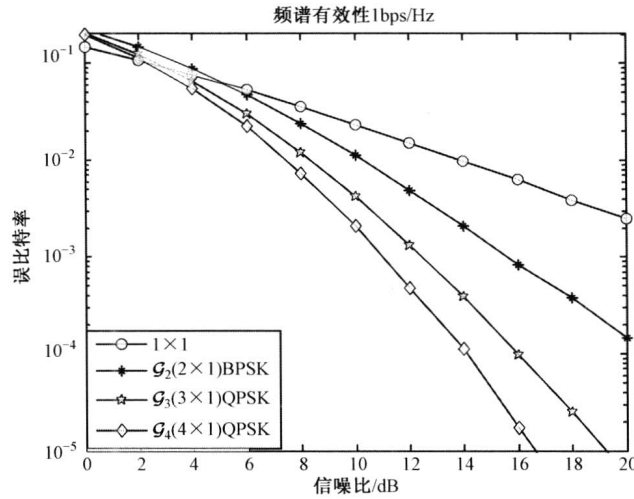


图 4.10 空时编码  $\mathcal{G}_3$ 、 $\mathcal{G}_4$  在 BPSK、QPSK 调制时的误比特率曲线

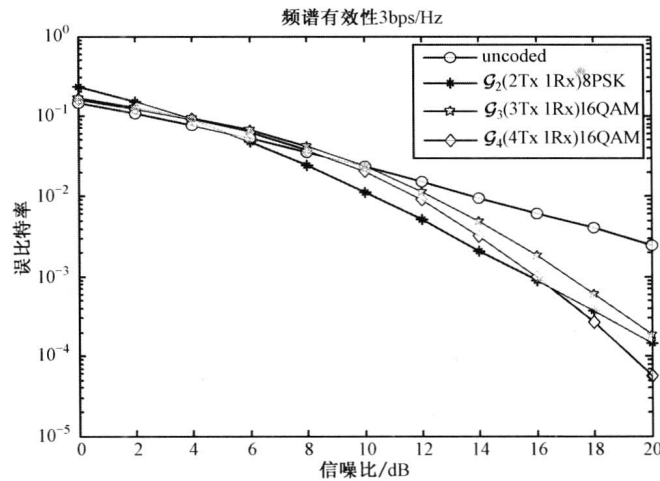


图 4.11 空时编码  $\mathcal{G}_3$ 、 $\mathcal{G}_4$  在 8PSK、16QAM 调制时的误比特率曲线

注意：基于式 (4.45) 与式 (4.26)，可以构造出适合  $N_T = 8$  的复数符号的广义复正交

设计，然后利用删除行的方法，可以构造出适合  $N_T = 5、6、7$  的复数符号的广义复正交设计。这样设计出的都是  $R = 0.5$  或半速率的广义复正交设计。

对于较高符号速率 ( $3/4$ ) 的广义复正交设计，参考文献[2]给出了两个实际结果，如下的  $N_T = 3、4$  的  $\mathcal{H}_3$  和  $\mathcal{H}_4$ ，其中参数  $\alpha = 1/\sqrt{2}$ ， $\beta = 1/2$ 。空时编码矩阵  $\mathcal{H}_4$  为

$$\mathcal{H}_4 = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* & \alpha s_3^* & \alpha s_3^* \\ s_2 & s_1^* & \alpha s_3^* & -\alpha s_3^* \\ \alpha s_3 & \alpha s_3 & -\beta(s_1 + s_1^* - s_2 + s_2^*) & \beta(-s_1^* + s_1 + s_2^* + s_2) \\ \alpha s_3 & -\alpha s_3 & -\beta(-s_1 + s_1^* + s_2 + s_2^*) & -\beta(s_1^* + s_1 - s_2^* + s_2) \end{bmatrix}$$

观察编码矩阵  $\mathcal{H}_4$  的结构，不难发现它具有局部 Alamouti 结构（这一点可以帮助我们正确写出其矩阵形式）。删去其一行就得到编码矩阵  $\mathcal{H}_3$

$$\mathcal{H}_3 = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* & \alpha s_3^* & \alpha s_3^* \\ s_2 & s_1^* & \alpha s_3^* & -\alpha s_3^* \\ \alpha s_3 & \alpha s_3 & -\beta(s_1 + s_1^* - s_2 + s_2^*) & \beta(-s_1^* + s_1 + s_2^* + s_2) \end{bmatrix}$$

很显然，对应  $\mathcal{H}_3$  和  $\mathcal{H}_4$  的符号速率  $R = 3/4 = 0.75$ 。

图 4.12 给出了空时编码矩阵  $\mathcal{H}_3$  和  $\mathcal{H}_4$  在频谱有效性为 3bps/Hz 时的误比特率曲线。为了比较，同时绘出了 Alamouti 编码方案的误比特率曲线。

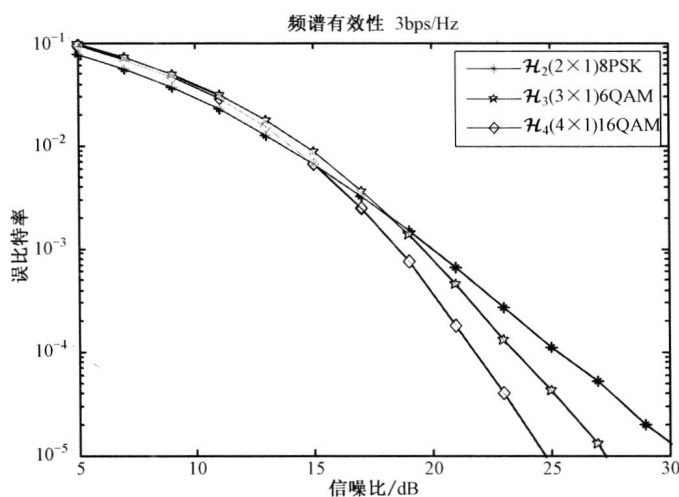


图 4.12 空时编码  $\mathcal{H}_3$ 、 $\mathcal{H}_4$  在 8PSK、16QAM 调制时的误比特率曲线

**例 4.8** 在本例中，给出一个发射天线数  $N_T = 8$ 、传输速率  $R = 0.5$ 、传输时延  $T = 8$  空时编码矩阵（上角标表示符号数）：

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{8 \times 8}^{(4)} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & x_4 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2^* & x_1^* & 0 & x_3 & 0 & x_4 & 0 & 0 \\ x_3^* & 0 & -x_1^* & x_2 & 0 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & x_3^* & -x_2^* & -x_1 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ x_4^* & 0 & 0 & 0 & -x_1^* & x_2 & -x_3 & 0 \\ 0 & x_4^* & 0 & 0 & -x_2^* & -x_1 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & x_4^* & 0 & -x_3^* & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^* & 0 & -x_3^* & -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{4 \times 4}^{(3)} & \text{diag}\{x_4, \dots, x_4\} \\ \text{diag}\{x_4, \dots, x_4\}^H & -[\mathcal{G}_{4 \times 4}^{(3)}]^H \end{bmatrix} \quad (4.57)
\end{aligned}$$

显然,这是一个具有 Alamouti 结构的空时编码方案。很容易验证这是一个满足式(4.40)的正交 STBC。

**例 4.9** 在本例中,考虑  $N_T = 4$ 、传输速率  $R = 3/4$ 、传输时延  $T = 4$  空时编码矩阵

$$\mathcal{G}_{4 \times 4}^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ -x_2^* & x_1^* & 0 & x_3 \\ x_3^* & 0 & -x_1^* & x_2 \\ 0 & x_3^* & -x_2^* & -x_1 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

明显地,它来自于式(4.57)矩阵中的一个主对角块矩阵,所以其正交性是显然的。

**例 4.10** 在上面例子中删掉其第 4 列,得到如下的满足  $N_T = 4$ 、传输速率  $R = 1$ 、传输时延  $T = 3$  或满足  $N_T = 3$ 、传输速率  $R = 3/4$ 、传输时延  $T = 4$  空时编码矩阵

$$\mathcal{G}_{4 \times 3}^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2^* & x_1^* & 0 \\ x_3^* & 0 & -x_1^* \\ 0 & x_3^* & -x_2^* \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

**注意:**从广义实正交设计到广义复正交设计,不难发现传输速率  $R = 0.5$  的广义复正交设计是很容易获得的。通过  $\mathcal{H}_3$  和  $\mathcal{H}_4$  的设计以及上面的例子,传输速率  $R = 3/4$  的广义复正交设计也是很容易获得的。证明对某个发射天线数  $N_T$  ( $N_T \geq 4$ ) 不存在传输速率介于 0.5 和 3/4 之间的广义复正交设计空时码,是一个有趣且开放的研究课题。在下面将继续给出一些例子。

**例 4.11** 对于  $N_T = 5$  的发射天线数,参考文献[6]中给出了一种正交空时分组码。



$$\mathbf{G}_{5 \times 15}^{(10)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & x_4 & 0 & 0 & x_5 & 0 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & 0 \\ x_2^* & -x_1^* & 0 & x_3 & 0 & -x_4 & 0 & 0 & x_5 & -x_7^* & x_6^* & x_8^* & -x_9^* & 0 & -x_{10} \\ x_3^* & 0 & -x_1^* & -x_2 & 0 & 0 & -x_4 & -x_7^* & -x_6 & 0 & x_5^* & -x_{10}^* & 0 & x_8^* & -x_9 \\ x_4^* & 0 & 0 & 0 & -x_1^* & x_2 & x_3 & -x_9^* & x_8 & -x_{10}^* & 0 & 0 & x_5^* & x_6^* & x_7 \\ 0 & x_5^* & -x_6^* & x_7 & x_8^* & -x_9 & x_{10} & -x_2^* & x_1 & x_3^* & 0 & -x_4^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

这是传输速率  $R = 2/3$ 、传输时延  $T = 15$  的空时编码矩阵。它在 15 个时隙中完成 10 个符号的传送。

参考文献[7]还给出了当发射天线数对于  $N_T = 2N_0$  或者  $N_T = 2N_0 - 1$  ( $N_T \leq 18$ ) 时, 传输速率  $R = (N_0 + 1)/2N_0$  的空时编码矩阵。

## 4.6 OSTBC 的解码 (符号估计判决量的构造)

对于所有的空时分组码的解码问题, 只考虑一个接收阵元的情形, 多于一个接收阵元的阵列天线情况, 只是对得到的结果再应用最大比合并器的简单的运算就可完成。下面从最简单但最具代表性的实例开始, 首先考查一下 Alamouti 解码算法的估计判决量 (4.9) 的结构,

$$\left| s_1 - r_1 h_1^* - r_2^* h_2 \right|^2; \quad \left| s_2 - r_1 h_2^* + r_2^* h_1 \right|^2$$

与式 (4.2) 的接收矢量  $r_1 = h_1 s_1 + h_2 s_2 + n_1$ ,  $r_2 = -h_1 s_2^* + h_2 s_1^* + n_2$  比较可以发现如下的规律, 对于符号  $s_1$  而言, 在接收分量  $r_1$  中, 出现的是  $s_1$  本身 (无复共轭运算), 其系数是  $h_1$ ; 在接收分量  $r_2$  中, 出现的是  $s_1$  的复共轭 (有复共轭运算), 其系数是  $h_2$ 。所以, 统计判决量是  $s_1$  减  $r_1$  (无复共轭运算) 乘  $h_1$  的复共轭 (有复共轭运算) 和  $r_2$  的复共轭 (有复共轭运算) 乘  $h_2$  (无复共轭运算)。类似规律可以应用于构造  $s_2$  的统计判决量。编成口诀就是: 无共轭时共轭系数, 有共轭时共轭分量, 正负号和常系数保持不变。

首先将这个构造方法应用于 OSTBC 的  $\mathcal{H}_3$  和  $\mathcal{H}_4$ , 可以直接写出对应统计判决量, 避免了烦琐且极容易出错的推导。例如, 在参考文献[2]中, 对于复正交空时码  $\mathcal{H}_3$ , 关于  $s_1$  的统计判决量为

$$\left| \left( r_1 h_1^* + r_2^* h_2 + \frac{1}{2}(r_4 - r_3) h_3^* - \frac{1}{2}(r_4^* + r_3^*) h_3 \right) - s_1 \right|^2 + \left( -1 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) |s_1|^2$$

关于  $s_2$  的统计判决量为

$$\left| \left( r_1 h_2^* - r_2^* h_1 + \frac{1}{2}(r_4 + r_3) h_3^* + \frac{1}{2}(r_4^* - r_3^*) h_3 \right) - s_2 \right|^2 + \left( -1 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) |s_2|^2$$

关于  $s_3$  的统计判决量为

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (r_1 + r_2) h_3^* + r_3^* (h_1 + h_2) + r_4^* (h_1 - h_2) \right) - s_3 \right|^2 + \left( -1 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) |s_3|^2$$

对于复正交空时码  $\mathcal{H}_4$ ，关于  $s_1$  的统计判决量为

$$\left| \left( r_1 h_1^* + r_2^* h_2 + \frac{1}{2}(r_4 - r_3)(h_3^* - h_4^*) - \frac{1}{2}(r_4^* + r_3^*)(h_3 + h_4) \right) - s_1 \right|^2 + \left( -1 + \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 \right) |s_1|^2$$

关于  $s_2$  的统计判决量为

$$\left| \left( r_1 h_2^* - r_2^* h_1 + \frac{1}{2}(r_4 + r_3)(h_3^* - h_4^*) + \frac{1}{2}(r_4^* - r_3^*)(h_3 + h_4) \right) - s_2 \right|^2 + \left( -1 + \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 \right) |s_2|^2$$

关于  $s_3$  的统计判决量为

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (r_1 + r_2) h_3^* + (r_1 - r_2) h_4^* + r_3^* (h_1 + h_2) + r_4^* (h_1 - h_2) \right) - s_3 \right|^2 + \left( -1 + \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 \right) |s_3|^2$$

对于  $\mathcal{G}_3$  和  $\mathcal{G}_4$ ，对应统计判决量同样可以容易地写出。如对  $\mathcal{G}_3$  而言，为了解码  $s_1$ ，相应的判决统计量为

$$\left| [r_1 h_1^* + r_2 h_2^* + r_3 h_3^* + r_5^* h_1 + r_6^* h_2 + r_7^* h_3] - s_1 \right|^2 + \left( -1 + 2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) |s_1|^2$$

为了解码  $s_2$ ，相应的判决统计量为

$$\left| [r_1 h_2^* - r_2 h_1^* + r_4 h_3^* + r_5^* h_2 - r_6^* h_1 + r_8^* h_3] - s_2 \right|^2 + \left( -1 + 2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) |s_2|^2$$

为了解码  $s_3$ ，相应的判决统计量为

$$\left| [r_1 h_3^* - r_3 h_1^* - r_4 h_2^* + r_5^* h_3 - r_7^* h_1 - r_8^* h_2] - s_3 \right|^2 + \left( -1 + 2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) |s_3|^2$$

为了解码  $s_4$ ，相应的判决统计量为

$$\left| [-r_2 h_3^* + r_3 h_2^* - r_4 h_1^* - r_6^* h_3 + r_7^* h_2 - r_8^* h_1] - s_4 \right|^2 + \left( -1 + 2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) |s_4|^2$$

关于  $\mathcal{G}_4$  的解码，为了解码  $s_1$ ，相应的判决统计量为

$$\left| [r_1 h_1^* + r_2 h_2^* + r_3 h_3^* + r_4 h_4^* + r_5^* h_1 + r_6^* h_2 + r_7^* h_3 + r_8^* h_4] - s_1 \right|^2 + \left( -1 + 2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) |s_1|^2$$

为了解码  $s_2$ ，相应的判决统计量为

$$\left| [r_1 h_2^* - r_2 h_1^* - r_3 h_4^* + r_4 h_3^* + r_5^* h_2 - r_6^* h_1 - r_7^* h_4 + r_8^* h_3] - s_2 \right|^2 + \left( -1 + 2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) |s_2|^2$$

为了解码  $s_3$ ，相应的判决统计量为

$$\left| [r_1 h_3^* + r_2 h_4^* - r_3 h_1^* - r_4 h_2^* + r_5^* h_3 + r_6^* h_4 - r_7^* h_1 - r_8^* h_2] - s_3 \right|^2 + \left( -1 + 2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) |s_3|^2$$

为了解码  $s_4$ ，相应的判决统计量为

$$\left| [r_1 h_4^* - r_2 h_3^* + r_3 h_2^* - r_4 h_1^* + r_5^* h_4 - r_6^* h_3 + r_7^* h_2 - r_8^* h_1] - s_4 \right|^2 + \left( -1 + 2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) |s_4|^2$$

对于其他任意一种正交空时编码方案，都很容易地依照上面规范写出其各个符号的判

决统计量，也不易出错。另外，利用式 (4.27) 构造相应统计判决量，将对符号的正交编码转化为对信道参数的正交编码，利用信道参数编码矩阵的正交性实现对符号的独立译码也是一种便捷的解码方案。

## 4.7 性能分析

由第 2 章的分析讨论结果，我们知道，MIMO 系统由于空时分集效应可以大幅度地增加系统的容量。而通过本章的讨论，我们知道空时编码是实现系统分集的最有利、有效的途径。而分集效应的最直接体现是它能够在不增加系统带宽、不额外占用系统功率消耗等前提下，在同样频谱有效性下大幅度地降低系统误码率。这已经由前面对空时码的解码的 Monte Carlo 模拟实验得以说明。但是，另外，也可以通过误码率的理论分析来说明正交空时编码对提高系统性能的重要意义。

本节就从理论角度研究正交空时分组码的性能。首先，给出接收信噪比的分析来对多输入多输出的例子进行比较；然后，给出正交空时分组码的成对错误概率的比较紧致的上界公式，从理论上说明正交空时分组码对传输差错率的改善。

首先讨论两种特例情况，即具有多个发射天线与一个接收天线的 (MISO) 系统和具有一个发射天线与多个接收天线的 (SIMO) 系统的接收信噪比参量。

对于 MISO 系统，发送端采用正交空时分组码进行传输，为了简单，考虑诸如 PSK 的等能量星座，设加性噪声功率谱密度为  $\sigma_n^2/2$ ，且发射的符号具有相同功率  $E_s$ 。以 Alamouti 空时编码方案为例来说明。这时对发送符号  $s_k$  译码就是最小化  $|s_k - \tilde{s}_k|^2$  ( $k=1,2$ )，注意对  $\tilde{s}_1$ ，有

$$\tilde{s}_1 = r_1 h_1^* + r_2^* h_2 = \left( \sum_{n=1}^2 \alpha_n^2 \right) s_1 + n_1 \quad (4.61)$$

式中， $n_1$  是一个具有相互独立分量的零均值、且在每一个维度上的方差为  $(\sigma_n^2/2) \sum_{n=1}^2 \alpha_n^2$  的复高斯随机变量。若每个天线阵元的发射功率为  $E_s$ ，由式 (4.61)，那么接收到的信号功率为  $E_s \left( \sum_{n=1}^2 \alpha_n^2 \right)^2$ 。所以对应的信噪比为  $2(E_s / \sigma_n^2) \sum_{n=1}^2 \alpha_n^2$ 。这里要注意的是，发送端采用两个阵元的天线阵，所以发送功率为  $2E_s$ 。

对于 SIMO 系统，采用一发两收的最大比合并器为例来说明，以便与 Alamouti 空时编码方案做对比说明问题。这时对发送符号  $s_0$  译码就是最小化  $|s_0 - \tilde{s}_0|^2$ ，其中

$$\tilde{s}_0 = \left( \sum_{n=1}^2 \alpha_n^2 \right) s_0 + n_0$$

式中， $n_0$  是一个具有相互独立分量的零均值、且在每一个维度上的方差为  $(\sigma_n^2/2) \sum_{n=1}^2 \alpha_n^2$  的

复高斯随机变量。若信号的发射功率为  $E_s$ ，那么接收到的信号功率为  $E_s \left( \sum_{n=1}^2 \alpha_n^2 \right)^2$ 。所以对应的信噪比为  $2(E_s / \sigma_n^2) \sum_{n=1}^2 \alpha_n^2$ 。这时要注意的是，发送端采用的是单阵元天线。

显然，两种情况应该在同一条件下进行比较，所以，对于 Alamouti 空时编码方案，每个阵元的发射功率应为  $E_s / 2$ 。这也就从一个侧面说明，能够提供最大分集增益的空时编码方案是一个最优的方案。

上面的分析表明，可以通过计算 MISO 系统的性能，来得到相应的 SIMO 系统的性能；反之亦然。再根据 MIMO 系统与 MISO 系统的关系，就可以由 MISO 系统的性能分析结论来获得对 MIMO 系统性能的分析结果。所以，分析具有空时编码方案的 MISO 系统的性能具有一般意义。

假设所给定的空时编码矩阵为  $\mathbf{C}$ ，给  $\mathbf{C}$  加上角标如  $\mathbf{C}^{(l)}$  是指对某一特定符号序列  $\mathbf{s}^{(l)} = (s_1^{(l)}, s_2^{(l)}, \dots, s_K^{(l)})$  经空时编码设计转换成对应空时编码矩阵  $\mathbf{C}^{(l)}$ 。假设将当前传输的符号序列  $\mathbf{s}^{(0)}$  错判成符号序列  $\mathbf{s}^{(1)}$ ，这等价于将空时编码矩阵  $\mathbf{C}^{(0)}$  错判成  $\mathbf{C}^{(1)}$ 。这种错误是成对发生的，称为成对差错概率 (Pair-Error-Probability, PEP)。根据第 3 章的讨论在已知信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  的条件下，它可以表示为

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} = Q\left(\frac{\|(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})\mathbf{H}\|_F}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

依据 F 范数的定义，将上式重新写作

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} = Q\left(\frac{\sqrt{\text{tr}[(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})^H (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)}) \mathbf{H} \mathbf{H}^H]}}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) \quad (4.62)$$

下面分情形对式 (4.62) 所表示的成对差错概率进行讨论和分析。

#### 4.7.1 正交空时码情形的性能分析

设空时编码矩阵  $\mathbf{C}$  满足正交设计的条件，利用式 (4.19) 中的正交设计定义，式 (4.62) 可写作

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} = Q\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \frac{\|\mathbf{s}^{(0)} - \mathbf{s}^{(1)}\|_E \|\mathbf{H}\|_F}{\sigma_n}\right)$$

式中，符号  $\|\cdot\|_E$  表示欧氏范数 (Euclidean normal)，表示为

$$d_E = \|\mathbf{s}^{(0)} - \mathbf{s}^{(1)}\|_E \quad (4.63)$$

注意：式 (4.63) 的欧几里德距离独立于路径增益。以欧几里德距离的形式表示的条件成对差错概率为

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} = Q\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \frac{d_E \|\mathbf{H}\|_F}{\sigma_n}\right) \quad (4.64)$$

为了计算无条件成对差错概率，需要根据路径增益的概率密度函数对式 (4.64) 进行积分，为了使得计算这样一个积分更容易一些，一种方法就是利用 Craig<sup>[5]</sup>推导的  $Q(x)$  函数的如下公式：

$$Q^2(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sin^2\theta}\right) d\theta \quad (4.65)$$

图 4.13 给出了式 (4.65) 定义的 Craig<sup>[5]</sup>  $Q(x)$  与第 3 章定义的  $Q(x)$  的对比曲线，可见它们是完全相等的，通过这也说明式 (4.65) 的合理性。

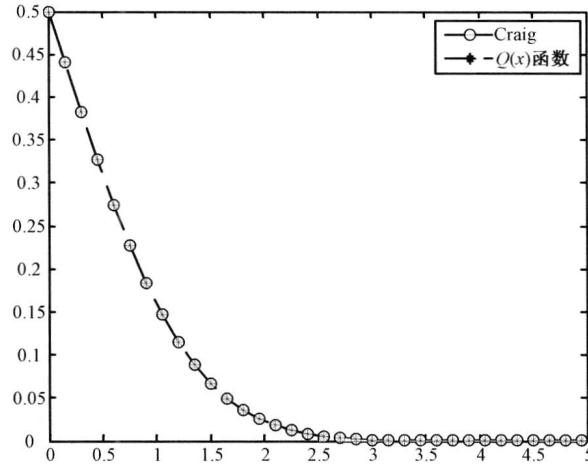


图 4.13  $Q(x)$ 函数与 Craig 函数的对比图形

将式 (4.64) 代入式 (4.65) 中，并将信号功率与噪声功率  $\sigma_n$  合并于信噪比参数 SNR，得

$$\begin{aligned} \Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{\kappa}{4\sigma_n^2} \frac{d_E^2 \|\mathbf{H}\|_F^2}{\sin^2\theta}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \prod_{n=1}^{N_T} \exp\left(-\frac{\kappa \cdot \text{SNR}}{4} \frac{d_E^2 \alpha_n^2}{\sin^2\theta}\right) d\theta \end{aligned} \quad (4.66)$$

假定信道为瑞利衰落信道，各路径增益互相独立，即假设信道是循环对称复高斯的。于是  $\alpha_n^2$  是对应信道参数  $h_n$  的实部平方加虚部平方，所以  $\alpha_n^2$  服从具有两个自由度的  $\chi^2$  分布；或者等价地，服从具有单位均值的指数分布。对式 (4.66) 关于信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  求期望，得到关于特定信道参数的平均成对差错概率

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} = E_{\mathbf{H}} \left[ \Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} \right]$$

即对式 (4.66) 中所有路径增益  $\alpha_n^2$  求期望，联合分布的积分就等于  $N_T$  个相同积分的乘积，即

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\kappa \cdot \text{SNR}}{4} \frac{d_E^2}{\sin^2\theta} x\right) f(x) dx \right]^{N_T} d\theta \quad (4.67)$$

在高斯信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  的假设下,  $f(x) = e^{-x}$  ( $x > 0$ ) 是  $\alpha_n^2$  的概率密度函数。为了简化重积分 (4.67), 利用随机变量  $X$  的矩生成函数的概念, 其定义为

$$\mathcal{M}(u) = E\{\exp(uX)\} \quad (4.68)$$

因此, 当  $u < 1$  时, 指数分布的矩生成函数为

$$\mathcal{M}(u) = E\{\exp(uX)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{ux} e^{-x} dx = \frac{1}{1-u} \quad (4.69)$$

利用上述的矩生成函数, 在式 (4.69) 中令  $u = -\frac{\kappa \cdot \text{SNR}}{4} \frac{d_E^2}{\sin^2 \theta}$  ( $u < 1$ ), 则有

$$\frac{1}{1-u} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \kappa \cdot \text{SNR} \cdot d_E^2 / 4}$$

式 (4.67) 中的成对差错概率可重新写为

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \kappa \cdot \text{SNR} \cdot d_E^2 / 4} \right]^{M_T} d\theta \quad (4.70)$$

显然, 若信噪比参数 SNR 增加, 或发送信号与估计信号的欧氏距离  $d_E^2$  增加, 则成对差错概率是以  $N_T$  为指数减少的。注意  $d_E^2$  也对应于星座图中任意两点的最小欧氏距离, 所以最大化调制方案的星座图中任意两点的最小欧氏距离, 成对差错概率能得到指数形式的改善。对于确定的调制方式和系统传输信噪比, 增加发射、接收天线阵列的阵元数, 则成对差错概率是以指数律减少的。最后要特别注意, 这样一些优秀品质的获得是完全依赖正交空时编码方案的。

实际上, 式 (4.70) 中的积分可以用闭形 (closed-form) 公式求出。于是, 正交空时分组码的成对差错概率的一般形式为<sup>[13]</sup>

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{a}{1+a}} \sum_{k=0}^{N_T-1} \binom{2k}{k} \left[ \frac{1}{4(1+a)} \right]^k \right\} \quad (4.71)$$

式中,  $a = \kappa \cdot \text{SNR} \cdot d_E^2 / 4$ 。式 (4.70) 和式 (4.71) 是在  $N_R = 1$  的假设下得到的。否则, 只需将  $N_T$  换成  $N_T \cdot N_R$  即可。图 4.14 所示是  $N_T \cdot N_R$  取几个不同值时成对差错概率随参数  $a$  的变化曲线, 显然, 随着  $N_T \cdot N_R$  的增大, 成对差错概率曲线的下降斜率成比例增大。

这样, 完全可以式 (4.71) 从理论上计算特定空时编码方案的成对差错概率。对于某特定的正交空时分组码, 根据式 (4.43), 参数  $\kappa$  由码字特性所确定。对于某特定的一对码字, 欧氏距离  $d_E$  从相应的星座点由式 (4.63) 计算得到。较大的欧氏距离对应于较低的成对差错概率。因此, 对于某特定的星座, 其最差的情况就是这对符号是所有可能的符号中距离最近的一对。下面通过一些例子来说明式 (4.71) 的应用。

**例 4.12** 对于 Alamouti 空时编码方案而言,  $N_T = 2$ ,  $N_R = 1$ ,  $\kappa = 1$ 。假设采用 BPSK 星座图, 星座点为  $-1/\sqrt{2}$ 、 $+1/\sqrt{2}$ ; 若在当前传输空时编码矩阵中, 仅有的两个星座点都出现, 所以其编码对应的欧氏距离为  $d_E = 2$ 。所以  $a = \text{SNR}$ , 对应成对差错概率为

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{a}{1+a}} \left[ 1 + \frac{1}{2(1+a)} \right] \right\}$$

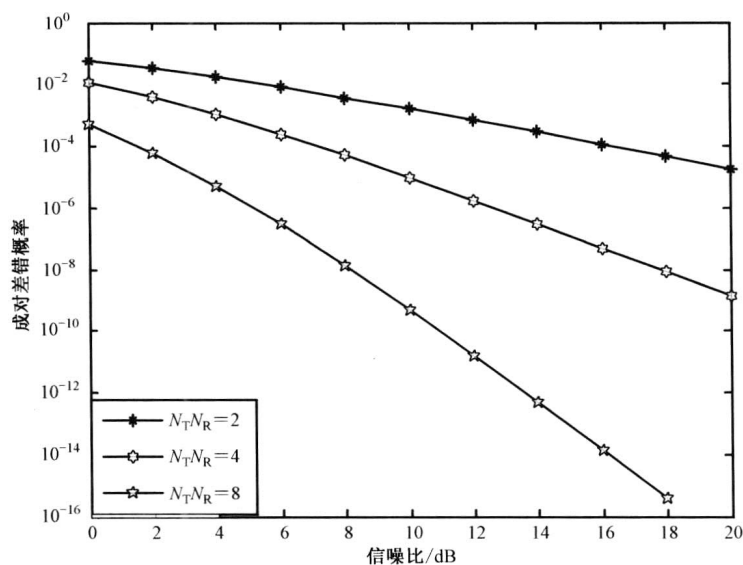


图 4.14 几种  $N_T \cdot N_R$  情况的成对差错概率曲线对比

若在当前传输空时编码矩阵中，仅有一个星座点出现，其编码对应的欧氏距离为  $d_E = \sqrt{2}$ 。所以  $\tilde{a} = \text{SNR} / 2$ ，对应成对差错概率为

$$\Pr\{C^{(0)} \rightarrow C^{(1)}\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\tilde{a}}{1+\tilde{a}}} \left[ 1 + \frac{1}{2(1+\tilde{a})} \right] \right\}$$

图 4.15 绘出了这两种情况下对应曲线的变化。从图中可以看出，两种情形的差大约为 3dB，这与其信噪比的差别是一致的。

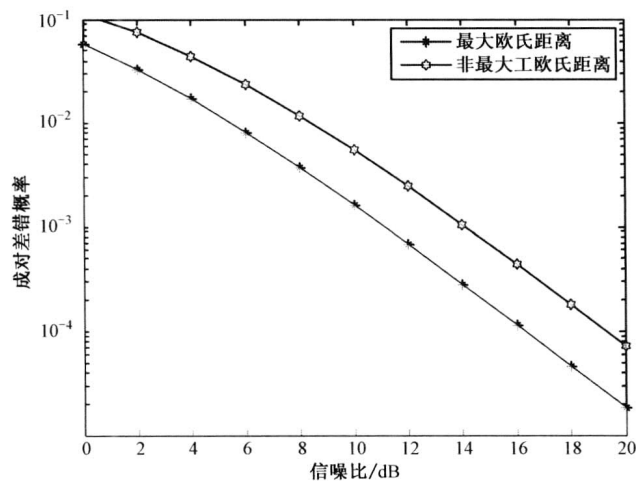


图 4.15 BPSK 星座图的 Alamouti 空时编码方案不同欧氏距离成对差错概率变化曲线

图 4.15 中曲线也说明，空时分组码的每一组的符号应尽可能不出现重复码元，以使编码对应的欧氏距离  $d_E$  达到最大，从而使对应成对差错概率取得最小。这等价于要求信源的

信息熵最大，因而对同一问题，各种优化条件具有内在关联性。

#### 4.7.2 非正交空时码情形的性能分析

设空时编码矩阵  $\mathbf{C}$  不满足正交设计的条件，即空时编码矩阵  $\mathbf{C}$  是非正交矩阵，这是将在第 5 章讨论的内容。在此讨论非正交空时编码的性能主要是因为它与本章讨论的主要内容正交设计有某种对立面意义。另外，对于非正交空时编码的情况，接收端的多天线与单天线不再是简单的最大比合并关系，在很多情况下，必须同时关注接收天线阵元的个数，所以不再假设接收天线阵元数等于 1。

将式 (4.62) 中传输路径增益和发送功率归于信噪比参数，信道参数  $\mathbf{H}$  可以认为是归一化的，这时条件成对差错概率式 (4.62) 可写作

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} = Q\left(\sqrt{\frac{\text{SNR}}{2}} \|\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)}\|_F \|\mathbf{H}\|_F\right)$$

仿照正交编码设计的讨论，要对成对差错概率关于  $\mathbf{H}$  求均值，所以必须分析这个  $Q$  函数中有关  $\mathbf{H}$  参量的分量的概率分布。首先来分析其参数表达式，为此，考查编码增益距离 (Coding Gain Distance, CGD) 矩阵

$$\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)}) = (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})^H (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})$$

这是一个 Hermitian 矩阵，对它做特征分解，有

$$\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)}) = \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^H$$

条件成对差错概率式 (4.63) 可写作

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} = Q\left(\sqrt{\frac{\text{SNR}}{2}} \sqrt{\text{tr}[\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^H \mathbf{H} \mathbf{H}^H \mathbf{V}]}\right)$$

对  $Q(x)$  用其紧致上界替代之，即利用  $Q(x) \leq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$  ( $x \geq 0$ )，条件成对差错概率式 (4.62) 可写作

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} \leq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\text{SNR}}{4} \text{tr}[\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^H \mathbf{H} \mathbf{H}^H \mathbf{V}]\right)$$

为了计算成对差错概率，仿照前面的讨论需要计算上面式子关于信道增益参数的概率密度函数的积分。为此，分成下面几种情形来讨论。

##### 1. 慢衰落信道的成对差错概率分析

对于慢衰落信道其参数  $\mathbf{H}$  可以认为在某个时间区间保持不变

$$\|\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)}\|_F^2 = \sum_{l=1}^{N_R} \sum_{n=1}^r \lambda_n |\beta_{l,n}|^2$$

式中， $r = \text{rank}(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})$  表示非零特征值  $\lambda_n$  的个数； $\beta_{l,n} = \langle \mathbf{h}_l, \mathbf{v}_n \rangle$  表示信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  列矢量在正交基底矢量  $\mathbf{V}$  的各个分量上的投影值，它是随信道参数  $\mathbf{H}$  而变化的量。

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)}\|_F^2 \\ &= \text{tr}[(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)}) \mathbf{H} \mathbf{H}^H (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)})^H] \end{aligned} \quad Q\left(\sqrt{\frac{\rho}{4}} \|\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i\|_F\right)$$

$$y = \sqrt{\frac{\rho}{4}} \sum_{n=1}^r \sum_{l=1}^{N_R} \lambda_n \beta_{l,n} \mathbf{v}_n + \mathbf{N}$$



$$\begin{aligned}
&= \text{tr}[\mathbf{H}\mathbf{H}^H \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H] \\
&= \text{tr}[\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \mathbf{H}\mathbf{H}^H \mathbf{V}]
\end{aligned}
\begin{pmatrix} \bar{\beta}_{1,1} & \bar{\beta}_{1,2} & \cdots & \bar{\beta}_{1,N_R} \\ \bar{\beta}_{2,1} & \bar{\beta}_{2,2} & \cdots & \bar{\beta}_{2,N_R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\beta}_{N_R,1} & \bar{\beta}_{N_R,2} & \cdots & \bar{\beta}_{N_R,N_R} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,N_T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{N_R,1} & \beta_{N_R,2} & \cdots & \beta_{N_R,N_T} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} &= \mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{\text{SNR}}{2} \sum_{l=1}^{N_R} \sum_{n=1}^r \lambda_n |\beta_{l,n}|^2}\right) \\
&\leq \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{\text{SNR}}{4} \sum_{l=1}^{N_R} \sum_{n=1}^r \lambda_n |\beta_{l,n}|^2\right\} \quad (4.72)
\end{aligned}$$

在标准高斯信道参数的假设下,  $\beta_{l,n}$  是每一维方差为  $1/2$  且均值为  $\mu_{\mathbf{H}}^{l,n}$  的独立复高斯随机变量, 其中参数  $\mu_{\mathbf{H}}^{l,n} = \langle E\{\mathbf{h}_l\}, \mathbf{v}_n \rangle \neq 0$ 。因此,  $|\beta_{l,n}|$  是服从莱斯 (Rice) 分布的随机变量<sup>[8]</sup>, 其概率密度分布函数为

$$p(x) = 2x \exp(-x^2 - |\mu_{\mathbf{H}}^{l,n}|^2) I_0(2x|\mu_{\mathbf{H}}^{l,n}|) \quad (4.73)$$

注意:  $I_0(x)$  是自变量为  $x$  的第一类修正的零阶贝塞尔 (Bessel) 函数, 其表达式在一般数学手册都可以查到。式 (4.72) 的右边涉及的是若干个独立同分布的随机变量的求和运算, 这就涉及中心极限定理或大数定理的应用问题。所以将式 (4.72) 关于信道参数  $\mathbf{H}$  的求均值问题分为两种情况。第一种为中心极限定理可以应用的情形; 第二种为中心极限定理不可应用的情形。

## 2. $r \cdot N_R$ 值较大时的成对差错概率分析

由假设,  $|\beta_{l,n}|$  是具有独立同莱斯分布的随机变量, 因此  $|\beta_{l,n}|^2$  是具有二维自由度和非中心参数  $|\mu_{\mathbf{H}}^{l,n}|^2$  的非中心  $\chi^2$  (chi-square) 分布的随机变量, 其均值和方差分别为

$$\mu_B = 1 + |\mu_{\mathbf{H}}^{l,n}|^2; \quad \sigma_B^2 = 1 + 2|\mu_{\mathbf{H}}^{l,n}|^2$$

所以依据中心极限定理, 随机变量  $\sum_{l=1}^{N_R} \sum_{n=1}^r \lambda_n |\beta_{l,n}|^2$  是服从高斯分布的, 其均值和方差分别为

$$\mu_D = \sum_{l=1}^{N_R} \sum_{n=1}^r \lambda_n (1 + |\mu_{\mathbf{H}}^{l,n}|^2); \quad \sigma_D^2 = \sum_{l=1}^{N_R} \sum_{n=1}^r \lambda_n^2 (1 + 2|\mu_{\mathbf{H}}^{l,n}|^2) \quad (4.74)$$

所以, 无条件成对差错概率为

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{\text{SNR}}{4} x\right\} p_D(x) dx \quad (4.75)$$

式中,  $\gamma = \frac{\text{SNR}}{4}$ , 而高斯概率分布密度函数

$$p_D(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_D} \exp\left[-\frac{(x - \mu_D)^2}{2\sigma_D^2}\right]$$

通过计算式 (4.75) 的积分, 可得

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma^2\sigma_D^2 - \gamma\mu_D\right\} \mathcal{Q}\left(\frac{\gamma\sigma_D^2 - \mu_D}{\sigma_D}\right) \quad (4.76)$$

将式 (4.74) 代入式 (4.76), 所得到的结果是  $\mu_H^{l,n} = \langle E\{\mathbf{h}_l\}, \mathbf{v}_n \rangle \neq 0$  时成对差错概率的表达式。若在相反的假设下, 即令  $\mu_H^{l,n} = \langle E\{\mathbf{h}_l\}, \mathbf{v}_n \rangle = 0$ , 由假设,  $|\beta_{l,n}|$  是具有独立同瑞利分布的随机变量, 因此  $|\beta_{l,n}|^2$  是具有二维自由度中心  $\chi^2$  (chi-square) 分布的随机变量, 其均值和方差分别为

$$\mu_B = 1; \quad \sigma_B^2 = 1$$

所以依据中心极限定理, 随机变量  $\sum_{l=1}^{N_R} \sum_{n=1}^r \lambda_n |\beta_{l,n}|^2$  是服从高斯分布的, 其均值和方差分别为

$$\mu_D = N_R \sum_{n=1}^r \lambda_n; \quad \sigma_D^2 = N_R \sum_{n=1}^r \lambda_n^2$$

将参数  $\mu_D$ 、 $\sigma_D^2$  代入式 (4.76) 并在式 (4.76) 应用  $Q(x)$  的紧致上界  $\frac{1}{2}\exp(-x^2/2)$  ( $x \geq 0$ ), 可得瑞利信道参数假设下非正交空时编码的无条件成对差错概率为

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} \leq \frac{1}{4} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\gamma^2 \sigma_D^2 + \frac{\mu_D^2}{\sigma_D^2}\right)\right\} \quad (4.77)$$

所以, 无条件成对差错概率的降幅与信噪比、信道增益功率方差、信道增益功率均值这些量均成正比。

### 3. $r \cdot N_R$ 值较小时的成对差错概率分析

当  $r \cdot N_R$  值较小时 (如  $r \cdot N_R < 4$ ), 中心极限定理将不可应用, 随机变量  $\sum_{l=1}^{N_R} \sum_{n=1}^r \lambda_n |\beta_{l,n}|^2$  不再服从高斯分布。但是随机变量  $|\beta_{l,n}|$  是独立同分布的假设亦然成立, 其概率分布可能有两种情况: 一是服从莱斯分布; 二是服从瑞利分布。无论哪种情形, 只要有参数  $|\beta_{l,n}|$  的概率分布密度函数, 都可以通过计算式 (4.72) 关于随机变量  $|\beta_{l,n}|$  的期望求出无条件成对差错概率, 即

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} = \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} | \mathbf{H}\} p_{|\beta|}(x_1) \cdots p_{|\beta|}(x_{N_T, N_R}) dx_1 \cdots dx_{N_T, N_R}$$

若随机变量  $|\beta_{l,n}|$  服从莱斯分布, 则<sup>[4]</sup>

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} = \prod_{m=1}^{N_R} \left[ \prod_{n=1}^r \frac{1}{1 + \gamma \lambda_n} \exp\left\{-\frac{\mu_H^{m,n} \gamma \lambda_n}{1 + \gamma \lambda_n}\right\} \right] \quad (4.78)$$

若随机变量  $|\beta_{l,n}|$  服从瑞利分布, 则所有  $\mu_H^{m,n} = 0$ , 所以

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} = \left[ \prod_{n=1}^r \frac{1}{1 + \gamma \lambda_n} \right]^{N_R} \quad (4.79)$$

式中,  $r$  是矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  的秩;  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  是矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  的非零特征值。在高信噪比情形, 无条件成对差错概率分别为

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} = \left[ \gamma \prod_{n=1}^r \zeta \sqrt{\lambda_n} \right]^{-r \cdot N_R} \exp \left\{ - \sum_{m=1}^{N_R} \sum_{n=1}^r \mu_H^{m,n} \right\} \quad (4.80)$$

和

$$\Pr\{\mathbf{C}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}\} = \left[ \gamma \prod_{n=1}^r \zeta \sqrt{\lambda_n} \right]^{-r \cdot N_R} \quad (4.81)$$

显然，无条件成对差错概率与空时编码距离矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  的秩及其特征值有直接关系，所以定义数值  $\zeta \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_r}$  为空时编码的编码增益；又注意到无条件成对差错概率与信噪比的  $-r \cdot N_R$  次方有直接关系，所以称数值  $r \cdot N_R$  为空时编码的分集增益。由于无条件成对差错概率以数值  $-r \cdot N_R$  为指数，所以数值  $r \cdot N_R$  是无条件成对差错概率曲线的斜率。

对比一下式 (4.77)、式 (4.81) 与式 (3.20)、式 (3.13)，可以看出中心极限定理能否应用对相应结果具有决定性意义。

比较一下正交设计情形下的无条件成对差错概率 (4.70) 与一般情形下无条件成对差错概率 (4.81) 或 (4.80)，可以看出：

(1) 对正交设计，其发送端的空时编码矩阵是正交的，所以一定是满秩的，无条件成对差错概率曲线是以  $N_T \cdot N_R$  为斜率减少的。

(2) 对非正交设计，其发送端的空时编码矩阵的秩  $r \leq N_T$ ，无条件成对差错概率曲线是以  $r \cdot N_R$  为斜率减少的。

(3) 无论什么情形，在接收端，阵列天线的作用都是以最大比合并算法体现的，所以其分集增益效应都是以天线阵元个数  $N_R$  表示的，它是不受空时编码技术影响的。

(4) 综上所述，空时编码的核心技术在于发送端的空时编码矩阵的设计，无论正交设计还是非正交设计，使所得到的空时编码矩阵为满秩时是最优的。

快衰落信道的成对差错概率分析方法与慢衰落信道的成对差错概率分析方法完全类似，这里就不再赘述。

## 4.8 计算机模拟实验说明

在上面的叙述中，给出了大量的计算机 Monte Carlo 仿真实验结果，这些结果都是利用 MATLAB<sup>®</sup> 平台完成的。其中部分程序借鉴了 MATLAB<sup>®</sup> 2009a 版本中关于正交空时编码的部分程序，也有一些模拟程序借鉴了参考文献[6]中从网络下载的部分程序。

我们的仿真基本上是基于系统误符号率或误比特率来进行的，而这两个技术指标是与传输速率直接相关的，所以比较必须在同一传输速率下进行，即依照在式 (4.32) 定义的同系统频带有效性下做比较。我们的模拟基本上是以一个接收天线阵元为例进行的，对于多于一个接收天线阵元的情况，只要在现有模拟工作基础上再结合采用最大比合并算法就可以完成，这一点在前面理论分析中已经反复给予说明。最后要说明的是，一般情况下，在模拟结果中都给出单输入单输出 (SISO) 的情形，它是相应情况的一个上界，便于进行对比观察。进一步的讨论也可以参考文献[10-11]。

## 4.9 本章要点总结

(1) Alamouti 空时编码矩阵

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{bmatrix}$$

是一个集空时编码的所有的优秀性质于一体的实现方案。它满足所谓空时正交编码的设计准则——行列式准则、秩准则、迹准则等，能实现（最大的）2 阶的分集——满分集；它是全速率发送的；与它对应最大似然解码是相互独立进行的。

(2) 基于正交设计的空时分组码能够确保：满足提供最大分集数的行列式准则、秩准则、迹准则等，满足对应的最大似然解码是相互独立进行的。

(3) 一个维数为  $N$  的实正交空时编码矩阵  $\mathcal{G}$  是一个由待定变量  $x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots, x_N, -x_N$  构成的正交矩阵（ $\mathcal{G}$  是  $N \times N$  的正交矩阵），满足

$$\mathcal{G}^T \mathcal{G} = \mathcal{G} \mathcal{G}^T = \left( \sum_{n=1}^N x_n^2 \right) \mathbf{I}_N$$

式中， $\mathbf{I}_N$  是  $N \times N$  的单位（Identity）矩阵。

(4)（实正交设计的另一定义）一个维数为  $N$  的实正交设计是指存在一个“大小为  $N-1$ ”的 Hurwitz-Radon 矩阵族  $\{\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \dots, \mathbf{B}_N\}$ ，它们是一些维数为  $N \times N$  的整数矩阵，再令  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{I}_N$ ，则得到实整数矩阵族  $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_N\}$ （称它们为实整数矩阵是因为这些矩阵的元素是 +1 或 -1）；而空时编码矩阵  $\mathcal{G}$  可以表示为

$$\mathcal{G} = \sum_{n=1}^N x_n \mathbf{B}_n$$

(5) 当且仅当  $N = 2, 4, 8$  时存在对应实正交空时编码矩阵  $\mathcal{G}$ 。

(6) 一个实广义正交空时编码矩阵  $\mathcal{G}$  是一个由  $K$  个待定变量  $x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots, x_K, -x_K$  构成的  $N \times T$ （ $T > N$ ）维矩阵，满足关系式

$$\mathcal{G} \mathcal{G}^T = \kappa \left( \sum_{k=1}^K x_k^2 \right) \mathbf{I}_N$$

式中， $\kappa$  是一个正实常数。该编码方案的传输速率  $R = K/T$ ，传输时延为  $T$ 。

(7) 对于任意发射天线数  $N_T$ ，总存在一个传输时延为  $T = \min_{c,d} \{2^{4c+d}\}$  的全速率、实广义正交空时编码矩阵  $\mathcal{G}$ 。其中  $c, d \in \{c \geq 0, 3 \geq d \geq 0 \mid 8c + 2^d \geq N_T\}$ （这说明“广义”实正交设计“广义化”了  $N_T \times N_T$  “方阵”为  $N_T \times T$  的“矩形阵”）。

(8)（广义实正交设计的另一定义）对于任意发射天线数  $N_T$ ，总存在一个“大小为  $N_T - 1$ ”，维数为  $T \times T$  的 Hurwitz-Radon 矩阵族  $\{\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \dots, \mathbf{B}_{N_T}\}$ ，令  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{I}_T$ ；其中  $T = \min_{c,d} \{2^{4c+d}\}$ ，而最小化参量  $c, d \in \{c \geq 0, 3 \geq d \geq 0 \mid 8c + 2^d \geq N_T\}$ 。对于待传输变量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_T)$ ，构造  $N_T$  个  $T$  维列矢量  $\mathbf{g}_n = \mathbf{B}_n \mathbf{x}^T$ ，则矩阵  $\mathcal{G} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{N_T})$  为  $T \times N_T$  维的全速率、实广义正交空时编码矩阵。

(9) 一个维数为  $N$  的复正交设计是一个由待定变量  $x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots, x_N, -x_N$  和它们的复共轭  $x_1^*, -x_1^*, x_2^*, -x_2^*, \dots, x_N^*, -x_N^*$  以及这些待定变量乘以虚单位  $+j$  或  $-j$  构成的  $N \times N$  维矩阵  $\mathcal{G}$ , 满足

$$\mathcal{G}^H \mathcal{G} = \mathcal{G} \mathcal{G}^H = \left( \sum_{n=1}^N |x_n|^2 \right) \mathbf{I}_N$$

(10) 当且仅当  $N = 2$  时存在对应复正交空时编码矩阵  $\mathcal{G}$  (Alamouti 空时编码矩阵是唯一的复正交空时编码矩阵)。

(11) 一个广义复正交设计是一个由复变量  $x_1, x_2, \dots, x_K$  以及它们的复共轭的线性组合为元素构成的一个  $T \times N_T$  ( $T \geq N_T$ ) 维的矩阵  $\mathcal{G}$ , 满足

$$\mathcal{G}^H \mathcal{G} = \kappa \left( \sum_{k=1}^K |x_k|^2 \right) \mathbf{I}_{N_T}$$

式中,  $\kappa$  是一个正实常数;  $R = K/T$  为该方案的传输速率;  $T$  为该方案的传输时延。

(12) 一般情形的传输速率为  $R = 0.5$  的广义复正交设计很容易由广义实正交设计根据形式  $[\mathcal{G} \ \mathcal{G}^*]$  构造出来。对于传输速率为  $R = 3/4$  的情形有一些特别的设计方案。

(13) 用任意酉矩阵乘以正交空时编码矩阵可以得到另外一种正交空时分组码, 所以对同一系统, 正交空时设计是不唯一的。

(14) 对于任意一种正交空时设计, 在接收端构造其解码判决统计量都可以遵循: 无共轭时共轭系数, 有共轭时共轭分量, 正负号及常系数保持不变的原则。

(15) 对于某特定的接收信噪比  $\gamma$ , 正交空时分组码的成对差错概率为

$$\Pr(\mathbf{C}^{(1)} \rightarrow \mathbf{C}^{(2)}) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{a}{1+a}} \sum_{k=0}^{N_T N_R - 1} \binom{2k}{k} \left[ \frac{1}{4(1+a)} \right]^k \right\}$$

式中,  $a = \kappa \gamma d_E^2 / 4$ ,  $d_E^2 = \sum_{l=1}^K |s_l^{(2)} - s_l^{(1)}|^2$ , 而  $(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \dots, s_K^{(1)})$  与  $(s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \dots, s_K^{(2)})$  分别是空时编码矩阵  $\mathbf{C}^{(1)}$  与  $\mathbf{C}^{(2)}$  中的传输符号。

## 练习题

1. 考虑一个使用正交空时分组码和 QPSK 调制的系统。若输入的比特流是 101101001001, 在下述情况下, 每一个天线所发射的符号分别是什么?

- (1) 2 根发射天线;
- (2) 3 根发射天线 (选择效率最高的空时分组码来传输)。

2. 对于一个具有两发一收的复 Alamouti 空时编码方案:

- (1) 写出它的 STBC 矩阵  $\mathbf{s}$  (实、复)。
- (2) 计算其传输速率。
- (3) 假设在第一时隙收到的信号是  $r_1$ , 在第二时隙收到的信号是  $r_2$ , 写接收信号矢量

形式

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

中 STBC 矩阵  $\mathbf{s}$  的分量形式。

(4) 对矩阵  $\mathbf{s}$  为复数的情形, 写接收信号矢量形式

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

中矩阵  $\mathbf{\Omega}$  用它的元素  $h_1, h_1^*, h_2, h_2^*$  表达的形式; 比较 (3)、(4) 中  $\mathbf{h}$  与  $\mathbf{s}$  以及矩阵  $\mathbf{\Omega}$  与  $\mathbf{s}$ 。

(5) 证明矩阵  $\mathbf{\Omega}$  是正交矩阵, 且矩阵  $\mathbf{\Omega}$  满足  $\mathbf{\Omega}^H \mathbf{\Omega} = \kappa \mathbf{I}_2$ , 式中  $\kappa$  是仅与信道参数有关的常数。

3. 试推导, 如下矩阵中码率为 1/2 的正交空时分组码, 当进行独立最大似然译码时, 确定其判决度量。

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & x_4 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2^* & x_1^* & 0 & x_3 & 0 & x_4 & 0 & 0 \\ x_3^* & 0 & -x_1^* & x_2 & 0 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & x_3^* & -x_2^* & -x_1 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ x_4^* & 0 & 0 & 0 & -x_1^* & x_2 & -x_3 & 0 \\ 0 & x_4^* & 0 & 0 & -x_2^* & -x_1 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & x_4^* & 0 & -x_3^* & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^* & 0 & -x_3^* & -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix}$$

4. 试推导, 正交空时编码矩阵为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2^* & x_1^* & 0 \\ x_3^* & 0 & -x_1^* \\ 0 & x_3^* & -x_2^* \end{bmatrix}$$

中码率为 3/4 的正交空时分组码当进行独立的最大似然译码时其判决度量。如何从空时编码矩阵

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ -x_2^* & x_1^* & 0 & x_3 \\ x_3^* & 0 & -x_1^* & x_2 \\ 0 & x_3^* & -x_2^* & -x_1 \end{bmatrix}$$

中码率为 3/4 的正交空时分组码的判决度量得到现在的这些判决度量?

5. 考虑如下的空时分组码

$$\begin{bmatrix} x_1^* & 0 & 0 & -x_4^* \\ 0 & x_1^* & 0 & x_3^* \\ 0 & 0 & x_1^* & x_2^* \\ 0 & -x_2^* & x_3^* & 0 \\ x_2^* & 0 & x_4^* & 0 \\ -x_3^* & -x_4^* & 0 & 0 \\ x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

(1) 求空时分组码的码率。

(2) 该种码是否具有独立的极大似然译码的性质? 该种码是否是正交空时分组码?

6. 利用  $4 \times 4$  的 Hadamard 矩阵

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

构造一个如下矩阵

$$G = A_4 \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{bmatrix}$$

试求相应的码速率和分集增益。

## 参 考 文 献

- [1] Alamouti S M. A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications. IEEE Journal Select. Areas Commun, 1998, 16 (8) : 1451–1458.
- [2] Tarokh V, Jafarkhani H, Calderbank A R. Space-Time Block Codes From Orthogonal Designs. IEEE Trans. Inform. Theory, 1999, 45 (5) : 1456–1467.
- [3] Tarokh V, Jafarkhani H, Calderbank A R. Space-Time Block Coding for Wireless: Performance Results. IEEE J. Select. Areas Commun., 1999, 17 (3) : 451–460.
- [4] Tarokh V, et al. Space-Time Codes for High Data Rate Wireless Communication: Performance Criteria in the Presence of Channel Estimation Errors, Mobility, and Multiple Paths. IEEE Trans. Commun., 1999, 47 (2) : 199–207.
- [5] Craig J W. A new, simple and exact result for calculating the probability of error for two-dimensional signal constellations. IEEE MILCOM, 4-7 Nov 1991: 571–575.
- [6] Liang X B. A high-rate orthogonal space-time block code. IEEE Communications Letters, 2003, 7 (5) : 222–223.
- [7] Su W, Xia X G, Liu K J R. A systematic design of high-rate complex orthogonal space-time block codes. IEEE Communications Letters, 2004, 8 (6) : 380–382.
- [8] Tarokh V, Seshadri N, Calderbank A R. Space-time codes for high data rate wireless communication: performance analysis and code construction. IEEE Trans.on Information Theory, 1998, 44 (5) : 744–765.
- [9] Radon J. Lineare scharen orthogonaler matrizen. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universitat, 1922 (I) : 1–14.

- [10] 张凌雁, 邵朝. MIMO 系统中的空时分组编码及其性能分析. 西安邮电学院学报, 2008, 13 (1): 28-32.
- [11] 张凌雁, 邵朝, 叶荣. 分层块空时分组码的简化译码算法. 数据采集与处理, 2009, 24 (2): 185-188.
- [12] 申苗, 邵朝. 满速率全分集的准正交空时分组码及性能分析. 西安邮电学院学报, 2009 (5): 17-21.
- [13] Simon M K, Alouini M S. Digital Communication over Generalized Fading Channels: A Unified Approach to the Performance Analysis. John Wiley & Sons, 2000.



## 附录 A 有关函数 $Q(x)$ 的几个结果

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt; \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} \exp(-t^2) dt$$

$$Q(z) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{A.1})$$

$$Q(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sin^2\theta}\right) d\theta$$

$$Q(z) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \int_z^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_z^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2+x^2}{2}\right) dx dy$$

令:  $y = r \cos \varphi, x = r \sin \varphi$  ( $\because y \geq 0, x \geq 0, \therefore r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ),

得

$$dx dy = r dr d\varphi, \quad y^2 + x^2 = r^2$$

所以有

$$Q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{x/\sin\varphi}^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r dr d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sin^2\varphi}\right) d\varphi$$

$$Q^2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_z^{+\infty} \int_z^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dy dx$$

将第一象限的矩形积分区域划分为两个角形积分区域, 得

$$Q^2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_{z/\sin\varphi}^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r dr d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{z/\cos\varphi}^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r dr d\varphi$$

利用变量代换, 得

$$Q^2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sin^2\varphi}\right) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \exp\left(-\frac{z^2}{2\cos^2\varphi}\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sin^2\varphi}\right) d\varphi \quad (\text{A.2})$$

## 附录 B 编码矩阵 $\mathcal{H}_3$ 对信道参数的编码变换公式

由编码矩阵  $\mathcal{H}_3$  对天线阵元数与发送时隙数的假设, 可以设接收矢量为

$$\mathbf{r} = \mathbf{h}\mathcal{H}_3 + \mathbf{n}$$

所以有

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{E_s}{3\sigma_n^2}} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \alpha h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha h_3 & h_2 & -h_1 & 0 \\ -\beta h_3 & \beta h_3 & 0 & -\beta h_3 & -\beta h_3 & \alpha(h_1 + h_2) \\ \beta h_3 & \beta h_3 & 0 & -\beta h_3 & \beta h_3 & \alpha(h_1 - h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

从该方程可以得到如下三个方程式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2^* \\ \alpha(r_4 - r_3) \\ \alpha(r_4^* + r_3^*) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_1} = \sqrt{\frac{E_s}{3\sigma_n^2}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \alpha h_3 & 0 & 0 & 0 \\ h_2^* & -h_1^* & 0 & 0 & 0 & \alpha h_3^* \\ \alpha h_3 & 0 & 0 & 0 & \alpha h_3 & -h_2 \\ -\alpha h_3^* & 0 & h_1^* & 0 & \alpha h_3^* & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s}^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}} + \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2^* \\ \alpha(n_4 - n_3) \\ \alpha(n_4^* + n_3^*) \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}_1} \quad (\text{B.2})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2^* \\ \alpha(r_4 + r_3) \\ \alpha(r_4^* - r_3^*) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_2} = \sqrt{\frac{E_s}{3\sigma_n^2}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \alpha h_3 & 0 & 0 & 0 \\ h_2^* & -h_1^* & 0 & 0 & 0 & \alpha h_3^* \\ 0 & \alpha h_3 & 0 & -\alpha h_3 & 0 & h_1 \\ 0 & \alpha h_3^* & -h_2^* & -\alpha h_3^* & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s}^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}} + \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2^* \\ \alpha(n_4 + n_3) \\ \alpha(n_4^* - n_3^*) \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}_2} \quad (\text{B.3})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha(r_1 + r_2) \\ r_3^* \\ r_4^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_3} = \sqrt{\frac{E_s}{3\sigma_n^2}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha h_1 & \alpha h_2 & h_3 & \alpha h_2 & -\alpha h_2 & 0 \\ -\beta h_3^* & -\beta h_3^* & \alpha(h_1^* + h_2^*) & -\beta h_3^* & \beta h_3^* & 0 \\ -\beta h_3^* & \beta h_3^* & \alpha(h_1^* - h_2^*) & \beta h_3^* & \beta h_3^* & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_3} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s}^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha(n_1 + n_2) \\ n_3^* \\ n_4^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}_3} \quad (\text{B.4})$$

容易验证式 (B.2) 的第一列与  $\mathbf{H}_1$  的其他列正交; 式 (B.3) 的第二列与  $\mathbf{H}_2$  的其他列正交; 式 (B.4) 的第三列与  $\mathbf{H}_3$  的其他列正交。这样就得到符号  $s_1$ 、 $s_2$  和  $s_3$  的判决统计量。

## 第5章 空时格型码的编码原理及性能分析

### 引言

在第4章,讨论了空时分组码的设计原理及性能分析,空时分组码的优点是具有较完整的设计理论、以设计理论为指导的非常简单明了的设计方法、能用最简单的译码算法提供最大分集增益,其不足(缺陷)是无法提供编码增益,其满速率设计是严格受限的。为了弥补这些不足之处和突破这些限制,有必要从差错控制编码、调制、传输与发送—接收分集等联合考虑来开发一种更为有效的空时信号发送设计方案,这就是本章要讨论的空时格型码(Space-Time Trellis Codes, STTC)的编解码理论。

空时格型编码调制(Space-Time Trellis Codes Modulation, STTCM)的概念是由Tarokh/Seshadri/Calderbank(TSC)等<sup>[1-2]</sup>提出的,迄今为止,已经有大量文献对它进行了广泛深入的讨论。空时格型编码调制是通过将编码和调制相结合来获取更高的编码增益,它能够在平坦衰落信道中不降低谱有效性的前提下同时实现编码增益和空时分集增益。

本章讨论空时格型码的编码结构、实现编码增益的原理、译码算法和简单的性能分析等。通过利用空时编码的设计准则,构造适用于慢衰落和快衰落信道的各种收发天线数和频谱利用率的最佳空时格型编码MPSK方案。

### 5.1 空时格型编码器的网格图

空时格型码的编码方式是将二进制数据流映射为调制符号流,这种映射关系可以由“网格图”(如图5.1所示)描述。设系统的发射天线数为 $N_T$ ,输入的比特流为

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_t, \dots)$$

式中,  $\mathbf{c}_t$  是  $t$  时刻的一组  $m = \log_2 M$  个信息比特的码组,其结构为

$$\mathbf{c}_t = (c_t^1, c_t^2, \dots, c_t^m) \quad (5.1)$$

编码器将输入序列映射为一个  $M$ -PSK 调制信号序列或符号组

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t, \dots)$$

式中,  $\mathbf{x}_t$  是  $t$  时刻的一个“空-时”符号或“空-时”码,它的结构为

$$\mathbf{x}_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^{N_T}) \quad (5.2)$$

将调制符号  $x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^{N_T}$  由  $N_T$  根发射天线同时发送出去。

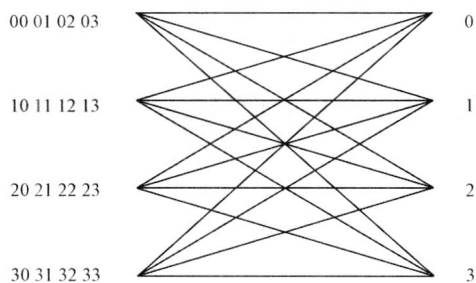


图 5.1 2 发 4 状态 2bps/Hz QPSK 调制空时格型码的网格图

**例 5.1** 考虑一个具有两个发射天线、QPSK 调制的例子。用符号集合  $\{0, 1, 2, 3\}$  表示与符号集合  $\{+1, +j, -1, -j\}$  一一对应关系，现在的情形是  $m = 2$ ， $N_T = 2$ 。输入的比特流是两两一组，对于输入比特流的组合状态，仍然可以用符号集合  $\{0, 1, 2, 3\}$  来表示，这时它们的对应关系为 Gray 映射，符号集合  $\{0, 1, 2, 3\}$  对应于符号集合  $\{00, 01, 11, 10\}$ 。输出的符号组合为  $\{00, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33\}$ 。所以，输入与输出的关系用网格图表示为图 5.1。图 5.1 所示的状态转移网格图也被称为“篱笆图”，它是由 Ungerboeck<sup>[3]</sup>提出的对移位寄存器的状态转移规律的直观表示，篱笆图也是空时格型码编码器的一种表示方式。

那么，它们这种输入与输出之间的变换关系是如何确定的呢？通过下面的讨论分析我们将认识到这是完全由空时格型码的编码器或生成多项式或生成矩阵决定的。

## 5.2 空时格型码编码器结构、生成多项式及生成矩阵

空时格型码编码器的结构框图如图 5.2 所示，它将  $m$  个二进制输入序列  $c^1, c^2, \dots, c^m$  馈入编码器。编码器由  $m$  个前馈移位寄存器组成，每一个前馈移位寄存器就是一个具有寄存功能的横截（有限长单位脉冲响应）滤波器，其滤波器系数为  $g_{l,n}^k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ； $l = 0, 1, \dots, \eta_k - 1$ ； $n = 1, 2, \dots, N_T$ )，参数  $\eta_k$  表示第  $k$  个前馈移位寄存器的长度，滤波器的相加器为模  $M$  相加。编码器的输出为  $M$ -PSK 调制信号序列  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^{N_T})$ ，将它们通过  $N_T$  个天线阵元发送。

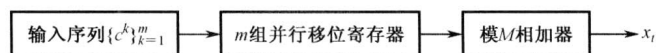


图 5.2 空时格型码编码器的结构框图

图 5.3 给出了空时格型码编码器  $m$  个前馈移位寄存器中的一个支路的结构图，其输入为序列  $c^k$ 。由上面的说明，第  $k$  个前馈移位寄存器的长度为  $\eta_k$ ，所以输入为序列  $c^k = (c_{i-\eta_k+1}^k, \dots, c_i^k)$ ，注意输入序列与当前时刻的码元  $c_i^k$  有关，也与前面  $\eta_k - 1$  个输入码元  $(c_{i-\eta_k+1}^k, \dots, c_{i-1}^k)$  有关；移位寄存器共有  $\eta_k$  组系数，将它们记为  $\mathbf{g}^k = (g_0^k, g_1^k, \dots, g_{\eta_k-1}^k)$ ，而每一组为  $\mathbf{g}_l^k = (g_{l,1}^k, g_{l,2}^k, \dots, g_{l,N_T}^k)$ ，再注意它的元素  $g_{l,n}^k$ ，其中上角标  $k$  指移位寄存器支路序

号,  $l$  为延迟器序号,  $n$  为发送天线阵元序号。而序列  $\mathbf{g}_l^k$  的长度等于发送天线阵元数  $N_T$ 。

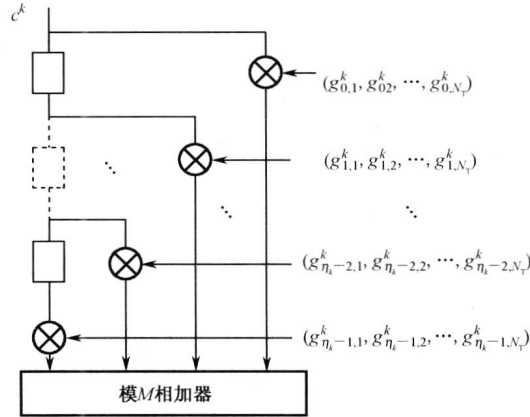


图 5.3 前馈移位寄存器一个支路的结构图

编码器输出序列  $\mathbf{x}_t$  的第  $n$  ( $n=1,2,\dots,N_T$ ) 个分量的表达式为

$$\mathbf{x}_t^n = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{\eta_k-1} \mathbf{g}_{l,n}^k c_{t-l}^k \pmod{M} \quad (5.3)$$

当前时刻输出序列的元  $x_t^n$  ( $n=1,2,\dots,N_T$ ) 是 0 到  $M-1$  之间的一个数, 仿照例 5.1, 这个数对应于  $M$ -PSK 星座图中一个符号 (点), 它是天线的第  $n$  个阵元当前时刻发送的信号。仍然通过一个具体例子来说明。

**例 5.2** (例 5.1 续) 考虑一个具有两个发射天线、QPSK 调制的例子。这时  $m=2$ 、 $N_T=2$ 、4 状态, 所以现在有两个支路, 每个支路前馈移位寄存器的长度为 2, 其系数分别为

$$[(g_{0,1}^1, g_{0,2}^1), (g_{1,1}^1, g_{1,2}^1)] \text{ (对应于前馈移位寄存器第一条支路)}$$

$$[(g_{0,1}^2, g_{0,2}^2), (g_{1,1}^2, g_{1,2}^2)] \text{ (对应于前馈移位寄存器第二条支路)}$$

由式 (5.3) 编码器输出序列  $\mathbf{x}_t$  与天线阵元对应为

$$\begin{aligned} x_t^1 &= g_{0,1}^1 c_t^1 + g_{0,2}^1 c_t^2 + g_{1,1}^1 c_{t-1}^1 + g_{1,2}^1 c_{t-1}^2 \pmod{4} \\ x_t^2 &= g_{0,2}^1 c_t^1 + g_{0,2}^2 c_t^2 + g_{1,2}^1 c_{t-1}^1 + g_{1,2}^2 c_{t-1}^2 \end{aligned}$$

这样, 很容易对照图 5.3 绘出对应编码器的结构原理图。

再回到图 5.3 所示的空时格型码编码器的第  $k$  个支路结构图, 可以将移位寄存器输入的二进制序列表示为

$$\mathbf{c}^k = c_0^k + c_1^k D + \dots + c_t^k D^t + \dots \quad (k=1,2,\dots,m)$$

式中, 符号  $D$  表示移位运算。将第  $k$  个支路中对应第  $n$  ( $n=1,2,\dots,N_T$ ) 个天线阵元的系数 (注意图 5.3 中这些系数与移位寄存器顺序的对应关系) 表示成移位多项式为

$$\mathbf{G}_n^k(D) = g_{0,n}^k + g_{1,n}^k D + \dots + g_{\eta_k-1,n}^k D^{\eta_k-1} \quad (n=1,2,\dots,N_T)$$

所以, 空时格型码编码器的输出序列具有形式

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{c}^1(D) \mathbf{G}_n^1(D) + \mathbf{c}^2(D) \mathbf{G}_n^2(D) + \dots + \mathbf{c}^m(D) \mathbf{G}_n^m(D) \pmod{M}$$

或写作

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{c}(D)\mathbf{G}_n(D) \bmod M \quad (n=1,2,\dots,N_T) \quad (5.4)$$

称式 (5.4) 为时空格型码生成多项式。其中输入比特矢量和移位多项式矢量分别是

$$\mathbf{c}(D) = [\mathbf{c}^1(D) \quad \mathbf{c}^2(D) \quad \dots \quad \mathbf{c}^m(D)]; \quad \mathbf{G}_n(D) = [\mathbf{G}_n^1(D) \quad \mathbf{G}_n^2(D) \quad \dots \quad \mathbf{G}_n^m(D)]^T$$

将  $\mathbf{G}_n^k(D)$  ( $k=1,2,\dots,m$ ) 中移位算子的同次项归并, 所以

$$\mathbf{G}_n(D) = [g_{0,n}^1, g_{0,n}^2, \dots, g_{0,n}^m, g_{1,n}^1, g_{1,n}^2, \dots, g_{1,n}^m, \dots, g_{\eta_n-1,n}^1, g_{\eta_n-1,n}^2, \dots, g_{\eta_n-1,n}^m]^T \quad (5.5)$$

在此默认了各个支路移位寄存器长度是相等的, 所以矢量  $\mathbf{G}_n$  的长度为  $\eta = \sum_{k=1}^m \eta_k$ 。再

由式 (5.3), 就可以得出对于输入序列, 必须考虑的移位长度。事实上, 各个支路移位寄存器长度是不相等的, 对于  $M$ -PSK 调制, 各个支路移位寄存器长度由下式确定:

$$\eta_k = \left\lfloor \frac{\eta + k - 1}{\log_2 M} \right\rfloor$$

式中,  $\lfloor x \rfloor$  表示取小于或等于  $x$  的正整数。

**例 5.3** 对于由例 5.2 给出的数据, 移位寄存器总长度为 4, 第一支路、第二支路的长度分别是  $\eta_1 = \lfloor 4/2 \rfloor = 2$  和  $\eta_2 = \lfloor 5/2 \rfloor = 2$ 。若移位寄存器总长度为 5, 则第一支路、第二支路的长度分别是  $\eta_1 = \lfloor 5/2 \rfloor = 2$  和  $\eta_2 = \lfloor 6/2 \rfloor = 3$ 。例如, 可以给出的格型码编码器对应的系数矢量为

$$\mathbf{g}^1 = [(0,2), (2,0)]; \quad \mathbf{g}^2 = [(0,1), (1,0), (2,2)]$$

**例 5.4** (例 5.2 续) 仍然考虑一个具有两个发射天线、QPSK 调制的例子。设在例 5.2 中移位寄存器的系数为

$$[(g_{0,1}^1, g_{0,2}^1), (g_{1,1}^1, g_{1,2}^1)] = [(0,2), (2,0)]$$

$$[(g_{0,1}^2, g_{0,2}^2), (g_{1,1}^2, g_{1,2}^2)] = [(0,1), (1,0)]$$

依据式 (5.5), 移位寄存器系数多项式矢量为

$$\mathbf{G}_1(D) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2(D) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以, 输出序列为

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{c}^1(D)\mathbf{G}_1^1(D) + \mathbf{c}^2(D)\mathbf{G}_1^2(D) = 2D \cdot \mathbf{c}^1(D) + D \cdot \mathbf{c}^2(D) \bmod 4$$

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{c}^1(D)\mathbf{G}_2^1(D) + \mathbf{c}^2(D)\mathbf{G}_2^2(D) = 2\mathbf{c}^1(D) + \mathbf{c}^2(D) \bmod 4$$

很显然有关系

$$\mathbf{x}^1 = D\mathbf{x}^2$$

利用式 (5.3) 同样可得关系  $x_i^1 = 2c_{i-1}^1 + c_i^2$ ;  $x_i^2 = 2c_i^1 + c_i^2$ 。

因为是 QPSK 调制，所以将输入序列两两成组。设输入序列为  $\mathbf{c} = (10, 01, 11, 00, 01, 11, 10)$ ，因为移位寄存器的记忆长度为 2，所以对输入序列以四个元素分组，为了使输入完成后移位寄存器归于零状态，对输入序列后面补等于记忆长度个数的零元；对于初始输入，可以认为前一时刻输入为零。所以，输入序列修正为  $\mathbf{c} = (00, 10, 01, 11, 00, 01, 11, 10, 00)$ ，利用式 (5.3) 可得从两个天线阵元送出的符号序列分别为  $\mathbf{x}^1 = \{0, 2, 1, 3, 0, 1, 3, 2\}$  和  $\mathbf{x}^2 = \{2, 1, 3, 0, 1, 3, 2, 0\}$ ；或利用式 (5.4) 可得

$$\begin{array}{r} 2D\mathbf{c}^1 = 02020022 \\ \oplus \text{mod } 4 \quad D\mathbf{c}^2 = 00110110 \\ \hline \mathbf{x}^1 = \{02130132\} \end{array} ; \quad \begin{array}{r} 2\mathbf{c}^1 = 2020022 \\ \oplus \text{mod } 4 \quad \mathbf{c}^2 = 0110110 \\ \hline \mathbf{x}^2 = \{2130132\} \end{array}$$

也可以直接利用关系式  $\mathbf{x}^1 = D\mathbf{x}^2$ ，在获得  $\mathbf{x}^1$  ( $\mathbf{x}^2$ ) 后，对  $\mathbf{x}^1$  向前移一位 (对  $\mathbf{x}^2$  向后移一位) 得  $\mathbf{x}^2$  (得  $\mathbf{x}^1$ )。

示例中关系  $\mathbf{x}^1 = D\mathbf{x}^2$  也揭示了在这个具体编码方案中实现空时分集的原理，我们称具有这种特点的空时格型码编码方式为延迟分集方案<sup>[4]</sup>。延迟分集方案是空时格型编码的一种方式，若设调制星座图的一个点含  $b$  bit，延迟分集方案通过输入每  $b$  bit 来选择一个符号，并从第一个天线阵元发送出去，在经过一个符号周期延迟后，第二个阵元又将同一符号发送出去。这样同一个符号经过不同时间、地点到达接收天线阵元，所以它获得的分集数至少是 2。但延迟分集方案不是最优的，参考文献[1]给出的一些方案在保证分集增益前提下可以获得更高的编码增益，即更好的系统性能。

空时格型码的生成矩阵的概念是由 Baro/Bauch/Hansmann (BB)<sup>[2]</sup>提出的，在  $M$ -PSK 调制的前提下，定义整数集合  $\mathbf{Z} = \{x\}$  到  $M$ -PSK 星座图的映射  $\mathcal{M}$  为

$$\mathcal{M}(x) = \exp(j2\pi x / M)$$

式中， $j$  为虚单位。设空时格型码编码器的生成矩阵为  $\mathbf{G}$ ，则当  $t$  时刻编码器的输入序列为  $\tilde{\mathbf{c}}_t$  时， $\tilde{\mathbf{c}}_t \cdot \mathbf{G}$  表示空时格型码编码器模  $M$  相加输入端的符号序列，所以  $\tilde{\mathbf{c}}_t \cdot \mathbf{G} \pmod{M}$  为 0 到  $M-1$  之间的整数序列。所以， $t$  时刻从发射天线阵元送出的信号为

$$\mathbf{x}_t = (\mathbf{x}_t^1, \mathbf{x}_t^2, \dots, \mathbf{x}_t^{N_t}) = \mathcal{M}(\tilde{\mathbf{c}}_t \cdot \mathbf{G} \pmod{M}) \quad (5.6)$$

依据上面讨论的生成矩阵为  $\mathbf{G}$  的功能来推导出空时格型码编码器的生成矩阵  $\mathbf{G}$  的表达式。设空时格型码编码器的记忆长度为  $\eta$ ，则  $\tilde{\mathbf{c}}_t$  是由当前时刻的比特组队列加上前面  $\eta-1$  时刻的比特组构成的比特序列，再将  $\tilde{\mathbf{c}}_t$  以式 (5.1) 分成  $m$  个支路序列；在第  $k$  路中，依据图 5.3 所示的流程乘以编码器的系数送入模  $M$  加法器。依据图 5.3 所示的时隙顺序及天线阵元顺序关系与空时格型码生成多项式的表达式，对应于第  $n$  个天线阵元的发射信号的生成矩阵列矢量为

$$(\mathbf{g}_{0,n}^1, \mathbf{g}_{0,n}^2, \dots, \mathbf{g}_{0,n}^m, \mathbf{g}_{1,n}^1, \mathbf{g}_{1,n}^2, \dots, \mathbf{g}_{1,n}^m, \dots, \mathbf{g}_{\eta-1,n}^1, \mathbf{g}_{\eta-1,n}^2, \dots, \mathbf{g}_{\eta-1,n}^m)^T \quad (5.7)$$

这样，就得到空时格型码编码器生成矩阵  $\mathbf{G}$ ，其列矢量由式 (5.7) 构成。所以就可以写出如表 5.1 和表 5.2 中所给生成序列对应的空时格型码编码  $\mathbf{G}$ 。参考文献[5]的大量表格中列出空时格型编码系数所对应的生成矩阵表达式。

表 5.1 发射天线数为 3 或 4 的基于秩与行列式准则的慢衰落信道的最佳 QPSK STTC

天线数	状态数	生成序列	秩	行列式	迹
3	4	$\mathbf{g}^1 = [(0,0,2),(0,1,2)]; \mathbf{g}^2 = [(2,0,0),(1,2,0),(2,3,3)]$	3	32.0	16.0
3	5	$\mathbf{g}^1 = [(0,2,1),(2,0,0),(0,0,2)]; \mathbf{g}^2 = [(3,1,0),(3,2,1),(3,2,2),(2,0,0)]$	3	64.0	14.0
3	6	$\mathbf{g}^1 = [(1,1,2),(2,1,2),(1,2,0),(2,0,0)]; \mathbf{g}^2 = [(0,3,0),(0,3,2),(2,2,1),(0,2,2)]$	3	96.0	18.0
4	6	$\mathbf{g}^1 = [(0,3,0,2),(2,3,0,2),(2,1,1,1),(2,2,2,0)]$ $\mathbf{g}^2 = [(3,0,2,0),(2,2,0,2),(0,0,3,2),(0,2,2,0)]$	4	64.0	26.0

表 5.2 发射天线数为 2 的基于秩与行列式准则的慢衰落信道的最佳 QPSK STTC

码	状态数	生成序列	秩	行列式
TSC	2	$\mathbf{g}^1 = [(0,2),(2,0)]; \mathbf{g}^2 = [(0,1),(1,0)]$	2	4.0
BBH	2	$\mathbf{g}^1 = [(2,2),(1,0)]; \mathbf{g}^2 = [(0,2),(3,1)]$	2	8.0
最佳	2	$\mathbf{g}^1 = [(0,2),(1,0)]; \mathbf{g}^2 = [(2,2),(0,1)]$	2	8.0
TSC	3	$\mathbf{g}^1 = [(0,2),(2,0)]; \mathbf{g}^2 = [(0,1),(1,0),(2,2)]$	2	12.0
BBH	3	$\mathbf{g}^1 = [(2,2),(2,0)]; \mathbf{g}^2 = [(0,1),(1,0),(2,2)]$	2	12.0
最佳	3	$\mathbf{g}^1 = [(0,2),(2,0)]; \mathbf{g}^2 = [(2,1),(1,2),(0,2)]$	2	16.0
TSC	4	$\mathbf{g}^1 = [(0,2),(2,0),(0,2)]; \mathbf{g}^2 = [(0,1),(1,2),(2,0)]$	2	12.0
BBH	4	$\mathbf{g}^1 = [(0,2),(2,0),(0,2)]; \mathbf{g}^2 = [(2,1),(1,2),(2,0)]$	2	20.0
最佳	4	$\mathbf{g}^1 = [(0,2),(1,2),(2,2)]; \mathbf{g}^2 = [(2,0),(1,1),(0,2)]$	2	32.0
TSC	5	$\mathbf{g}^1 = [(0,2),(2,2),(3,3)]; \mathbf{g}^2 = [(0,1),(1,1),(2,0),(2,2)]$	2	12.0
BBH	5	$\mathbf{g}^1 = [(0,2),(2,3),(0,2)]; \mathbf{g}^2 = [(2,2),(1,0),(1,2),(2,2)]$	2	36.0
最佳	6	$\mathbf{g}^1 = [(1,2),(2,2),(0,3),(2,0)]; \mathbf{g}^2 = [(2,0),(2,0),(1,3),(0,2)]$	2	48.0

例 5.5 (例 5.3 续) 仍考虑一个具有两个发射天线、QPSK 调制的例子。利用例 5.3 给出的空时格型码编码器系数及式 (5.7), 可以写出对应空时格型码生成矩阵为

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

同样对于 (例 5.3) 输入序列  $\mathbf{c} = (10,01,11,00,01,11,10)$ , 则  $t=0$  时刻, 输入序列为  $\tilde{\mathbf{c}}_0 = (1000)$ , 输出为  $\mathbf{x}_0 = (02)$ ;  $t=1$  时刻, 输入序列为  $\tilde{\mathbf{c}}_1 = (0110)$ , 输出为  $\mathbf{x}_1 = (21)$ ;  $t=2$  时刻, 输入序列为  $\tilde{\mathbf{c}}_2 = (1101)$ , 输出为  $\mathbf{x}_2 = (13)$ ;  $t=3$  时刻, 输入序列为  $\tilde{\mathbf{c}}_3 = (0011)$ , 输出为  $\mathbf{x}_3 = (30)$ ; ...。所以得  $\mathbf{x}^1 = \{0, 2, 1, 3, \dots\}$  和  $\mathbf{x}^2 = \{2, 1, 3, 0, \dots\}$ 。

事实上, 由于每次输入为 4bit 0、1 数组, 其所有可能的组合共 16 种, 所以输出的所有可能的状态也共 16 种。本例所涉及的编码器移位寄存器所处状态、当前输入/输出状态转移网格图如图 5.4 所示。其中标识  $c_i^1 c_i^2 / x_i^1 x_i^2$  中  $c_i^1$  和  $c_i^2$  表示当前的输入比特,  $x_i^1$  和  $x_i^2$  表



示当前的输出比特：利用当前的输入比特与编码器移位寄存器状态就构成空时格型码生成矩阵当前的输入比特。这一点很容易通过图 5.4 中的标识予以验证，例如，假设编码器移位寄存器状态为 01，则空时格型码编码器的输入比特组为  $\tilde{c}_i = (10\ 01)$  时，由式 (5.8) 所给定的  $G$ ，得  $\tilde{c}_i G = (1\ 2)$ ，如图 5.4 左边第二行第三列字码 10/12 所示。

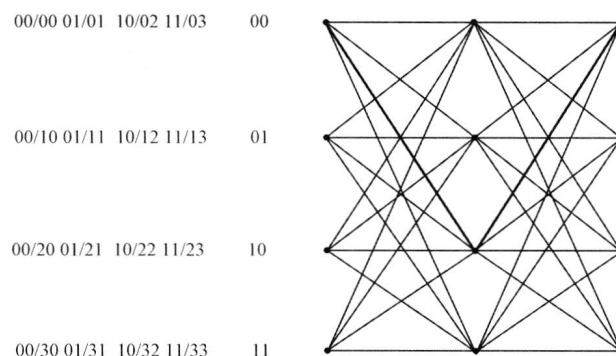


图 5.4 2 发 4 状态 QPSK 调制空时格型码移位寄存器状态输入/输出网络图

若删去图 5.4 中当前输入比特  $c_i^1$  和  $c_i^2$ ，即图 5.4 左边数字列仅留输出项，它与图 5.1 左边数字列完全一致。图 5.1 中左边数字列共有 4 行（状态），每一行有 4 组（分支）数；对应图中左边有 4 个点，每个点有 4 条分支离开。很显然，对于发射天线的第一个阵元，离开某一状态的所有分支都包含了相同的符号（每一行的第一个元素）；而对于第二个阵元，并入某一状态的所有分支都包含了相同的符号（每一列的第二个元素）。这实质是保证满分集应遵循的逻辑规律。

对于具有确定调制方式和确定空时格型码生成矩阵的空时格型码编码方案，空时格型码编码器的输出码组集合是完全确定的，此集合具有星座图概念的完全含义。我们称之为空时格型码编码器的“繁衍星座图”，而将原始调制方案的星座图称为“种子星座图”。我们称空时格型码编码器输出码组集合为“繁衍星座图”有两方面的含义：一方面，因为它是由空时格型码编码器的生成矩阵衍生的；另一方面，它的点数相比原星座图来说有较大的增加。但是，应该注意的是，对于任意时刻编码器的输出而言，由于编码器前一刻的状态是确定的，从检测的意义上来说是已知的，所以，其当前输出的可能的点数就大为减少。如图 5.4 所示，若编码器前一刻的状态是 10，则其可能的输出为 20 21 22 23。考虑到空时格型码编码器的这一性质，我们称由空时格型码编码器前一刻的状态确定的可能输出为“状态驻留星座图”（简称“状态星座图”）。而状态星座图在空时编码调制中的地位与原通信调制在基础通信中的概念是完全一致的。事实上，若种子星座图集合为  $\Omega$ ，则繁衍星座图集合为  $\Omega^{N_T}$ ，而状态星座图集合为  $(\cdot) \times \Omega$ ，其中  $(\cdot)$  为由状态确定的点集合。这一点对于实现和理解解码算法是重要的。

### 5.3 空时格型码的解码算法

对于给定的发射天线阵元数、确定的调制方案和空时格型码生成矩阵，则空时格型码编码器的所有输入序列、输出序列或发射天线发射的信号序列集合是完全确定的。在接收端，若已知信道参数，就可以利用最大似然解码算法实现译码。设第  $m$  个接收阵元接收信号为

$$r_t^m = \sum_{n=1}^{N_T} h_{m,n}^t x_t^n + n_t^m \quad (m=1, 2, \dots, N_R)$$

假设  $n_t^m$  ( $m=1, 2, \dots, N_R$ ) 为高斯加性白噪声，则对应的最大似然译码算法为

$$\min_{\{x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^{N_T}\}} \sum_{m=1}^{N_R} \left| r_t^m - \sum_{n=1}^{N_T} h_{m,n}^t x_t^n \right|^2 \quad (5.9)$$

这个优化问题是必须对所有可能的组合  $(x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^{N_T})$  搜索，也就是在给定空时格型码编码器的繁衍星座图中搜索，求目标函数 (5.9) 的最小值点，这个译码算法称为 Viterbi 算法。其复杂度是随着发射天线阵元数、调制状态数几何增长的。若假设  $(x_{t-1}^1, x_{t-1}^2, \dots, x_{t-1}^{N_T})$  是已知的，则目标函数 (5.9) 的最小值点只需要在状态  $(x_{t-1}^1, x_{t-1}^2, \dots, x_{t-1}^{N_T})$  确定的状态驻留星座图中搜索即可，其复杂度将大大降低，这一点在编程模拟实践中是很重要的。

### 5.4 空时格型码的性能分析

为了分析空时格型码的性能，必须分析它传输到接收机解码器端的成对差错概率，即回到式 (4.63)：

$$\Pr\{C^{(0)} \rightarrow C^{(1)} | H\} = Q\left(\sqrt{\frac{\text{SNR}}{2} (C^{(0)} - C^{(1)})^H (C^{(0)} - C^{(1)}) H H^H}\right)$$

借用上面的符号，将此式改写作

$$\Pr\{x \rightarrow \hat{x} | H\} = Q\left(\sqrt{\frac{\text{SNR}}{2} \sum_{t=1}^L \|H(x_t - \hat{x}_t)\|^2}\right) \quad (5.10)$$

仿照式 (4.66)，有

$$\Pr\{x \rightarrow \hat{x} | H\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2 \sin^2 \theta}\right) d\theta$$

式中， $\xi = \frac{\text{SNR}}{2} \sum_{t=1}^L \|H(x_t - \hat{x}_t)\|^2$  ( $\xi > 0$ ) 是一个随机变量，假设  $p_\xi(\lambda)$  是随机变量  $\xi$  的概率密度函数，则平均成对差错概率为条件成对差错概率关于随机变量  $\xi$  的期望，即

$$\Pr\{\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} p_{\xi}(\lambda) \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sin^2\theta}\right) d\lambda d\theta$$

利用式 (4.69) 中的矩生成函数概念可得平均成对差错概率的表达式 (5.10) (可参考式 (4.71) 或参考文献[6]) 为

$$\Pr\{\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \prod_{n=1}^{N_T} \left[ 1 + \frac{\text{SNR}}{4\sin^2\theta} \|\mathbf{x}^{(n)} - \hat{\mathbf{x}}^{(n)}\|^2 \right]^{-N_R} d\theta \quad (5.11)$$

式中,  $\|\mathbf{x}^{(n)} - \hat{\mathbf{x}}^{(n)}\|^2$  为在同一发射天线阵元发送的符号序列在给定符号周期内的正确符号与差错符号的欧氏距离。由式 (5.11), 当发射天线和接收天线的阵元数一定、信号传输的信噪比给定, 则要使得平均成对差错概率减小, 应该通过空时编码设计, 使从每根发射天线阵元送出的信号在“繁衍星座图”内,  $\|\mathbf{x}^{(n)} - \hat{\mathbf{x}}^{(n)}\|^2$  取得最大值。前面例子给出的空时编码方案使得各个天线之间的信号满足时延关系, 事实证明, 这不是最佳的设计方案。然而不论各个天线发送的信号满足什么关系, 从上面讨论的编码原理, 可以看出是同一比特组在同一时隙通过不同天线阵元完成发送。因此空时格型编码也是一种空时分集发送。

**例 5.6** (例 5.4 续) 对于式 (5.11) 给定的空时格型码生成矩阵  $\mathbf{G}$ , 对应于输入序列 (00 00), 输出序列为 (0 0); 对应于输入序列 (00 10) 或 (10 00), 输出序列为 (2 0) 或 (0 2), 即有状态转移规律 (0 0)  $\Rightarrow$  (0 2)  $\Rightarrow$  (2 0), 如图 5.4 中粗线所示。对于这两种情形, 我们向原星座图做映射, 分别得到编码矩阵为

$$\mathbf{C}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \mathbf{C}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以, 对应编码增益距离矩阵为

$$\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)}) = (\mathbf{C}^{(0)} - \mathbf{C}^{(1)})(\mathbf{C}^{(0)} - \mathbf{C}^{(1)})^H = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

即  $\|\mathbf{x}^{(n)} - \hat{\mathbf{x}}^{(n)}\|^2 = 4$ , 代入式 (5.11), 得平均成对差错概率

$$\Pr\{\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ 1 + \frac{\text{SNR}}{\sin^2\theta} \right]^{-2N_R} d\theta$$

完全类似于式 (4.71) 得

$$\Pr\{\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}\} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\sqrt{\text{SNR}}}{\sqrt{1+\text{SNR}}} \sum_{k=0}^{2N_R-1} \binom{2k}{k} \left( \frac{1}{4 \times (1+\text{SNR})} \right)^k \right] \quad (5.13)$$

由式 (5.12), 式 (5.10) 给定的空时格型码生成矩阵  $\mathbf{G}$  所得到的空时码的增益距离矩阵的行列式、迹、秩分别为 16、8、2。依据第 3 章关于空时编码的设计准则, 我们知道以所给生成矩阵 (5.8) 的  $\mathbf{G}$  得到的空时格型码是满分集、全速率的。比较式 (5.13) 与式 (4.72), 这两个公式几乎完全是相同的, 只是在式 (4.72) 中用参数  $a$  代替此处的参数 SNR, 这是因为式 (5.12) 等同于正交编码的条件。但注意此处的式 (5.13) 是在很特殊的情况下得到的, 而式 (4.72) 是在比较宽泛的条件下得到的。在式 (5.13) 中令  $N_R = 1$ , 得

$$\Pr\{\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}\} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\text{SNR}}{1+\text{SNR}}} \left( 1 + \frac{1}{2 \times (1+\text{SNR})} \right) \right]$$

这与 Alamouti<sup>[9]</sup>设计方案的平均成对差错概率表达式几乎完全一致。这再次说明 Alamouti 方案的优越。图 5.5 所示是式 (5.8) 给定的空时格型码生成矩阵  $\mathbf{G}$  的误比特率曲线与 Alamouti 方案在 QPSK 调制时的误码率曲线。从中可以看出，它们相互吻合地很好。

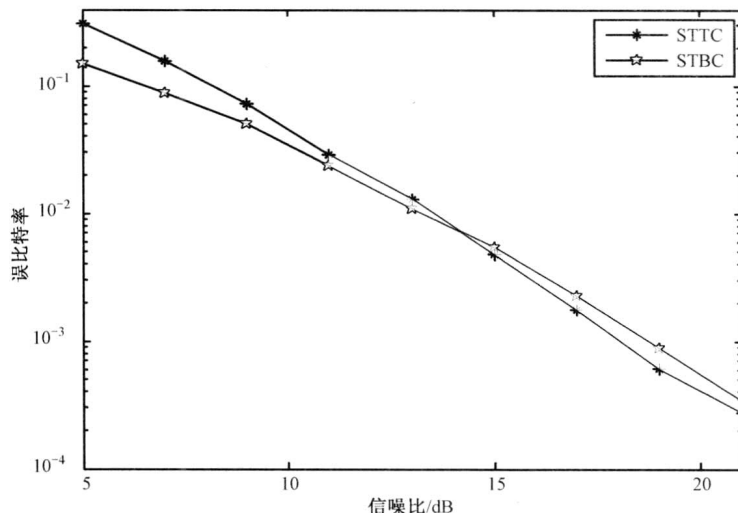


图 5.5 式 (5.8) 给定的空时格型码生成矩阵  $\mathbf{G}$  与 Alamouti 方案在 QPSK 调制时的误码率曲线

## 5.5 空时格型码的设计

在本章的开始，我们说空时格型编码方案是一种综合考虑差错控制编码、调制、信道传输特性、发送—接收分集等因素的一种空时分集编码传输技术。但是，归根结底问题是式 (5.11) 所揭示的，在物理条件确定的前提下，空时编码的根本是在特定的传输速率下最优地降低系统的差错率。因此，根本问题与第 4 章所讨论的空时正交设计一样，也就是遵循第 3 章空时编码的设计准则，就是如何使编码增益距离矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)})$  满秩，且行列式、迹值最大化。例如，在参考文献[1]中，对于发送天线有两个阵元的情形，建议遵循如下两个设计原则（对照图 5.4）以保证满（秩）分集增益传输：

- (1) 从同一状态离去的转移应当在第二个符号有差异；
- (2) 并入同一状态的转移应当在第一个符号有差异。

这是一些简单、基本的设计原则。

至此，我们所讨论的空时格型编码器的结构对篱笆图中的最小状态数附加了一个条件。下面的引理给出为了获得某特定的分集阶数时状态数的一个较低的界。它从一个方面说明状态数与空时格型码的性能的关系。

**引理 5.1** 速率为  $b$  bps/Hz 和分集阶数为  $r$  的空时格型码，至少需要有  $2^{b(r-1)}$  个状态。

**证明** 假设传输速率为  $b$  bps/Hz，这需要从每一个状态引出  $2^b$  个分支(如图 5.4 所示)。

设编码器初始状态为0，则在 $t-1$ 时刻，共发送了 $(t-1)b$ 个码元，对应于从状态0产生了 $2^{b(t-1)}$ 个分支。为了获得分集阶数 $r$ ，当 $t \leq r$ 时，所有这些路径应当是分离的；并且它们中没有一条路径在0和 $r-1$ 状态之间相交于同一个状态。采用反证法，假定存在有两条从状态0出发而在 $t$ 时刻相交的路径，其中 $t < r$ 。选择一对码字 $(C^{(0)}, C^{(1)})$ ，它们包含了到 $t$ 时刻为止的这两路径，以及在 $t$ 时刻以后的这些分支的同一个集合。于是，相应的差错矩阵 $D(C^{(0)}, C^{(1)})$ 仅包含 $t$ 个非零行，所以其秩不可以大于 $t$ 。这与假设自相矛盾。它表明了，在 $t \leq r$ 时刻，所有 $2^{b(t-1)}$ 条路径都应当是相互分离的，所以至少有 $2^{b(r-1)}$ 个状态。

此引理说明，相对较多状态数的空时格型码编码方案，能提供较高的分集阶数，而较高的分集阶数具有较低的成对差错概率。图5.6所示是成对差错概率随信噪比增长的关于几个不同状态数的变化曲线，大的状态数对系统误比特率的改善是明显的。

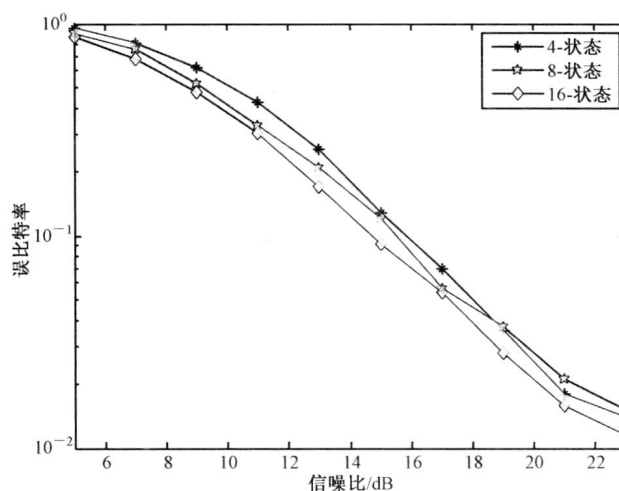


图 5.6 几种不同状态数的误比特率曲线

空时格型编码的特质是它的记忆性。因此，在讨论编码增益距离矩阵 $A(C^{(0)}, C^{(1)})$ 满秩，行列式、迹值最大化时将空时格型编码的记忆特性综合考虑是恰当的。对于一个记忆长度为 $\nu$ 的差错事件，其相应的差错距离矩阵是一个 $N_T \times \nu$ 矩阵，因此空时格型编码增益距离矩阵 $A(C^{(0)}, C^{(1)})$ 的秩是与记忆长度有关的。图5.7所示是空时格型编码秩与行列式和迹准则适用的界限。矩形框中的点是秩与行列式准则适用的情形，而迹准则适用于其他所有情形。所以，秩与行列式准则仅适用于一根接收天线的情形<sup>[5]</sup>。

为进一步说明图5.7所揭示的编码矩阵秩、行列式、迹准则的关系，表5.3给出了QPSK调制、慢衰落信道、两个发射天线阵元情形三种空时格型编码设计方案以及它们的行列式、秩、迹的值。图5.8所示是当接收天线阵元分别为1和4时，对应于这三种编码方案系统的误比特率曲线。当接收天线阵元为1时，系统的误比特率曲线向好的顺序为 $C \rightarrow B \rightarrow A$ ，这时行列式与秩准则起主要作用；而当接收天线阵元为4时，系统的误比特率曲线向好的顺序为 $A \rightarrow C \rightarrow B$ ，这时迹准则起主要作用。对照表5.3中所给参数，就合理完满地解释了图5.8所示的模拟结果。

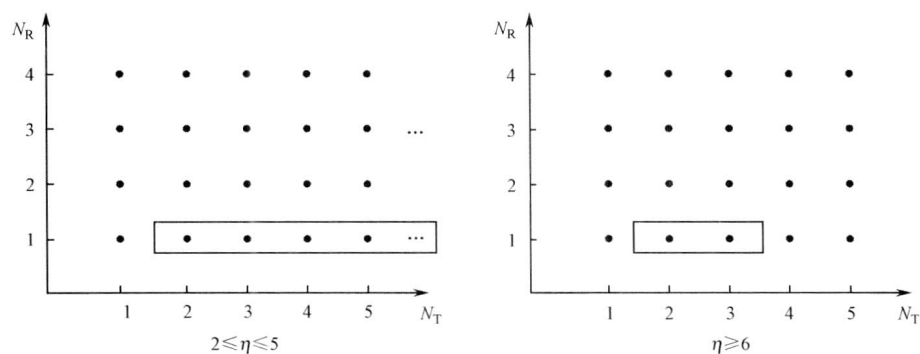


图 5.7 空时格型编码秩与行列式准则由记忆长度确定的适用界限

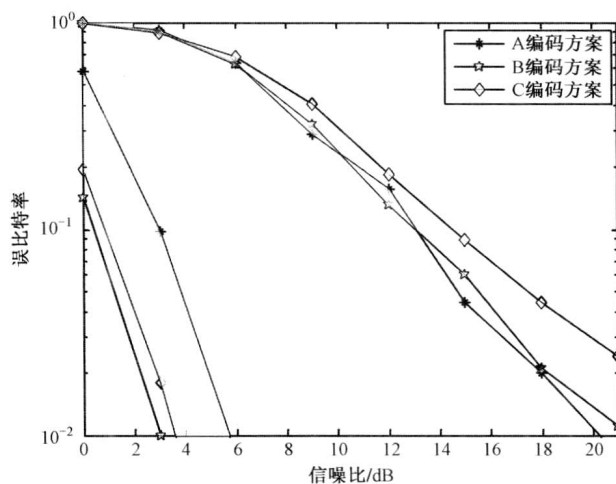


图 5.8 表 5.3 所给编码方案当接收天线阵元等于 1 和 4 时的误比特率曲线

表 5.3 具有两个发射天线的空时格型码性能参数

方案	生成矩阵 $\mathbf{G}$	行列式	迹	秩
A 方案	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	16.0	8.0	2
B 方案	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$	4.0	10.0	2
C 方案	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$	0	10.0	1

对于给定的编码器结构，其系数是通过最小化对应成对差错概率搜索得到的。特别需要注意的是，空时格型码编码器的结构不能保证其编码的几何一致性(Geometrical Uniformity)。此处码的几何一致性是指码的比特几何一致性，而所谓码的比特几何一致性是指其比特差错特性的一致性，即其比特差错率与发送的信号无关，而与其星座图的汉明(Hamming)空间对称性强相关<sup>[1]</sup>。因此，其系数的确定必须对所有可能的成对路径进行搜索。

由于空时格型编码器系数的确定方式,所以一般来说空时格型编码具体方案不但与发射天线阵元数有关,与所适用的设计准则有关,也与所涉及的调制方式有关,与所考虑的传输环境有关。参考文献[5]中有大量的空时格型码编码方案的表格,有相应表格的 Monte Carlo 模拟实验仿真结果,有兴趣的读者可参考。表 5.4 所示是表 5.2 的一部分,它们是 QPSK 调制、适用于慢衰落平坦信道,两个发射天线阵元情形空时格型码的 TSC 编码方案<sup>[1]</sup>和 BBH 编码方案<sup>[2]</sup>以及最优编码方案和它们的行列式、秩的值。

表 5.4 具有两个发射天线的空时格型码及性能参数

	生成矩阵 $G$	行列式	秩
TSC	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	16.0	2
BBH	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$	8.0	2
最佳	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$	8.0	2

图 5.9 所示是当接收天线阵元分别为 1 和 4 时,对应于这三种编码方案系统的误比特率曲线,当接收天线阵元为 4 时,迹数使它们的性能有明显区别。

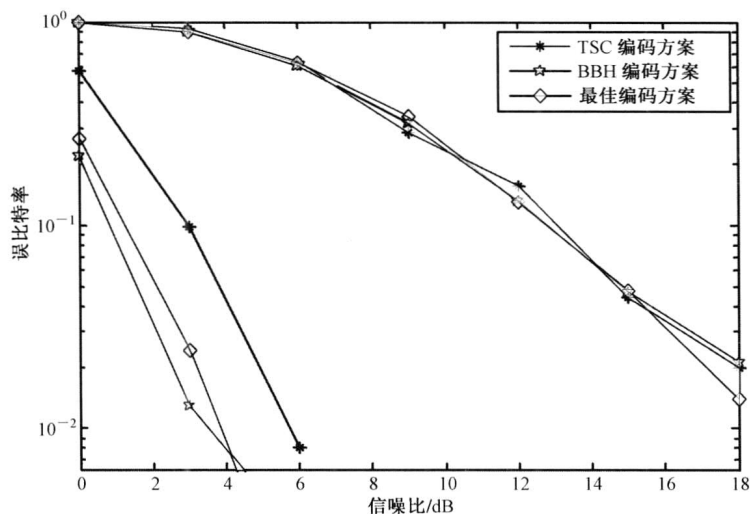


图 5.9 表 5.4 所给编码方案当接收天线阵元等于 1 和 4 时的误比特率曲线

表 5.5 给出了空时格型编码与空时正交编码的一些比较,从中可注意到,对于一个发送天线的 QPSK 调制空时正交编码性能与空时格型编码一致,但是要注意空时正交编码在相同情形的设计是严格受限的。若要满足全速率,只有 Alamouti 方案可行。

表 5.5 空时格型码与空时分组码的比较

空时分组码	空时格型码
无编码增益	有编码增益
具有线性处理特性的最大似然解码	解码复杂性随状态数几何增长
基于正交设计理论的设计原理	难以设计
对于一个发送天线的 QPSK 调制其性能与同情形的空时格型码一致	空时格型码的性能随天线阵元数和格型状态数的增加而改进
易实际应用	相对难以实际应用
当接收天线阵元大于 2 时容量有损失 <sup>[1]</sup>	保持容量与天线阵元数无关

## 5.6 本章要点总结

(1) 空时格型编码器可以用具有模  $M$  加法器的若干个横截滤波器并行支路结构或所谓的生成多项式或相应的生成矩阵表示, 生成矩阵的列矢量表示相应发送天线阵元的编码矢量。所以, 不同发送天线阵元送出的信号实际上是同一比特序列的编码符号。

(2) 空时格型编码器还可以用状态转移“篱笆图”来描述, 空时格型编码器结构呈现一定的篱笆图状态转移规律。例如, 为了获得 2 个发射天线的满分集发送, 相应篱笆图状态转移规律应满足: 从同一状态分叉出的转移其第二个符号应不同; 并入同一状态的转移其第一符号应不同。

(3) 空时格型编码器的设计原理与空时分组编码器最本质的区别是其记忆特性。因此, 必须在考虑其记忆长度的前提下, 应用行列式、秩和迹准则, 根据相应的调制方式, 确定相应的编码器结构, 搜索使成对差错概率最小的编码系数, 完成编码器的设计。

(4) 空时格型编码器输出状态构成所谓的“繁衍星座图”, 其前一时刻的状态能确定其当前可能输出的状态构成所谓的“状态星座图”。

(5) 空时格型码的译码算法是所谓的 Viterbi 译码算法, 它是最大似然解码算法在空时格型码这一特定编码方式下的表达式, 是由 Viterbi 提出的。

(6) 当前时刻的“状态星座图”确定了 Viterbi 译码算法当前搜索的范围。

(7) 空时格型码可获得满空间分集和全速率。

## 练习题

1. 给定编码器系数为  $[(0, 0, 2), (0, 1, 2), (2, 3, 1)]$ ,  $[(2, 0, 0), (1, 2, 0), (2, 3, 3)]$ , 请写出对应的生成矩阵。若假设为 QPSK 调制, 输入比特流为 0110 0011011110, 求从每个发送天线阵元输出的符号流。

2. 对上题所确定的空时格型码编码器生成矩阵, 确定其繁衍星座图。

3. 对于图 5.1 所确定的空时格型码编码器状态转移规律, 设仅有一个发射天线, 且发送的码字在所有的时刻都停留在零状态, 求:

(1) 对于长度为 2 的错误事件, 其成对差错概率公式;

(2) 对于每一个长度为 2 的错误事件, 其相应差错比特数;



(3) 仅考虑长度为 2 的错误事件, 其平均误比特率的近似值。

4. 采用 QPSK 调制的 8 状态谱有效性为 2 bps/Hz 的空时格型码的生成矩阵为

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

确定其编码增益距离为 16。

5. 采用 QPSK 调制的 4 状态谱有效性为 2 bps/Hz 的空时格型码的生成矩阵为

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

确定其编码增益距离为 32。

6. 采用 QPSK 调制的 32 状态谱有效性为 2 bps/Hz 的空时格型码的生成矩阵为

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

确定其编码增益距离为 36。

## 参 考 文 献

- [1] Tarokh V, Seshadri N, Calderbank A R. Space-time codes for high data rate wireless communication: performance analysis and code construction. IEEE Trans.on Information Theory, 1998, 44 (5) : 744–765.
- [2] Baro S, Bauch G, Hansmann A. Improved codes for space-time trellis coded modulation. IEEE Commun. Lett., 2000, 4 (1) : 20–22.
- [3] Ungerboeck G. Channel coding for multilevel/phase signals. IEEE Trans. On Information Theory, 1982, 28 (1) : 55–67.
- [4] Wittneben A. A new bandwidth efficient transmit antenna modulation diversity scheme for linear digital modulation. IEEE International Conference on Communications (ICC) , 1993,3 (5) : 1630–1634.
- [5] Vucetic B, Yuan Jinghong. Space-Time coding. John Wiley & Sons, 2003.
- [6] Jafarkhani H. Space-Time coding: Theory and Practice. Cambridge University Press, 2005.
- [7] Jankiraman M. Space-Time Codes and MIMO System. Artech House universal personal communications series, 2004.
- [8] Tarokh V, Jafarkhani H, Calderbank A R. Space-time block codes from orthogonal designs. IEEE Trans. on Information Theory, 1999,45 (5) : 1456–1467.
- [9] Alamouti S M. A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications. IEEE Journal Select. Areas Commun., 1998, 16 (8) : 1451–1458.
- [10] 邵朝, 官银莹, 申苗. 空时格型码的生成矩阵及检测实现. 北京工业大学学报, 2010 (4) : 7-10.

## 第6章 分层空时编码原理及检测算法分析

### 引言

在第4章和第5章,讨论了空域速率为单位速率或小于单位速率的空时编码方案。这些所谓的多输入多输出(MIMO)空时编码方案相对于单输入单输出(SISO)系统而言没有任何的空间复用增益。只是用多输入多输出(MIMO)空时编码方案来抵抗通信链路的深度衰落。然而实际上它们是具有 $N_T \cdot N_R$ 阶空间分集的系统,这好像有 $N_T \cdot N_R$ 条链路,而实际上只有一辆车在上面跑,而 $N_T \cdot N_R$ 阶的空间分集增益只是能够保证这辆车在偶遇各种各样险情、障碍情况下仍以特定速度前进。

本章将完全利用系统的空间复用增益,实现 $N_T$ 路独立数据流的传输,从而使系统实现 $N_T$ 倍空间速率增长。这个方案是由贝尔实验室的Foschini<sup>[1]</sup>于1996年首先提出的。该方案的原始建议是用于室内或楼宇内固定无线通信网,如室内电器的交互自动控制、各个台式机的数据交换等。一方面由于室内传输距离较短,可以用较宽的频带和较高的传输频率(如原方案建议5GHz);另一方面,室内固定设备可以配备具有较多阵元的阵列天线。另外,室内墙壁纵横交错,电器设备较多且相距较近,因而具有非常复杂的传输环境。而这些正是空间复用技术所需要的。

Foschini<sup>[1]</sup>在他的奠基性工作中提出分层空时结构,他提议利用宽带信道的延迟色散实现信息的传输。而宽带延迟色散如同天然存在于发送端与接收端之间的独立高速路径,这种路径的自然形成取决于传输信号的频率和带宽。因此,我们没有必要采取各种措施使信号之间正交或保证它们相互独立、不相关。但在实际工程中由于复杂的传输环境,这些数据流之间不可能是完全独立的,它们存在一定的相互影响,从而导致所谓的数据流间干扰(Multi-Stream Interference, MSI)现象。

Foschini 分层空时编码结构<sup>[1]</sup>的特点是可以以一维空域处理方法处理多维信号,此方法依赖于接收机具有高效的信号处理功能和一维卷积信道编码。在其原始分层结构中, $N_T$ 路独立数据流通过 $N_T$ 个发射天线阵元在相同的频带、以相同的频率同时发射。而接收机需采用具有 $N_R \geq N_T$ 个阵元的阵列天线来检测和分离这 $N_T$ 个发射信号。分离过程包括干扰抑制和干扰抵消的联合过程。分离后的信号流再由一些专为一维分量码开发的卷积译码算法进行译码,其复杂度相对于最大似然译码算法要小得多。分层空时编码接收机的复杂度随数据速率的增加线性增长。尽管要求接收机需具有 $N_R \geq N_T$ 个阵元,但随着更为先进的检测、译码算法的发现,这一要求可降低为 $N_R \geq 1$ 。

Foschini 分层空时编码结构没有提供显式的发送信号的空间和频率分集增益。当然,它可以通过交织等方式提供时域分集和空域分集。这也是与第4章、第5章讨论过的编码

方案本质区别的地方。空时编码与多输入多输出系统联袂的关键特色是产生发送与接收的空-时-频分集效应，而这恰是分层空时编码结构的短处。

本章主要讨论分层空时编码结构和实现原理，阐释分层空时码流去耦及检测的步骤和方法。还讨论了最大似然估计算法<sup>[14]</sup>、迫零(Zero Force, ZF)算法和最小均方误差(Minimum Mean Square Error, MMSE)等干扰抑制算法<sup>[15]</sup>，以及基于QR分解的迭代干扰抵消算法，并深入地分析了最大似然算法、迫零算法和最小均方误差算法的内在联系和区别。最大似然估计算法由于采用多维搜索获得最优解，所以能实现理论的最大分集增益。迫零算法和最小均方误差算法由于是线性估计算法，因而其分集增益完全取决于接收机阵元数。本章还采用QR分解以迭代方式实现了迫零算法(ZF)和最小均方误差(MMSE)算法。最后，对所讨论的算法进行了计算机仿真模拟。

## 6.1 系统模型和层的概念

如图 6.1 所示为一个具有  $N_T$  个发射天线阵元和  $N_R$  个接收天线阵元的多输入多输出(MIMO)系统，下面考虑频率非选择性的平坦信道且仅接收端具有完全的信道信息。

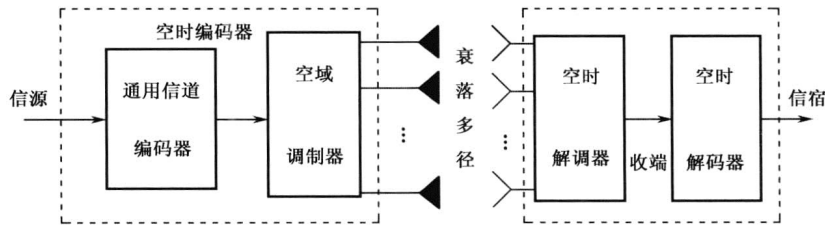


图 6.1 多输入多输出通信系统原理图

从发送端看图 6.1，信源的信息流经一个通用的信道编码器，然后进入空域调制器，调制后的符号流被分割成  $N_T$  个子符号流，分别由  $N_T$  个发射阵元同时、同步地送入无线信道。在信道编码器中，信源的信息流被高度冗余以适应接收端的纠错码处理。为了提高系统的空间复用效率，要求从空域调制器输出的符号流均匀地、等可能地由  $N_T$  个发射阵元发送。因而，在接收端，每一个接收阵元在任意时隙收到的信号是  $N_T$  个被发送符号和环境噪声的线性叠加，即

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{n} \quad (6.1)$$

式中， $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{N_T \times l}$ ； $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^{N_R \times l}$ ； $l$  是所考虑的时隙数或发送信号的帧长；矩阵  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_R \times N_T}$  为信道传输系数； $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{N_R \times l}$  是环境噪声项。

另一个就是后面经常要用所谓“层(layer)”的概念，用下面的定义形式给出。

**定义 6.1**<sup>[4]</sup> 一个层定义为所传输数据符号阵列的一节或一段(section)，它具有这样的性质，在这一节或一段中，一个符号时隙最多只分配给一个发射阵元。

这样定义层是为保证层的空域干扰仅来自层外，即在任意一个符号周期内，接收信号

是来自不同层的符号和加性噪声的叠加，没有同一层符号间干扰。在接收端的干扰抑制、消除等都是不同层间的问题。

假设所考虑的传输数据阵列是数域  $\mathbf{C}^{N_T \times l}$  的子集合，即设传输数据阵列为  $\mathbf{S} \subset \mathbf{C}^{N_T \times l}$ 。 $\mathbf{S}$  中的一个层可以用它的指标集来确定，设  $\mathcal{I}_{N_T}$  表示发射天线阵元指标集， $\mathcal{I}_l$  表示发送数据时隙指标集。 $\mathcal{I}_{N_T} \times \mathcal{I}_l$  为  $\mathbf{S}$  的元素指标集。一个层可以用它的元素的指标集  $\mathcal{L} \subset \mathcal{I}_{N_T} \times \mathcal{I}_l$  来标识。元素对  $(a, t) \in \mathcal{L}$  意味着  $a$  为空间指标，而  $t$  为时间指标。用指标对  $(a, t)$  表征“层”具有对可能有的空时分集的利用能力。

为了更好地理解分层空时码的概念，有必要对空时编码的概念重新梳理。在空时编码的概念中，信道编码、基带调制、分配符号到各个发射阵元整个过程是环环相扣的。从信源输出的是比特组，而信道编码一般是增加冗余过程，它是一个一对一的映射。空域调制器也是一个一对一的“星座图”映射。而对数据流的分层可以在空域调制器前，也可以在其后。

设对集合  $\mathcal{F} = \{0, 1\}$  赋予它一定的运算，使之构成数域。而将长度为  $\kappa$  的  $\{0, 1\}$  数组集合记为  $\mathcal{F}^\kappa$ 。信道编码的码字集合  $\mathbf{C} \subset \mathcal{F}^\mu$  ( $\mu \geq \kappa$ )。所以信道编码的过程为线性映射  $\gamma: \mathcal{F}^\kappa \rightarrow \mathbf{C}$ 。 $b$ -比特基带调制映射  $\eta: \mathcal{F}^b \rightarrow \Omega$ 。 $\Omega$  为复星座图（仅有有限离散点）集合。

令  $\Omega^* = \Omega \cup \{0\}$  表示扩展的复星座图，定义空域调制映射  $f: \mathbf{C} \rightarrow (\Omega^*)^{N_T \times l}$ ，它将维数为  $\mu$  的比特矢量  $\underline{u}$  映射为维数  $N_T \times l$  的复矩阵，即  $\mathbf{S} = f(\underline{u}) \subset \int (\Omega^*)^{N_T \times l}$  为所要发送的空时矩阵。

定义 6.2<sup>[4]</sup> 空时编码由信道编码  $\mathbf{C}$  和空域调制映射  $f$  联合构成，或为  $\gamma$  与  $f$  的复合映射，记为  $\mathcal{C} = f \circ \gamma$ 。

考虑（在空域调制器前做数据流的分层）信道编码映射  $\gamma$  是由作用在  $N_T$  个独立信息流的映射  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N_T}$  复合而成， $\gamma_i: \mathcal{F}^{\kappa_i} \rightarrow \mathcal{F}^{\mu_i}$ ，且  $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_{N_T}$ ， $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{N_T}$ 。根据各个独立映射的维数，对信息矢量做分割，令  $\underline{x} = \underline{x}_1 | \underline{x}_2 | \dots | \underline{x}_{N_T}$ ，各  $\underline{x}_i$  之间是互不交叠的。

$$\gamma(\underline{x}) = \gamma_1(\underline{x}_1) | \gamma_2(\underline{x}_2) | \dots | \gamma_{N_T}(\underline{x}_{N_T}) |$$

长度为  $\mu_i$  的码字  $\gamma_i(\underline{x}_i)$  属于  $N_T$  个互不相交的层中某一层。

为了叙述简单，假设  $\kappa_i = \kappa / N_T$ 、 $\mu_i = \mu / N_T$  对所有  $i$  成立，即交织器的长度、星座图的点数对于所有层而言是相等的这一特殊情况，但结果很容易推广到一般情形。

对应于对信息流和信道编码器的分割，再对空域调制器做分割。设  $f_i: \mathbf{C}_i \rightarrow (\Omega^*)^{N_T \times l}$  表示基于分层  $L_i$  的空域调制器分量，各  $f_i$  复合成  $f$ ，且  $f_i$  将外层元素映射成零元。所以

$$f(\gamma(\underline{x})) = f_1(\gamma_1(\underline{x}_1)) + f_2(\gamma_2(\underline{x}_2)) + \dots + f_{N_T}(\gamma_{N_T}(\underline{x}_{N_T}))$$

空时分层编码结合了编码、调制、分层等一系列过程。由于每一层对空一时资源的使用额度是相同的，所以对于具有维数  $N_T \times l$  的传输矩阵  $\mathbf{S}$ ，对于其任意第  $i$  层  $L_i$ ，必然有总数  $(N_T \cdot l)$  的  $1/N_T$  即  $l$  个元属于  $L_i$ 。另外，每一层的符号元素必然是均匀地分布在各发射天线阵元上，所以第  $i$  层  $L_i$  共有  $l/N_T$  个元素从阵列天线的某一个阵元发射。最后，还应注意传输矩阵  $\mathbf{S}$  的元素  $s_i^n$  或  $s_{n,i}$  是某星座图上的点，角标  $n$  为发射天线的阵元序

( $n=1,2,\dots,N_T$ ), 角标  $t$  为时隙序 ( $t=1,2,\dots,l$ )。

考虑一个分层  $L_i$ , 与之对应信道码  $C_i \in \mathcal{F}^M$  和映射  $\gamma_i$ 。而与信道码  $C_i$  在该层关联的是  $N_T \times l$  维调制符号矩阵  $f_i(\gamma_i(\underline{x}))$ 。为了简化记号, 有时采用  $L=L_i$ ,  $C=C_i$ ,  $\mathbf{g}=\gamma_i$ ,  $f_L=f_i$ , 此处的等号有代替的意义。而用  $\underline{x}$ 、 $\underline{y}$ 、 $\underline{z}$  等表示信息流。

有了对于层的系统认识, 下面来讨论几个重要的分层码的编码原理和分集效应<sup>[2-9]</sup>。

## 6.2 分层空时码的编码结构和原理

关于分层空时码的结构, 从较大的范畴来说主要有两种结构, 一种是水平空时分层编码 (Horizontal Encoding, HE) 结构, 另一种是垂直空时分层编码 (Vertical Encoding, VE) 结构。进一步, 水平空时分层编码还分为对角空时分层码 (Diagonal Layered Space-Time Code) 和线程空时分层码 (Threaded Layered Space-Time Code)。垂直分层编码分为垂直空时分层编码与所谓的垂直 BLAST 结构。BLAST 强调的是接收端的超级信号处理与检测、干扰抑制与剔除、判决与解码算法等类似于码分多址 (CDMA) 系统多用户检测算法的附加设施, 是独立于分层空时编码的处理设备。因此, 衍生出了一系列诸如对角 (D-) BLAST、水平 (H-) BLAST、垂直 (V-) BLAST、线程 (T-) BLAST 等。

下面先介绍水平编码的结构及其原理, 然后再讨论垂直分层编码的结构及其原理。

### 6.2.1 分层空时码的水平编码结构

分层空时码的水平编码结构如图 6.2 所示, 它也被称为水平分层空时码。在这个方案中, 从信源输入的比特流先经过串并变换器被分成  $N_T$  个子数据流, 每一个数据流分别被编码、交织, 然后映射到相应的星座图。所以, 每一个数据流的时域编码是独立进行的。因此, 各层的编码、交织、星座图映射可以是互不相同的。最后, 每一个数据流分别通过“所有”  $N_T$  个阵元发射。

这样水平分层空时码的一个层对应于一个发射天线阵元在确定的时间段输出的数据流, 即层是按发射天线阵元分的。所以它的 (第  $i$ ) 层的定义公式为

$$L_i = \{ \{ ([i-1] \bmod N_T) + 1, t \} : 0 \leq t \leq l \} \quad (6.2)$$

若假设每层的调制速率为  $r_M$ , 编码速率为  $r_C$ , 则系统传输速率为  $N_T r_C r_M$  / 每发射。由于每一个发射数据流信号被  $N_R$  个阵元接收, 因此, 最大空域分集数是  $N_R$ 。所以, 从分集角度, 这是一个次优方案 (因为最优分集数为  $N_T \cdot N_R$ )。在此, 仍然假设发送端无信道信息, 而接收端具有完全的信道信息, 从而能够实现阵列天线增益  $N_R$ 。

例如, 对于  $N_T=4$  的水平分层空时传输码矩阵, 其形式为

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \cdots \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & \cdots \end{bmatrix}$$

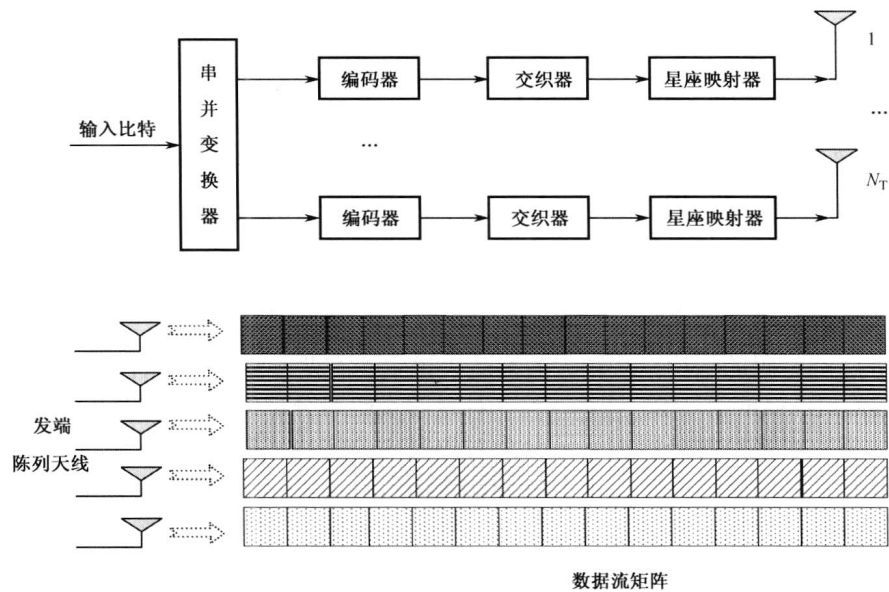


图 6.2 水平分层空时码原理图

发送数据矩阵中的元素  $x_t^n$ ，其中角标  $t$  表示时隙顺序， $n$  表示阵元顺序，即  $n=1,2,\dots,N_T$  表示共有  $N_T$  个发射阵元； $t=1,2,\dots,l$  表示共有  $l$  个发送时隙。 $n$  也代表行序，而  $t$  代表列序。所以水平分层空时码的层是发端传输码矩阵的行矢量，式 (6.2) 表示的正是这个意义。

为了使分集阶数逼近理想的分集阶数  $N_T \cdot N_R$ ，人们相继提出了关于水平分层空时码的两个变形结构，它们分别是对角分层空时码 (Diagonal Encoding, DE) 和线程分层空时码 (Threaded Encoding, TE)。

### 1. 分层空时码的对角分层编码结构

对角分层编码结构也被称为对角编码。如图 6.3 所示为对角分层编码的发送原理。对角分层空时编码的处理方法在开始若干步与水平分层空时编码的处理步骤一样，只是在馈入发射天线前旋转信号流以轮换方式使得比特流与发射天线的结合呈现为周期循环特征。这样，如果一个码字足够长，则可以保证它能历经所有  $N_T$  个发射天线。这个码字就具有  $N_T$  阶发送分集。从图 6.3 可以看出，从第二层开始，每一层前面几个符号置空。这种结构可以方便地消除掉层间干扰。由于接收端信号矢量中只有层间干扰，因此对角分层空时编码方案可以实现无干扰检测。这样看对角分层空时编码在层的设计中引入了解码设计的理念。实际上，分层空时编码本身就与检测算法相关联。只是在现阶段我们将主要精力集中于对编码方案的理解上。

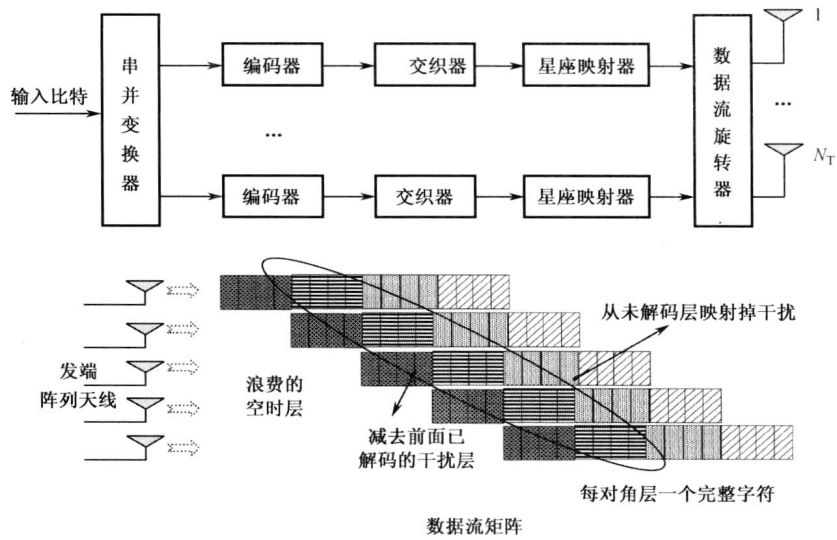


图 6.3 对角分层编码的发送原理

从图 6.3, 对角分层空时编码的 (第  $i$ ) 层的定义公式为<sup>[7]</sup>

$$L_i = \left\{ \left( \left( \lfloor t/\zeta \rfloor \bmod N_T \right) - i + 2, t \right) : (i-1)\zeta \leq t \leq l - (N_T - i)\zeta \right\} \quad (6.3)$$

式中,  $\zeta = \mu/(N_T^2 b)$  表示对角宽度;  $b$  表示星座图点的比特数;  $l = (2N_T - 1)\zeta$  表示层的时域跨度。

图 6.3 中, 从第二层开始, 每一层前面符号置空部分在实际编码传输中这些位置用符号 0 填置。这就说明了为什么前面要定义扩展的复星座图  $\Omega^* = \Omega \cup \{0\}$  和定义空域调制映射  $f: \mathcal{C} \rightarrow (\Omega^*)^{N_T \times l}$  上, 因为在实际的复星座图中是不包含符号 0 的。

在图 6.3 中, 对角分层空时编码将层以空时对角方式分布, 每一组为一个发送符号, 每一层用不同灰度随时间呈螺旋型送入发射天线阵元。这样, 一个码字的不同部分经历不同的传输路径, 使码字的比特差错具有均匀分布特性, 从而实现最佳纠错。在对应的接收端, 采用具有干扰抑制、消除功能的多用户检测技术, 由于对角分层空时编码中, 每一对角层是一个完整字符, 因而可以实现层层解码。

例如, 对于  $N_T = 4$  的对角分层空时码的交织过程可以表示为

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 & x_5^1 & x_6^1 & x_7^1 & \cdots \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 & \cdots \\ 0 & 0 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & x_5^1 & x_5^2 & x_5^3 & \cdots \\ 0 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & x_4^2 & x_4^1 & x_6^2 & \cdots \\ 0 & 0 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & x_4^3 & x_7^1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & x_4^1 & x_2^4 & x_4^3 & x_4^4 & \cdots \end{bmatrix}$$

同样元素  $x_t^n$ ，其中角标  $t$  表示时隙顺序， $t=1,2,\dots$ ； $n$  表示阵元顺序，即  $n=1,2,\dots,N_T$ ，表示共有  $N_T$  个发射阵元。

假设能够采用具有无限长度的高斯码组（Gaussian Code Block），则对角分层空时编码可以获得  $N_T \cdot N_R$  阶的分集增益。当然，这时必须假定接收端具有完全的信道信息。然而实际工程中不可能有无限长度码组，因而有人提出一个称为线程（Threaded）分层空时编码的方案<sup>[2]</sup>。这个方案相对角分层空时编码能进一步将码字在各个发射阵元之间搅混。而且它不像对角分层空时编码要置零来消除层间干扰，这种置零的方式会使发射信号的峰均值比提高而产生一些不利的结果。线程分层空时编码唯一的要求是，在每个符号周期中任何给定分层最多只能通过一个发射阵元发送。

对于线程分层空时编码而言，再也不能像对角分层空时编码那样在接收端的每一个时隙只处理一个分层。因为这时每一个时隙对每一个分层来说，所有其他分层的干扰都存在。所以只能用多分层联合处理的方法。

## 2. 分层空时码的线程编码结构

线程分层空时编码（Threaded Layered Space-Time code, TLST）方案也是水平分层编码的一个变形。如图 6.4 所示，信源信息比特序列先被编码以增加其冗余，然后进入串并变换器进行分割，再分别送入相应星座图映射器，最后经空间交织器送入各阵元发射。由于各层的星座图映射器是独立的，所以层的比特率可以是互不相同的。

在图 6.4 中，每个灰度代表一个线程。每个线程是完整一个码字，以便于在接收端实现层的译码。在图 6.4 所示的数据流阵列中，空时码矩阵的第一列符号无移位，在第二列它们被循环移位一个码元，在第三列它们被循环移位两个码元，……。每层在数据流阵列中像一个螺纹（thread）线样随时间旋转前行。

为了避免层与层之间的干扰，线程分层空时编码要求  $\forall a \neq b$ （发射天线的阵元序），在给定时隙  $t$ ，若指定  $(a,t) \in L_i$ ，则  $(b,t) \notin L_i$ 。为了描述各层对系统空时分集增益的利用情况，定义层的时域和空域“跨距”的概念。例如，对于层  $L_i$  而言，空域跨距等于

$$\max\{a\} - \min\{a\}, \quad \forall (a,t) \in L_i$$

即层空域跨距等于发射“该层”的天线阵元之间的跨距。类似的，其时域跨距等于

$$\max\{t\} - \min\{t\}, \quad \forall (a,t) \in L_i$$

所以，为了充分利用系统空-时分集增益，在一个完整的发送符号周期，每一层应跑遍整个发射天线的阵元。换言之，我们要求每层的空域跨距等于  $N_T$  而时域跨距等于  $l$ （一个符号周期的时隙数）。



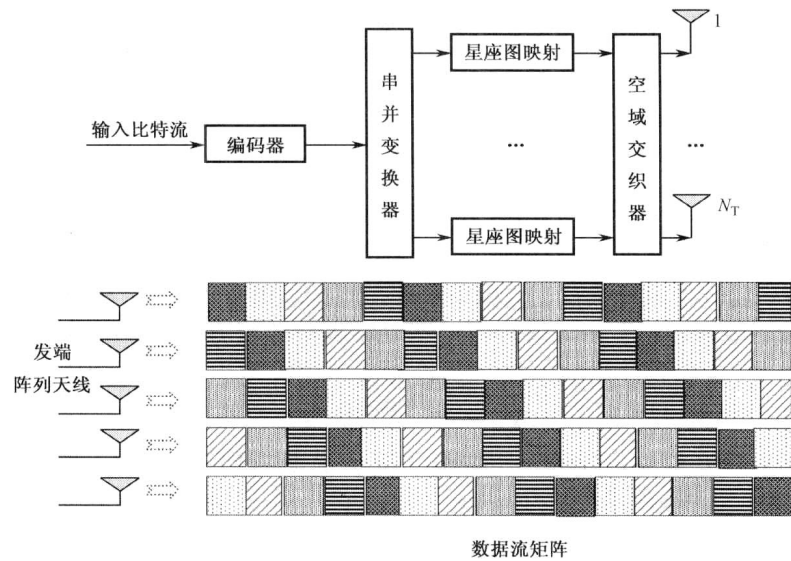


图 6.4 线程分层空时 (TLST) 编码

考虑已经去复用和编码的  $N_T$  个数据流。设串并变换器输入的数据流的长度为  $\kappa$ ，则其输出数据流长度为  $\kappa/N_T$ 。分组编码后，设每个  $N_T$  独立数据流具有长度  $\mu/N_T$ ，其中  $\mu > \kappa$ 。最后，用  $N_T$  个空域调制器（星座图映射器）将编码数据映射成  $N_T \times l$  维矩阵  $\mathbf{A}$ 。 $l$  与  $\mu/N_T$  间的关系是由星座图映射定义的。

定义空时编码矩阵为  $\mathbf{A}$ ， $\mathbf{A}$  包含  $N_T \times l$  个符号，它们在  $l$  个符号时隙内经  $N_T$  个阵元发送。可以通过指定矩阵  $\mathbf{A}$  的元素的指标集来表述每一个分层。设  $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_{N_T}\}$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的特定元素的指标集。依据图 6.4 的结构，线程分层空时编码（第  $i$ ）层用矩阵  $\mathbf{A}$  的元素的指标集来定义的公式为<sup>[2]</sup>

$$L_i = \{((\lfloor t+i-1 \rfloor \bmod N_T) + 1, l) : 0 \leq t \leq l\} \quad (6.4)$$

对于图 6.4 所示的线程空时分层码的编码过程也可以用矩阵结构来表示。设  $\mathbf{x}$  是维数为  $\kappa$  的输入比特组， $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  是  $N_T$  个星座映射器输入的比特码组，设  $\mathbf{M}_j$  是维数为  $\kappa \times bl/N_T$  的比特矩阵， $\mathbf{x}\mathbf{M}_j$  是对应第  $j$  个星座映射器输入的比特码组，所以<sup>[7]</sup>

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{M}_1 | \mathbf{x}\mathbf{M}_2 | \dots | \mathbf{x}\mathbf{M}_{N_T} \quad (6.5)$$

线程空时分层码采用层的编码与交织来最大化可能的分集增益。为了充分利用资源，它要求每层在每个符号区间发送一个符号，且每层等可能均匀地使用空域资源（阵元），即所有层等可能地使用系统资源（时隙一阵元）。如图 6.4 所示，采用“时域序贯”与“空域旋转”的方法使各层符号逐次地经过同一阵元实现时一空域资源的共享，从而赋予发射信号具有满  $N_T$  分集。

例如，对于  $N_T = 4$  的线程分层空时码的交织过程可以表示为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1^1 \rightarrow x_2^1 \rightarrow x_3^1 \rightarrow x_4^1 \rightarrow x_5^1 \rightarrow x_6^1 \rightarrow x_7^1 & \cdots \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 & x_7^2 & \cdots \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 & x_6^3 & x_7^3 & \cdots \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 & x_6^4 & x_7^4 & \cdots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1^1 \searrow x_2^4 & x_3^3 & x_4^2 & x_5^1 \searrow x_6^4 & x_7^3 & \cdots \\ x_1^2 & x_2^1 \searrow x_3^4 & x_4^3 & x_5^2 \searrow x_6^1 & x_7^4 & \cdots \\ x_1^3 & x_2^2 & x_3^1 & x_4^4 & x_5^3 & x_6^2 & x_7^1 & \cdots \\ x_1^4 & x_2^3 & x_3^2 & x_4^1 & x_5^4 & x_6^3 & x_7^2 & \cdots \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

同样矩阵的元素  $x_t^n$ ，其中右下角标  $t$  表示时隙顺序，右上角标  $n$  表示阵元顺序，即  $n=1,2,\dots,N_T$ ，表示共有  $N_T$  个发射阵元； $t=1,2,\dots$  表示相应发送时隙。如式 (6.6) 所示的数据矩阵  $\mathbf{A}$ ，其行矢量称为层，也称为线程，经旋转变换后如式 (6.6) 所示右边的矩阵，将  $\mathbf{A}$  的行矢量变成螺旋状。所以线程分层空时编码也被称为螺旋分层空时编码。

**定理 6.1**<sup>[7]</sup> (线程码的堆栈结构) 假设  $L$  为空域跨度为  $N_T$  的线程层码，给定维数为  $\kappa \times bI/N_T$  二进制矩阵  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{N_T}$ ， $\mathbf{C}$  是维数为  $\kappa$  具有形式  $\underline{\mathbf{x}}\mathbf{M}_1 | \underline{\mathbf{x}}\mathbf{M}_2 | \dots | \underline{\mathbf{x}}\mathbf{M}_{N_T}$  二进制码，其中  $\underline{\mathbf{x}}$  是维数为  $\kappa$  的输入比特组。设  $f_L$  是具有性质  $\eta(\underline{\mathbf{x}}\mathbf{M}_i)$  是在  $I/N_T$  符号周期内由第  $i$  个阵元发送的符号的空域调制器。则对于  $N_T$  个发射阵元和  $N_R$  个接收阵元的多输入多输出系统，由  $\mathbf{C}$  和  $f_L$  构成的空时码在拟静态信道中具有  $d \cdot N_R$  阶的分集增益当且仅当  $d$  为满足下面条件的最大正整数

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_{N_T} \in \mathcal{F}, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{N_T} = N_T - d + 1$$

$$\mathbf{B} = [a_1 \mathbf{M}_1 \ a_2 \mathbf{M}_2 \ \dots \ a_{N_T} \mathbf{M}_{N_T}] \text{ 为域 } \mathcal{F} \text{ 上的行满秩矩阵}$$

**证明** 通过第 3 章至第 5 章的讨论，我们知道，若一个空时编码方案  $\mathcal{C}$  具有  $d \cdot N_R$  阶的分集增益当且仅当对于任意不同的码字空时编码差矩阵的秩为  $d$ 。  $\forall \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{y}}$ ，差  $f_L(\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}})) - f_L(\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{y}}))$  的秩为  $d$  当且仅当它有  $d$  个非零行（下面采用反证的方法）。

假设存在  $a_1, a_2, \dots, a_{N_T} \in \mathcal{F}$ ，满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_{N_T} = N_T - d + 1$ （即  $a_i$  中有  $d-1$  个零元素），而矩阵  $\mathbf{B} = [a_1 \mathbf{M}_1 \ a_2 \mathbf{M}_2 \ \dots \ a_{N_T} \mathbf{M}_{N_T}]$  是非行满秩的。所以，存在  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}^\kappa$ 、 $\underline{\mathbf{y}} \in \mathcal{F}^\kappa$ ， $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{y}}$ ，而  $\underline{\mathbf{x}}\mathbf{B} = \underline{\mathbf{y}}\mathbf{B}$ 。在这种情况下， $f_L(\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}})) - f_L(\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{y}}))$  对于所有的非零系数  $a_i$  具有全零行。由于仅有  $N_T - d + 1$  个非零系数， $f_L(\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}})) - f_L(\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{y}}))$  的秩小于  $d$ ， $\mathcal{C}$  的分集增益小于  $d \cdot N_R$ 。

反之，设  $\mathcal{C}$  的分集增益小于  $d \cdot N_R$ ，则存在  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}^\kappa$ 、 $\underline{\mathbf{y}} \in \mathcal{F}^\kappa$ ， $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{y}}$ ，而基带差  $f_L(\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}})) - f_L(\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{y}}))$  的秩小于  $d$ 。因此，它必至少有  $N_T - d + 1$  个全零行。用指标集  $I_0$  表示具有这些全零行的行指标，令  $i \in I_0, a_i = 1; i \notin I_0, a_i = 0$ ，则矩阵  $\mathbf{B} = [a_1 \mathbf{M}_1 \ a_2 \mathbf{M}_2 \ \dots \ a_{N_T} \mathbf{M}_{N_T}]$  是行奇异矩阵，即必有  $\underline{\mathbf{x}}\mathbf{B} = \underline{\mathbf{y}}\mathbf{B}$ ，而  $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{y}}$ 。

**推论 6.1** 对于具有  $N_T$  个发射阵元，信号星座图大小为  $2^b$ ，分层空域分集增益为  $d$  的线程分层结构码，其最大传输速率为  $b(N_T - d + 1)$  bps/Hz。

**注意：**该推论所谓的最大传输速率与分集增益的关系实质就是通过牺牲传输速率来获得同一信号在发射时具有多个模板以实现空域分集。

对式 (6.5) 所确定的空时码，若它获得的分集增益为  $d \cdot N_R$ ，则  $\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}})$  各节的任意一组满秩线性变换将得到一组具有分集增益为  $d \cdot N_R$  的新的空时分层码。所以，一旦设计出具有分集增益为  $d \cdot N_R$  的分层码，新的具有相同分集增益的分层码是很容易得到的。

结合第4章与第5章的讨论,我们知道,若涉及编码增益,就需在分层码中采用格型码。格型码以解码复杂度的增加换取相应的编码增益。卷积码同样可以获得编码增益。现在,假设采用速率为 $\kappa/N_T$ 的卷积码,编码器将长度为 $\kappa$ 的二进制输入序列变换成长度为 $N_T$ 二进制的输出序列。设二进制输入码组为 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_\kappa(t)$ ,输出为 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_{N_T}(t)$ ,它们经复用构成输出码组。卷积码是用相关联的第 $k$ 个输入 $\{x_k(t)\}$ 和第 $n$ 个输出 $\{y_n(t)\}$ 所给定“脉冲响应” $g_{k,n}(t)$ 描述的。与格型码类似,卷积码的当前输出不仅与当前输入有关,也与若干个(移位寄存器个数)以前的输入有关,因此引入移位变换 $D$ 来分析卷积码是恰当的。若定义序列 $\{x(t)\}$ 的 $D$ -变换为

$$X(D) = x(0) + x(1)D + x(2)D^2 + \dots$$

在 $D$ -域内,编码器可以表示为

$$Y(D) = X(D)G(D)$$

式中, $X(D)$ 、 $Y(D)$ 分别是 $\kappa$ 维和 $N_T$ 维矢量; $G(D)$ 为 $\kappa \times N_T$ 维矩阵,其表达式为

$$G(D) = \begin{bmatrix} G_{1,1}(D) & G_{1,2}(D) & \dots & G_{1,N_T}(D) \\ G_{2,1}(D) & G_{2,2}(D) & \dots & G_{2,N_T}(D) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{\kappa,1}(D) & G_{\kappa,2}(D) & \dots & G_{\kappa,N_T}(D) \end{bmatrix}$$

用 $G_j(D)$ 表示 $G(D)$ 的第 $j$ 列,则 $Y(D)$ 第 $j$ 个元素为

$$Y_j(D) = X(D)G_j(D)$$

**注意:**在空时分层编码结构中,输出 $Y_1(D), Y_2(D), \dots, Y_{N_T}(D)$ 可以直接指定给 $N_T$ 个发射层。以 $G_n(D)$ 代替定理6.1中的 $M_n$ ,则由定理6.1的结论,卷积码和空域调制器 $f_L$ 定义的空时分层码具有分集增益 $d \cdot N_R$ ,其中 $d = N_T - v + 1$ ,而 $v$ 是满足下面关系的最小正整数:

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_{N_T} \in \mathcal{F}, a_1 + a_2 + \dots + a_{N_T} = v, [a_1 G_1(D), a_2 G_2(D), \dots, a_{N_T} G_{N_T}(D)] \text{ 是满秩的}$$

通过选择合适的卷积码的脉冲响应的列矢量,可以设计出满足特定分集增益的空时分层码。将上面的讨论总结为如下定理。

**定理 6.2** 设 $C$ 表示由二进制卷积码 $C$ 和空域调制映射 $f_L$ 构成的空时分层码,对应于 $C$ 的转移矩阵为 $G(D) = [G_1(D), G_2(D), \dots, G_{N_T}(D)]$ 。空域调制映射 $f_L$ 的输出 $Y_j(D) = X(D)G_j(D)$ 沿分层 $L$ 指定给第 $j$ 个阵元。 $\forall a_1, a_2, \dots, a_{N_T} \in \mathcal{F}$ ,定义矩阵 $F(a_1, a_2, \dots, a_{N_T}) = [a_1 G_1, a_2 G_2, \dots, a_{N_T} G_{N_T}]$ 。则空时分层码 $C$ 获得发射分集增益 $d$ 当且仅当 $d = N_T - v + 1$ ,而 $v$ 是使 $F(a_1, a_2, \dots, a_{N_T})$ 为满秩的最小正整数,其中 $a_1 + a_2 + \dots + a_{N_T} = v$ 。

下面是几个与定理6.2有关的例子。

**例 6.1** 考虑具有生成多项式 $G_0(D) = 1 + D^2$ 和 $G_1(D) = 1 + D + D^2$ 的4-状态卷积码,在 $N_T = 2$ 的情形,其对应空时分层码的发射分集增益 $d = 2$ 。

**例 6.2** 当 $N_T = 4$ 时,速率 $2/4$ 的卷积码的生成矩阵为

$$G(D) = \begin{bmatrix} 1+D & 0 & 1+D & 1 \\ 0 & 1+D & D & 1+D \end{bmatrix}$$

显然其任意两列在域  $\mathcal{F}$  上是线性无关的。周期循环地分配编码器的输出作为天线阵元的输出码元得到的空时分层编码的发射分集增益  $d = 3(4 - 2 + 1)$ 。

例 6.3 当  $N_T = 6$  时，速率  $3/6$  的卷积码的生成矩阵为

$$\mathbf{G}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ D & 1 & 0 & D & 1 & 1 \\ 0 & D & 1 & D & D & 1 \end{bmatrix}$$

显然其任意三列在域  $\mathcal{F}$  上是线性无关的。周期循环地分配编码器的输出作为天线阵元的输出码元得到的空时分层编码的发射分集增益  $d = 4(6 - 3 + 1)$ 。

### 6.2.2 分层空时码的垂直编码结构

垂直编码的结构如图 6.5 所示，它也被称为垂直分层空时码。在这个方案中，从信源输出的比特流经编码、交织、映射到星座图，馈入解复用器。经串并变换器分割成  $N_T$  个分支数据流经发射天线阵元发送。该方案蕴含着每个字符等可能地从所有阵元发送。这种方案依据时域编码方式可以有编码增益，依据阵列天线对信道信息的掌握可以有天线增益以及系统空时分集增益。

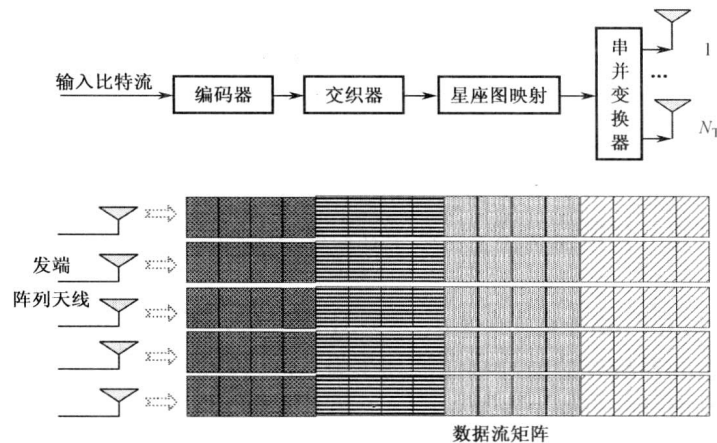


图 6.5 垂直分层空时编码

由于  $N_T$  个分支数据流是并行发送的，所以在接收端，每一时隙的接收信号是  $N_T$  个符号和环境噪声的线性叠加。若接收天线有  $N_R$  个阵元，则系统的分集阶数为  $N_R$ 。但是要实现这个系统分集，必须用最大似然这个多维搜索解码算法，这对于实时通信来说是一个难解的瓶颈。为此，人们采用折中的方法，降低分集增益而将解码算法变为线性检测的方法，这就是所谓的 BLAST 的思想。

BLAST 分层空时编码方案因由贝尔实验室专家提出而得名。他们的思想原理来自于分层空时编码与码分多址 (CDMA) 多用户通信系统的多用户检测、译码技术两方面。或者说，他们从解决分层空时编码的接收端多维搜索问题入手，借用码分多址 (CDMA) 多用户通信系统的多用户检测、译码算法建立了 BLAST 技术。因此，我们将 BLAST 技术总

结为：在收发两端均采用阵列天线，它基于多输入多输出（MIMO）系统的空间分集获得较高的传输速率；在发送端采用分层空时编码同时在每个链路采用与单输入单输出（SISO）系统相同的传输功率和系统带宽，充分利用丰富的多径传输路径实现逼近系统理论容量的传输速率；在接收端通过优化的信号处理、估计技术，采用线性迭代（turbo）解码算法实现系统所有潜在的能力。

这样，从原则上说，BLAST 技术可以与上面讨论过的任何一种分层空时编码方案相结合，从而产生出相应 BLAST 技术。

所谓的垂直分层空时编码 BLAST 技术（V-BLAST），其空时编码结构框图如图 6.6 所示，其系统原理图如图 6.7 所示。从图中可知，信源输出的比特流可以经冗余编码、图 6.6、6.7 时域交织等，然后输入串并变换器，将之分割成  $N_T$  个分支比特数据流，每个子数据流经与之相应的星座图映射器变换后经发射天线阵元发送。有两点是需要特别强调的：一是要有丰富的散射传播路径；另一个是接收端配备有 V-BLAST 专用信号处理、估计和解码设备。

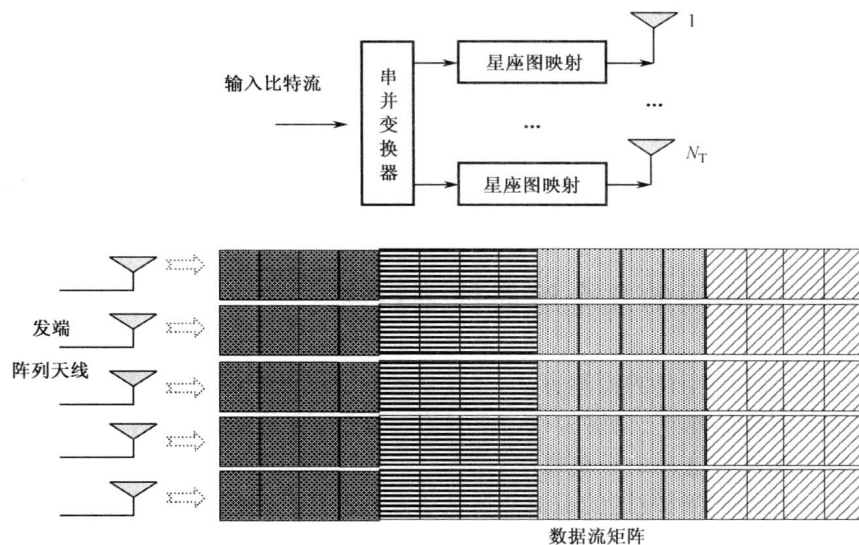


图 6.6 V-BLAST 结构框图

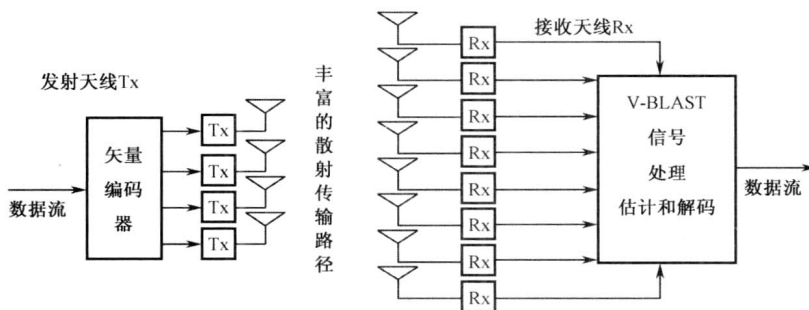


图 6.7 V-BLAST 系统原理图

通过对 V-BLAST 的理解,就不难实现对 BLAST 的其他结构的认识和理解,如 BLAST 与水平分层空时编码相结合的 H-BLAST (Horizontal-BLAST)、BLAST 与线程 (或螺纹) 分层空时编码相结合的 T-BLAST (Threaded-BLAST)、BLAST 与对角分层空时编码相结合的 D-BLAST (Diagonal-BLAST)。

这样,所有问题的根本是对 BLAST 所谓的接收端优化的信号处理、估计技术,线性迭代 (turbo) 的解码算法的原理的认识与理解。它们是下面要讨论的中心议题。

在第 4 章的讨论中,我们最直观地理解发送分集就是发端提供同一符号 (码字) 的多个模板。在第 5 章中,这种直观认识得到提升,虽然发送分集就是发端提供同一符号 (码字) 的多个模板的例子也曾出现过,但当时我们就指出,这种方案不是最优的。格型码通过其内在时空机制,在没有显式提供同一符号 (码字) 的多个模板的前提下实现信号的发送分集。我们可以类似地理解分层空时编码提供发送分集的原理。

与第 4 章、第 5 章讨论过的正交空时编码和空时格型码的检测算法都采用最大似然估计法不同,空时分层编码的每一个编码方案都有与之相应的检测方法,或者说,空时分层编码的设计与其检测算法是融为一体的。所以,原则上,讨论空时分层编码必须同时讨论、分析、说明其检测算法。我们在论述中将它们割裂开,主要是着眼于阶段性主要矛盾的一一解决。下面讨论空时分层编码常用检测算法。

本节所讨论的各种分层技术均侧重于概念描述。严格地讲应结合一定的检测技术综合讨论才能较全面地理解分层码问题。这里采用的是割裂的、各个击破的论述方法。

### 6.3 分层空时编码的几个经典检测算法

本节给出的是几个经典的检测算法,分层空时码的检测解码算法基本上是对它们做一些适合特定编码方案的修正。另外,这几个经典算法具有普遍适用性,几乎所有涉及信号检测与估计的问题都与这几个经典算法有关。

我们知道,空时分层码发送的数据矩阵为  $\mathbf{S} \in (\mathcal{Q}^*)^{N_T \times I}$ ,接收端阵列天线有  $N_R$  个阵元,所以接收信号矩阵为

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (6.7)$$

式中,  $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^{N_R \times I}$ ; 矩阵  $\mathbf{H} \in \mathcal{C}^{N_R \times N_T}$  为信道传输系数,通常都假设其相位服从单位圆上的均匀分布,幅度服从瑞利分布;  $\mathbf{n} \in \mathcal{C}^{N_R \times I}$  为加性噪声,假设其服从白高斯分布。

检测的任务是通过式 (6.7) 估计出  $\mathbf{S}$  的值。若在式 (6.7) 中假设无加性噪声干扰项,就得到一个关于未知变量  $\mathbf{S}$  的线性方程。直观地,依据代数理论  $\mathbf{S}$  要有唯一解当且仅当矩阵  $\mathbf{H}$  是列满秩的,即矩阵  $\mathbf{H}$  的秩应为  $N_T$ ,由于  $\mathbf{H}$  是一个随机矩阵,  $\text{rank}(\mathbf{H}) = \min\{N_R, N_T\}$ ,所以矩阵  $\mathbf{H}$  列满秩的条件转化为  $N_R \geq N_T$ 。虽然从原理上说星座图约束也能对未知变量  $\mathbf{S}$  的线性方程 (6.6) 提供若干独立方程,但约束  $N_R \geq N_T$  不失为一个保证方程 (6.7) 的  $\mathbf{S}$  有确定唯一解的较保守的条件。这样在加性噪声  $\mathbf{n}$  存在时,才能较精确地估计出  $\mathbf{S}$ 。

### 6.3.1 最大似然检测器

最大似然检测器是一个经典、普遍适用的检测算法，在前面各个章节已经反复应用，如第4章正交空时编码的单符号检测、第5章的维特比检测算法等。现在针对式(6.7)来讨论它。假设其中加性噪声  $\mathbf{n}:\mathcal{CN}(0,l\sigma_n^2\mathbf{I}_{N_R})$ ；信道矩阵  $\mathbf{H}$  是随机的，但在考虑的传输符号区间  $l$  内是不变的；所以对矩阵  $\mathbf{S}$  的估计等价于对  $\mathbf{S}$  的各个列矢量分别的估计，在没有增加太多繁复的情况下，下面仍然采用了对矩阵  $\mathbf{S}$  估计的表达式。由上面的假设应有  $\mathbf{r}:\mathcal{CN}(\mathbf{H}\mathbf{S},l\sigma_n^2\mathbf{I}_{N_R})$ ，矩阵  $\mathbf{r}$  的概率密度函数为

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{l\pi}\sigma_n)^{N_R}} \exp\left\{-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{S}\|^2}{l\sigma_n^2}\right\}$$

显然有

$$\max_{\mathbf{S} \in (\mathcal{Q}^*)^{N_T \times J}} \log p(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \min_{\mathbf{S} \in (\mathcal{Q}^*)^{N_T \times J}} \|\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{S}\|^2$$

所以估计得到的  $\mathbf{S}$  为

$$\hat{\mathbf{S}} = \arg \min_{\mathbf{S} \in (\mathcal{Q}^*)^{N_T \times J}} \|\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{S}\|^2 \quad (6.8)$$

最大似然估计的意义在于从扩展星座空间  $(\mathcal{Q}^*)^{N_T \times J}$  中搜索最大可能发送的信号矩阵  $\mathbf{S}$ ，这样对  $\mathbf{S}$  的任何一列的估计其运算量都在  $(N_T)^{N_T}$ 。这是一个非常大的运算量。其简化的快速算法是所谓的球形解码算法<sup>[8]</sup>。

### 6.3.2 迫零（解相关）检测器

迫零（Zero-Forcing, ZF）检测器<sup>[15]</sup>也被称为解相关（Decorrelator）检测器。在矩阵  $\mathbf{H}$  是列满秩的假设下，式(6.7)所示的最小二乘解为

$$\hat{\mathbf{S}} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{r} = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{r} \quad (6.9)$$

式中， $\mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$  表示矩阵  $\mathbf{H}$  的（Moore-Penrose）广义逆<sup>[12]</sup>。 $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}$  存在当且仅当矩阵  $\mathbf{H}$  是列满秩的，即要求满足条件  $N_R \geq N_T$ 。

值得注意的是，式(6.9)实际上是式(6.8)的解。式(6.8)的右边是一个最小二乘问题，即最大似然估计算法在有限样本时蜕化为最小二乘估计问题，迫零检测器是它的解。将式(6.9)代入式(6.7)，得

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (6.10)$$

式中， $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{n}$  是原加性噪声的线性变换，所以不会根本改变其分布特性，对加性高斯白噪声只会改变其分布方差。

若式(6.10)中矩阵  $\mathbf{S}$  是前面建立的空时分层数据，到接收端层间肯定是相互干扰的，但在(6.10)中层间相互干扰是不存在的，或者说将层间相互干扰实现迫零。

在式(6.10)中的加性噪声项  $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{n}$ ，当矩阵  $\mathbf{H}$  条件数较差时，这个变换放大了加性噪声的功率而降低了系统的信噪比，从而影响了迫零检测系统的性能。这是迫零检测器的缺陷。

由式(6.10)，可以得到迫零检测器估计误差方差为

$$E\{\text{tr}[(\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S})^\text{H}(\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S})]\} = E\{\text{tr}[\tilde{\mathbf{n}}^\text{H}\tilde{\mathbf{n}}]\} = \sigma_n^2 \text{tr}[(\mathbf{H}^\text{H}\mathbf{H})^{-1}]$$

式中，因子  $\text{tr}[(\mathbf{H}^\text{H}\mathbf{H})^{-1}]$  就是对加性噪声功率放大的效果。

### 6.3.3 最小均方误差检测器

最小均方误差 (Minimum Mean Square Error) 检测算法也被称为维纳 (Winner) 滤波器，该检测算法有几个等价的叙述，有兴趣的读者可参阅参考文献[15]。这里给出其一种，对于式(6.7)确定的测量(观察)数据  $\mathbf{r}$ ，求矩阵  $\mathbf{X}$ ，使得空时分层数据的估计值为  $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{X}\mathbf{r}$ ，且估计误差的均方值最小，即

$$\min_{\mathbf{X}} |\varepsilon|^2 = \min_{\mathbf{X}} E\left\{\text{tr}\left[(\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S})(\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S})^\text{H}\right]\right\}$$

将  $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{X}\mathbf{r}$  代入，并令  $\partial|\varepsilon|^2/\partial\mathbf{X} = 0$ ，得

$$\hat{\mathbf{S}} = (\mathbf{H}^\text{H}\mathbf{H} + \sigma_n^2\mathbf{I}_{N_T})^{-1}\mathbf{H}^\text{H}\mathbf{r} \quad (6.11)$$

式中， $\mathbf{I}_{N_T}$  是  $N_T$  维的单位矩阵； $\sigma_n^2$  是式(6.7)中加性噪声的功率，这样与式(6.9)相比，式(6.11)意味着接收端不但有信道的全部信息还已知环境噪声功率  $\sigma_n^2$ 。

若接收端已知环境噪声功率  $\sigma_n^2$ ，将式(6.7)变形为

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{S} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (6.12)$$

式中

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \sigma_n\mathbf{I}_{N_T} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

加性噪声项  $\mathbf{w}$  只是与  $\mathbf{n}$  相互独立，或只是对原加性噪声项在维数上做独立扩张使式(6.12)两边在维数上一致。对式(6.12)实施迫零算法或最小二乘估计算法，则得式(6.11)。

由于在式(6.11)的矩阵求逆中包含了环境噪声功率  $\sigma_n^2$  因子，所以最小均方误差检测算法不会放大加性噪声的功率，因而系统没有信噪比损失。这也可以认为是最小均方误差检测算法对迫零算法的缺陷补偿，其代价是要有额外信息(环境噪声功率  $\sigma_n^2$ ) 的掌握。

由最小均方误差检测算法与迫零检测算法的内在关系，可以得到最小均方误差检测算法估计误差方差为

$$E\{\text{tr}[(\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S})^\text{H}(\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S})]\} = E\{\text{tr}[\tilde{\mathbf{n}}^\text{H}\tilde{\mathbf{n}}]\} = \sigma_n^2 \text{tr}[(\mathbf{H}^\text{H}\mathbf{H} + \sigma_n^2\mathbf{I}_{N_T})^{-1}]$$

式中，因子  $\text{tr}[(\mathbf{H}^\text{H}\mathbf{H} + \sigma_n^2\mathbf{I}_{N_T})^{-1}]$  是最小均方误差检测算法对加性噪声功率放大的效果。由于其中的因子  $\sigma_n^2\mathbf{I}_{N_T}$  使矩阵  $(\mathbf{H}^\text{H}\mathbf{H} + \sigma_n^2\mathbf{I}_{N_T})$  的条件数大为改善，从而对加性噪声的功率放大效应减弱。

图 6.8 所示是一个  $4 \times 4$  系统最小均方误差检测算法与迫零检测算法的估计方差曲线随



系统信噪比变化的理论曲线，即在大样本情况下它们比较的结果。我们看到相对迫零检测算法而言最小均方误差检测算法有明显的改善。由于大样本的关系，显现在小信噪比时改善特别突出。

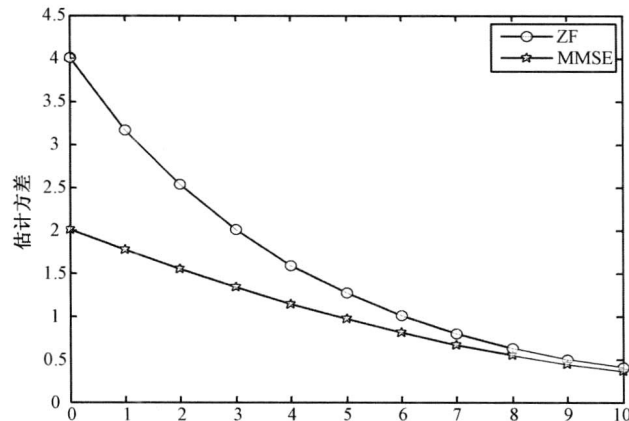


图 6.8 迫零算法与最小均方误差检测的估计方差理论曲线

通过这样的叙述，我们对最大似然算法、迫零估计算法、最小均方误差估计算法的内在机理及外在关联就有一个较全面的认识。再观察一下 (6.9) 和 (6.11) 发送信号  $\mathbf{S}$  的估计值都是一个已知矩阵乘以观察数据  $\mathbf{r}$ ，因此，(6.9) 和 (6.11) 表示的检测算法为线性检测。对于线性检测算法，我们可以用一个通用标准表达式

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{W} \mathbf{r}; \text{ 或 } \hat{s}^n = \mathbf{w}_n \mathbf{r}, \quad n=1,2,\dots,N_T$$

式中， $\mathbf{W}$  为线性估计算子矩阵； $\hat{s}^n$  为  $\hat{\mathbf{S}}$  的第  $n$  层； $\mathbf{w}_n$  为  $\mathbf{W}$  的第  $n$  个行矢量。对于式 (6.9) 和式 (6.11)，相应的线性检测算子分别为  $\mathbf{W} = \mathbf{H}^\dagger$  和  $\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{H}}^\dagger$ 。

### 6.3.4 基于 QR 分解的干扰逐个剔除接收机

基于 QR 分解的干扰逐个（消）除接收机（QR Decomposition Interference Successive Cancellation Receiver-SUC）的实质是对上面所讨论的几个检测算法的一种低复杂度实现。将前面各算法中涉及的系数矩阵求逆之以矩阵 QR 分解，再通过迭代实现信号的检测或估计。在求 QR 分解时，首先根据行矢量的范数排序（从上至下以从小到大为序）。为了简化讨论过程，下面的论述中均没有涉及这个排序问题。

先讨论基于 QR 分解的迫零估计算法，它实际上是解相关算法的一个快速实现。我们注意到检测算法式 (6.8) 是一个多维搜索问题，即是一个非线性检测器。而检测算法式 (6.9) 和式 (6.11) 均涉及到矩阵求逆计算的线性检测器，但当  $N_T$  较大时，它们的计算量都比较大。为了降低算法的运算量，人们提出了一些能快速实现的算法。QR 分解干扰逐个剔除算法就是其中的一个。采用迭代的方法逐个或序贯地消除掉层间的干扰是一个具有普适性思想的方法。

对于式 (6.7) 给定的测量数据  $\mathbf{r}$ , 假设接收端还已知信道信息  $\mathbf{H}$ 。对  $\mathbf{H}$  做 QR 分解, 得  $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{R}$ , 其中  $\mathbf{U} \in \mathbf{C}^{N_R \times N_R}$  是一个酉阵, 而  $\mathbf{R} \in \mathbf{C}^{N_R \times N_T}$  是一个上三角阵, 因为  $N_R \geq N_T$ , 矩阵  $\mathbf{R}$  的  $N_T + 1$  行到  $N_R$  行是全零行, 即  $\mathbf{R}$  具有如下结构<sup>[11]</sup>

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & \cdots & R_{1,N_T} \\ 0 & R_{2,2} & R_{2,3} & \cdots & R_{2,N_T} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_{N_T,N_T} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

对式 (6.7) 两端同乘以  $\mathbf{U}^H$ , 得

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{R}\mathbf{S} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (6.14)$$

式中,  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{U}^H \mathbf{r}$ ,  $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{U}^H \mathbf{n}$ , 是相应矩阵的酉变换。显然在式 (6.14) 中, 对于  $\mathbf{S} \subset (\Omega^*)^{N_T \times l}$ , 它的第  $N_T$  层与其他层没有相关关系, 可以独立地估计出该层。第  $N_T - 1$  层除与第  $N_T$  层有相关关系外与其他层没有相关关系, 但是我们已经得到第  $N_T$  层的估计, 所以可以从第  $N_T - 1$  层将第  $N_T$  层的干扰剔除 (减去), 这样第  $N_T - 1$  层就可以在无层间干扰的情况下实现独立估计。以此类推, 获得各个层的完全独立估计。

设

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & \cdots & R_{1,N_T} \\ 0 & R_{2,2} & R_{2,3} & \cdots & R_{2,N_T} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_{N_T,N_T} \end{bmatrix}$$

且删去  $\tilde{\mathbf{r}}$ 、 $\tilde{\mathbf{n}}$  中与  $\mathbf{R}$  全零行对应的项, 仍记为  $\tilde{\mathbf{r}}$  与  $\tilde{\mathbf{n}}$ 。由于原假设  $\mathbf{H}$  是列满秩矩阵, 所以  $\bar{\mathbf{R}}$  是可逆的, 而上面的层间干扰逐个剔除算法实际上是矩阵  $\bar{\mathbf{R}}$  的求逆过程<sup>[8]</sup>。注意  $\bar{\mathbf{R}}$  的逆同样具有  $\bar{\mathbf{R}}$  的上三角形式。

这样, 可以得到 (准静态信道,  $\bar{\mathbf{R}}$  为常数矩阵) 估计

$$\hat{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{n}}$$

对于快变信道,  $\bar{\mathbf{R}}_t$  为随时间参量  $t$  变化的矩阵, 信号估计可以相应地写成

$$\hat{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{R}}_t^{-1} \tilde{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{n}} \quad (6.15)$$

式中,  $\hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{n}}$  是  $\tilde{\mathbf{n}}$  的一个线性变换, 所以  $\hat{\mathbf{n}}$  仍是  $\mathbf{n}$  的一个线性变换。显然, QR 分解干扰逐个剔除算法也是一个线性检测算法。注意到随机矩阵  $\tilde{\mathbf{n}}$  任意一个分层的分布特性为  $\mathcal{CN}(0, \sigma_{\tilde{n}_k}^2 \mathbf{I})$ , 所以  $\tilde{\mathbf{r}}$  的任意一个分层的分布特性为  $\mathcal{CN}(\mathbf{R}\mathbf{S}, \sigma_{\tilde{n}_k}^2 \mathbf{I})$ , 这样就很容易写出  $\tilde{\mathbf{r}}$  的概率密度函数。进而实现对估计信号矩阵 (6.15) 中  $\hat{\mathbf{S}}$  的概率特性的分析, 最后就可以得到算法性能的理论分析。

现在讨论基于 QR 分解的最小均方误差估计算法, 即最小均方误差算法的快速实现的

相应的层间干扰逐个剔除算法。对式 (6.13) 中的矩阵  $\tilde{\mathbf{H}}$  做 QR 分解, 并依据  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{I}_{N_T}$  的维数对  $\tilde{\mathbf{Q}}$  做分割, 得

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \sigma_n \mathbf{I}_{N_T} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_H \\ \tilde{\mathbf{Q}}_n \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_H \tilde{\mathbf{R}} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_n \tilde{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

显然有  $\tilde{\mathbf{Q}}^H \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{Q}}_H^H \mathbf{H} + \sigma_n \tilde{\mathbf{Q}}_n^H \mathbf{I}_{N_T} = \tilde{\mathbf{Q}}_H^H \mathbf{H} + \sigma_n \tilde{\mathbf{Q}}_n^H = \tilde{\mathbf{R}}$  和式 (6.16) 的块关系  $\sigma_n \mathbf{I}_{N_T} = \sigma_n \tilde{\mathbf{Q}}_n \tilde{\mathbf{R}}$ 。所以  $\tilde{\mathbf{R}}^{-1} = \tilde{\mathbf{Q}}_n$ 。这说明  $\tilde{\mathbf{Q}}_n$  也是一个上三角矩阵。用  $\tilde{\mathbf{Q}}_n^H$  作用于式 (6.12) 两端, 得

$$\tilde{\mathbf{Q}}_n^H \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{Q}}_n^H \mathbf{H} \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{Q}}_n^H \mathbf{n}$$

再利用  $\tilde{\mathbf{Q}}_H^H \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{R}} - \sigma_n \tilde{\mathbf{Q}}_n^H$  得估计值为

$$\hat{\mathbf{S}} = (\mathbf{I}_{N_T} - \sigma_n \tilde{\mathbf{Q}}_n \tilde{\mathbf{Q}}_n^H) \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{Q}}_n \tilde{\mathbf{Q}}_n^H \mathbf{n} \quad (6.17)$$

比较式 (6.17) 与式 (6.15), 我们发现发送信号矩阵的估计值在式 (6.17) 中多了一个修正项  $-\sigma_n \tilde{\mathbf{Q}}_n \tilde{\mathbf{Q}}_n^H \mathbf{S}$ 。

## 6.4 分层空时编码的性能分析

我们研究了几种分层空时码的编码方案, 讨论了分层空时码解码算法中涉及的几个检测算法, 下面从理论上说明分层空时编码的传输性能。

### 6.4.1 水平分层空时码的性能分析

考虑将发送信号  $\mathbf{S}$  错判成信号  $\mathcal{E}$  的成对差错概率为  $\Pr(\mathbf{S}, \mathcal{E})$ 。对应于式 (6.12), 接收信号矩阵  $\tilde{\mathbf{r}} \in \mathcal{C}^{N_T \times L}$ , 发送信号矩阵  $\mathbf{S} \in (\mathcal{Q}^*)^{N_T \times L}$ 。发生这种错判是因为下面事件的发生

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{R}\mathbf{S}\|^2 &> \|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{R}\mathcal{E}\|^2 \\ \|\tilde{\mathbf{n}}\|^2 &> \|\mathbf{R}(\mathbf{S} - \mathcal{E}) + \tilde{\mathbf{n}}\|^2 \end{aligned}$$

即

也就是

$$2 \left\| \operatorname{Re} \{ \mathbf{R}(\mathbf{S} - \mathcal{E}) \tilde{\mathbf{n}}^H \} \right\|^2 \geq \|\mathbf{R}(\mathbf{S} - \mathcal{E})\|^2$$

上式右边是一个常数, 记为  $d_R^2(\mathbf{S}, \mathcal{E})$ 。而左边是一个零均值方差为  $4\sigma_n^2 d_R^2(\mathbf{S}, \mathcal{E})$  的高斯随机变量。所以, 给定  $\mathbf{H}(\mathbf{R})$  的条件成对差错概率为

$$\Pr(\mathbf{S} \rightarrow \mathcal{E} | \mathbf{R}) = 2Q \left( \sqrt{\frac{d_R^2(\mathbf{S}, \mathcal{E})}{4\sigma_n^2}} \right)$$

式中,  $Q(x)$  为误差补函数, 它定义为  $Q(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_x^{+\infty} \exp(-t^2/2) dt$ 。利用第3章熟知的  $Q(x)$  的一致近似逼近,  $Q(x) \leq \exp(-x^2/2)/2$ ,  $x \geq 0$ 。可以得到

$$\Pr(\mathbf{S} \rightarrow \mathcal{E} | \mathbf{R}) \leq \exp \left\{ -\frac{d_R^2(\mathbf{S}, \mathcal{E})}{8\sigma_n^2} \right\}$$

式中,  $d_R^2(\mathbf{S}, \mathcal{E}) = \|\mathbf{R}(\mathbf{S} - \mathcal{E})\|^2$ ;  $\mathbf{S}$ 、 $\mathcal{E}$  是发送信号项;  $\mathbf{R}$  是信道参数, 令  $d_\varepsilon^2 = \|\mathbf{S} - \mathcal{E}\|^2$  为两个码字矩阵的汉明距离 (Hamming Distance)。信道矩阵  $\mathbf{R}$  在准静态情况下是确定性随机变量, 而在快变信道情况下是随机过程。

### 6.4.2 慢衰落信道的性能分析

若信道是慢衰落的, 即  $\mathbf{R}$  是常数随机变量, 所以  $\mathbf{R}_l = \mathbf{R}$ 。这时对于  $\mathbf{R}(\mathbf{S} - \mathcal{E})$  而言, 由于  $\mathbf{S}$  的列数  $l$  相对  $N_T$  来说比较大, 所以差错信号的汉明距离  $d_\varepsilon^2 = \|\mathbf{S} - \mathcal{E}\|^2$  也相对  $N_T$  或  $N_T(N_T + 1)/2$  来说比较大。所以  $d_R^2(\mathbf{S}, \mathcal{E}) = \|\mathbf{R}(\mathbf{S} - \mathcal{E})\|^2$  在 F 范数意义下可以认为是  $d_\varepsilon^2 \cdot N_T(N_T + 1)/2$  个服从标准高斯复随机变量模平方和。

若  $N_T(N_T + 1) \geq 4$ , 利用中心极限定理,  $d_R^2(\mathbf{S}, \mathcal{E}) = \|\mathbf{R}(\mathbf{S} - \mathcal{E})\|^2$  是均值为  $\mu_D = d_\varepsilon^2 N_T(N_T + 1)/2$ 、方差为  $\sigma_D^2 = d_\varepsilon^2 N_T(N_T + 1)/2$  的高斯随机变量。所以参考式 (4.77)

$$\Pr(\mathbf{S} \rightarrow \mathcal{E}) \leq \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{\mu_D^2}{2\sigma_D^2}\right\} \quad (6.18)$$

若  $N_T(N_T + 1) < 4$ , 用高斯随机变量来逼近  $\|\mathbf{R}\|^2$  的条件已经不成立。 $\|\mathbf{R}\|^2$  是自由度为  $N_T(N_T + 1)$  的  $\chi^2$ -分布。

$$\Pr(\mathbf{S} \rightarrow \mathcal{E}) \leq \left(1 + \frac{d_\varepsilon^2}{8\sigma_n^2}\right)^{-N_T(N_T+1)/2} \quad (6.19)$$

### 6.4.3 快衰落信道的性能分析

若设信道是快衰落的, 这时  $\mathbf{R}$  是随时间而变化的随机矩阵, 即随机过程矩阵, 记为  $\mathbf{R}_l$ 。引入变量  $\mathbf{B} = \sum_i \|\mathbf{R}_l(\mathbf{s}_i - \varepsilon_i)\|^2$ , 此处  $d_{\varepsilon_i}^2 = \|\mathbf{s}_i - \varepsilon_i\|^2$  仍然是汉明意义的距离。注意  $\mathbf{s}_i - \varepsilon_i$  现仅有  $N_T$  个符号对。即使  $N_T$  还比较大, 但当汉明距离  $d_{\varepsilon_i}^2$  较小时可能仅存在  $\mathbf{R}_l$  的某一个 (或较少若干个) 行矢量对随机变量  $\mathbf{B}$  有贡献。所以  $d_{\varepsilon_i}^2$  的大小成为  $\mathbf{B}$  满足大数定理的决定性因素。令  $d_R = \min_{\varepsilon_i} d_{\varepsilon_i}^2$ 。且假设  $\mathbf{R}_l$  的元素服从标准高斯分布。

若  $d_R \geq 4$ ,  $\mathbf{B}$  是满足中心极限定理的大数个独立同分布随机变量的和。依据中心极限定理,  $\mathbf{B}$  是高斯随机变量, 具有均值函数  $\mu_B = \sum_i \|\mathbf{s}_i - \varepsilon_i\|^2 N_T(N_T + 1)/2$  和方差函数  $\sigma_B^2 = \sum_i \|\mathbf{s}_i - \varepsilon_i\|^4 N_T(N_T + 1)/2$ 。利用结果

$$\Pr(\mathbf{S} \rightarrow \mathcal{E}) = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma^2\sigma_B^2 - \gamma\mu_B\right\} Q\left(\frac{\gamma\sigma_B^2 - \mu_B}{\sigma_B}\right)$$

式中,  $\gamma = 1/8\sigma_n^2$ , 再利用  $Q(x)$  的一致近似逼近,  $Q(x) \leq \exp(-x^2/2)/2$ ,  $x \geq 0$ 。就可以得到相应成对差错概率为

$$\Pr(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}) = \frac{1}{4} \exp \left\{ -\frac{\mu_B^2}{2\sigma_B^2} \right\} \quad (6.20)$$

若  $d_R < 4$ ，这时中心极限定理的应用条件不满足， $\mathbf{B}$  是自由度为  $N_T(N_T + 1)$  的  $\chi^2$ -分布，成对差错概率为

$$\Pr(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}) \leq \prod_{d_{e_i} \neq 0} \left( 1 + \frac{d_{e_i}^2}{8\sigma_n^2} \right)^{-N_T(N_T+1)/2} \quad (6.21)$$

可以用基本类似的方法分析垂直分层空时码的性能，感兴趣的读者可以参考文献[6]。

## 6.5 信道估计问题

### 1. 信道估计方法<sup>[13]</sup>

在第4章、第5章的分析讨论和仿真模拟中，假设接收端有信道的完全信息。而在实际工程实践中，即使接收端已知信道信息也不可能是完全的，而是通过对信道参数估计获得的。一般来说有两种估计方法。

#### 1) 前置信号法

前置信号法是指在建立通信链路时发送一些特别制定的数据包，通过这些数据包检测和估计信道参数。显然这些数据包越长，对信道参数的估计越准确（但总是存在误差）。很显然，这种方法适用于信道变化较慢的情形，要求在数据传输期间信道维持静态。若信道发生漂移，则需中断数据传输而重新发送定制数据包对信道做检测估计。

#### 2) 导引信号法

在传输信号的帧结构中，有若干比特为收发两端均已知的符号段，称为导引比特；其余部分为信息段，可能还有控制比特等构成一个完整帧。与前一种情况类似，这些导引比特越多，对信道参数的估计也越准确。这种方法适用于信道变化较快的情形。这种方法的缺陷是导引比特在信号的帧结构中要占用一定的份额，需要在信道参数估计精度与信息传输速率之间权衡。

无论前置检测信号还是导引检测信号，统称它们为信道训练序列，简称训练序列。

在讨论的多输入多输出系统中，由于有多条通信链路同时存在，需要估计多条通信链路的参数，就同时存在多个前置信号或导引信号。它们在每一个接收端呈现线性叠加，必须有效地将它们区分开来。而在接收端区分它们最有效的方法是不同阵元发送的信道估计信号——前置信号或导引信号是相互正交的。正交可以有三种实现途径。

### 2. 正交实现途径<sup>[13]</sup>

#### 1) 时域正交

时域正交是指各个阵元在发送训练序列的时间上错开，使接收端仅能收到一个阵元的

信道训练序列，以保证无天线阵元间训练序列相互干扰的发生。

## 2) 频域正交

不同阵元的训练序列占用不同的频带，在接收端配备相应带通滤波器做频率判决来区分。

## 3) 码域正交

给不同阵元配置不同的训练码序列，这些码序列是相互正交的（它们的内积等于零）。

信道的检测估计与信号的检测估计完全是一样的，只是在接收信号中角色发生转换。在信号检测问题中，由于信号是承载信息的，所以它是随机变化的，且它的变化特性是不以人的意志为转移的。而在信道估计中，信号是依据对信道的最佳估计而人为设计的。因此，我们将前者称为“自然信号”，而将后者称为“人工信号”。所以信道参数的检测估计问题有两个方面：一是信道参数的估计；另一个是用以估计信道参数的信号的设计。

假设接收信号的形式为

$$\mathbf{R} = \mathbf{X}\mathbf{S} + \mathbf{n} \quad (6.22)$$

式中， $\mathbf{R}$  为接收信号， $\mathbf{X}$  为要估计的信道参数； $\mathbf{S}$  为发送的已知的训练序列，通常  $\mathbf{S}$  满足总功率约束条件  $\text{tr}\{\mathbf{S}\mathbf{S}^H\} = \mathcal{P}$ ， $\mathbf{n}$  为加性噪声。

## 3. 最小二乘估计算法和最小均方误差估计算法<sup>[13]</sup>

### 1) 最小二乘估计算法

最小二乘估计算法可以用下面的优化问题来表示

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{R} - \mathbf{X}\mathbf{S}\|^2 \quad (6.23)$$

最小二乘估计问题是一个经典的优化问题，它的解是用广义（Moore-Penrose）逆表示的。也可以通过对目标函数关于  $\mathbf{X}$  求导，令导函数等于零得到，即

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{R}\mathbf{S}^H(\mathbf{S}\mathbf{S}^H)^{-1} = \mathbf{R}\mathbf{S}^\dagger \quad (6.24)$$

式中， $\mathbf{S}^\dagger$  是  $\mathbf{S}$  的广义（Moore-Penrose）逆，由于约束条件  $\text{tr}\{\mathbf{S}\mathbf{S}^H\} = \mathcal{P} = \sigma_s^2$  是附加在已知变量  $\mathbf{S}$  上，所以该条件不会对优化问题（6.22）的解形式发生影响。

若  $\mathbf{S}$  是正交的（酉矩阵），则

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^H = (\mathcal{P}/N_T)\mathbf{I}_{N_T} \quad (6.25)$$

所以

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{R}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{X} + \mathbf{n}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{X} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (6.26)$$

式中， $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}\mathbf{S}^{-1}$ 。在通常情况下，都假设  $\mathbf{n}$  为加性高斯白噪声， $\mathbf{n} : \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 \mathbf{I})$ 。则对于  $\mathbf{n}$  经正交滤波后变为  $\tilde{\mathbf{n}}$ ， $\tilde{\mathbf{n}}$  仍服从高斯白噪声分布，且有  $\tilde{\mathbf{n}} : \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 \sigma_s^{-2} \mathbf{I})$ ，其中  $\sigma_s^{-2} = \text{tr}\{(\mathbf{S}\mathbf{S}^H)^{-1}\}$ 。而随机变量  $\tilde{\mathbf{n}}$  的方差就是式（6.26）所表示的估计误差的方差，即  $\text{var}\{\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}\} = \text{var}\{\tilde{\mathbf{n}}\}$ 。所以，对于正交的训练序列，信道参数的估计精度一般来说较高。

将式（6.22） $\mathbf{X}$  的估计问题看成是训练序列  $\mathbf{S}$  的最小二乘设计问题。由式（6.24）和

式 (6.25)，将对应的优化问题写成

$$\min_{\mathbf{S}} E \left\{ \left\| \hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}} - \mathbf{X} \right\|_F^2 \right\}, \text{ 服从 } \text{tr}\{\mathbf{S}\mathbf{S}^H\} = \mathcal{P} \quad (6.27)$$

将式 (6.26) 代入，式 (6.27) 等价于如下的优化问题

$$\min_{\mathbf{S}} \text{tr}\{(\mathbf{S}\mathbf{S}^H)^{-1}\}, \text{ 服从 } \text{tr}\{\mathbf{S}\mathbf{S}^H\} = \mathcal{P} \quad (6.28)$$

而优化问题 (6.28) 的解为  $\mathbf{S}$  应满足式 (6.25)。也可以将式 (6.28) 解释为对训练序列  $\mathbf{S}$  所施加的人工条件。

从  $\mathbf{S}$  满足的最优限制条件 (6.25) 来说， $\mathbf{S}$  的选择自由度是相当大的，而且特别是与接收端无关的。 $\mathbf{S}$  的一个直接的实现是它取自归一化离散傅里叶变换 (DFT) 矩阵的某个子矩阵

$$\mathbf{P} = \sqrt{\mathcal{P}/N_T/M} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_M & \cdots & W_M^{M-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & W_M^{N_T-1} & \cdots & W_M^{(M-1)(N_T-1)} \end{bmatrix}$$

式中， $W_M = \exp\left\{\frac{j2\pi}{M}\right\}$  是离散傅里叶变换的旋转因子。这时最小二乘算法的估计误差

$$\text{var}\{\{\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}\}\} = N_T^2(N_R\sigma_n^2)/\mathcal{P}$$

式中， $\sigma_n^2$  是每个接收阵元的环境噪声功率，而  $N_T^2(N_R\sigma_n^2)$  项充分说明发端与收端阵元数  $N_T$  和  $N_R$  对估计精度的不同影响。

## 2) 最小均方误差估计算法

由前面的讨论已经知道最小均方误差估计也是一个线性检测方法。对应于式 (6.22) 的接收信号，我们将最小均方误差算法对信道的估计表示成

$$\mathbf{H}_{\text{MMSE}} = \mathbf{R}\mathbf{A}_S \quad (6.29)$$

式中，矩阵  $\mathbf{A}_S$  是与发送信号  $\mathbf{S}$  有关的一个矩阵，它满足均方误差最小化问题

$$\mathbf{A}_S = \arg \min_{\mathbf{S}} E \left\{ \left\| \mathbf{H}_{\text{MMSE}} - \mathbf{X} \right\|_F^2 \right\} = \arg \min_{\mathbf{S}} E \left\{ \left\| \mathbf{R}\mathbf{A}_S - \mathbf{X} \right\|_F^2 \right\} \quad (6.30)$$

利用式 (6.22)，展开式 (6.30) 的目标函数，有关系式

$$E \left\{ \left\| \mathbf{R}\mathbf{A}_S - \mathbf{X} \right\|_F^2 \right\} = \text{tr}\{E\{\mathbf{X}^H\mathbf{X}\}\} - \text{tr}\{E\{\mathbf{X}^H\mathbf{X}\}\mathbf{S}\mathbf{A}_S\} - \text{tr}\{\mathbf{A}_S^H\mathbf{S}^H E\{\mathbf{X}^H\mathbf{X}\}\} + \text{tr}\{\mathbf{A}_S^H(\mathbf{S}^H E\{\mathbf{X}^H\mathbf{X}\}\mathbf{S} + \sigma_n^2\mathbf{I})\}$$

记其中  $\mathbf{R}_X = E\{\mathbf{X}^H\mathbf{X}\}$ 。令  $\partial E\left\{\left\|\mathbf{R}\mathbf{A}_S - \mathbf{X}\right\|_F^2\right\}/\partial\mathbf{A}_S = 0$ ，得

$$\mathbf{A}_S = [\mathbf{S}^H\mathbf{R}_X\mathbf{S} + \sigma_n^2\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{S}^H\mathbf{R}_X \quad (6.31)$$

将此结果代入式 (6.29)，得信道参数的最小均方误差估计值为

$$\hat{\mathbf{X}}_{\text{MMSE}} = \mathbf{R}\mathbf{A}_S = \mathbf{R}[\mathbf{S}^H\mathbf{R}_X\mathbf{S} + \sigma_n^2\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{S}^H\mathbf{R}_X$$

最小均方误差估计的性能是用它的估计误差的均方值来刻画的。从它的名称我们知道，在所有估计算法中，它的这个值是最小的。它的表达式为

$$E\left\{\left\|\hat{\mathbf{X}}_{\text{MMSE}} - \mathbf{X}\right\|_F^2\right\} = \text{tr}\left\{\left(\mathbf{R}_X^{-1} + \sigma_n^{-2}N_R^{-1}\mathbf{S}\mathbf{S}^H\right)^{-1}\right\} \quad (6.32)$$

与最小二乘估计问题的训练信号设计问题类似，在约束条件  $\text{tr}\{\mathbf{S}\mathbf{S}^H\} = \mathcal{P}$  下关于信号  $\mathbf{S}$  最小化目标函数 (6.32)，利用 Lagrange 乘子法，得相应乘子与  $\mathbf{S}$  变量的目标函数

$$L(\mathbf{S}, \lambda) = \text{tr}\left\{\left(\mathbf{R}_X^{-1} + \sigma_n^{-2}N_R^{-1}\mathbf{S}\mathbf{S}^H\right)^{-1}\right\} + \lambda\left(\text{tr}[\mathbf{S}\mathbf{S}^H] - \mathcal{P}\right)$$

令  $\partial L(\mathbf{S}, \lambda)/\partial \mathbf{S} = 0$  和  $\partial L(\mathbf{S}, \lambda)/\partial \lambda = 0$  解得

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^H = [(\mathcal{P} + N_R\sigma_n^2\text{tr}\{\mathbf{R}_X^{-1}\})/N_T]\mathbf{I}_{N_T} - N_R\sigma_n^2\mathbf{R}_X^{-1} \quad (6.33)$$

注意在式 (6.33) 中对训练信号  $\mathbf{S}$  还应该附加一个  $\mathbf{S}\mathbf{S}^H$  是半正定的条件，因为矩阵  $\mathbf{S}\mathbf{S}^H$  的特征值代表发送信号的功率，这等价于要求信噪比  $\mathcal{P}/\sigma_n^2$  要足够大，即最小均方误差估计的性能有一个信噪比门限效应。

对于不相关信道，即  $\mathbf{R}_X \rightarrow \mathbf{I}$ ，式 (6.33) 等于式 (6.25)，在不相关信道情形，对于最小均方误差估计而言，训练序列最好（优）也是正交的。

将对训练序列的要求式 (6.33) 代入估计误差的表达式 (6.32) 中，最小均方误差估计的性能表达式为

$$\frac{N_T^2}{\text{tr}\{\mathbf{R}_X^{-1}\} + \mathcal{P}/(N_R\sigma_n^2)} \quad (6.34)$$

为了分析最小均方误差估计的信噪比门限，对矩阵  $\mathbf{R}_X$  做特征分解。令  $\mathbf{R}_X = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^H$ ，则有  $\mathbf{R}_X^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}^H$ ，将此代入式 (6.32)，得

$$\begin{aligned} \text{tr}\left\{\left(\mathbf{R}_X^{-1} + \sigma_n^{-2}N_R^{-1}\mathbf{S}\mathbf{S}^H\right)^{-1}\right\} &= \text{tr}\left\{\left(\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}^H + \sigma_n^{-2}N_R^{-1}\mathbf{S}\mathbf{S}^H\right)^{-1}\right\} \\ &= \text{tr}\left\{\left(\mathbf{A}^{-1} + \sigma_n^{-2}N_R^{-1}\mathbf{U}^H\mathbf{S}\mathbf{S}^H\mathbf{U}\right)^{-1}\right\} = \text{tr}\left\{\left(\mathbf{A}^{-1} + \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}^H\right)^{-1}\right\} \end{aligned} \quad (6.35)$$

式中， $\tilde{\mathbf{S}} = \sqrt{\sigma_n^{-2}N_R^{-1}}\mathbf{U}^H\mathbf{S}$ ，显然有  $\text{tr}\{\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}^H\} = \sigma_n^{-2}N_R^{-1}\text{tr}\{\mathbf{S}\mathbf{S}^H\} = \mathcal{P}/(N_R\sigma_n^2)$ 。在约束条件  $\text{tr}\{\mathbf{S}\mathbf{S}^H\} = \mathcal{P}$  下最小化式 (6.32) 的优化问题等价于在约束条件  $\text{tr}\{\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}^H\} = \mathcal{P}/(N_R\sigma_n^2)$  下最小化式 (6.35) 的优化问题。

为了解此问题，有下面引理，其证明见参考文献[10-12]。

**引理 6.1** 对于任意  $M \times M$  维的矩阵  $\mathbf{A}$ ，有  $\text{tr}\{\mathbf{A}^{-1}\} \geq \sum_{m=1}^M (a_{m,m})^{-1}$ ，其中  $a_{m,m}$  是矩阵  $\mathbf{A}$

的对角元素，等式成立当且仅当  $\mathbf{A}$  是对角阵。

此引理说明，当  $\mathbf{A}$  是对角阵时  $\text{tr}\{\mathbf{A}^{-1}\}$  取得最小值。基于此引理，构造相应的 Lagrange 乘子目标函数，有

$$\begin{aligned} L(\tilde{\mathbf{S}}, \mu) &= \text{tr}\left\{\left(\mathbf{A}^{-1} + \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}^H\right)^{-1}\right\} + \mu\left[\text{tr}\{\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}^H\} - \mathcal{P}/(N_R\sigma_n^2)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{N_T} \left(\lambda_n^{-1} + |\tilde{s}_n|^2\right)^{-1} + \mu \sum_{n=1}^{N_T} \left(|\tilde{s}_n|^2 - \mathcal{P}/(N_R N_T \sigma_n^2)\right) \end{aligned}$$

式中， $|\tilde{s}_n|^2$  是矩阵  $\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}^H$  的对角元素。令  $\partial L(\tilde{\mathbf{S}}, \mu)/\partial \tilde{s}_n = 0$  和  $\partial L(\tilde{\mathbf{S}}, \mu)/\partial \mu = 0$  得



$\tilde{s}_n = \sqrt{(\mu^{-1/2} - \lambda_n^{-1})^+}$ ，即所求的训练序列要满足条件

$$\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}^H = \text{diag}\{(\mu^{-1/2} - \lambda_1^{-1})^+, (\mu^{-1/2} - \lambda_2^{-1})^+, \dots, (\mu^{-1/2} - \lambda_{N_T}^{-1})^+\}$$

式中， $\lambda_n$ 是矩阵 $\mathbf{R}_X$ 的特征值，而 $\mu$ 的取值满足约束关系 $\sum_{n=1}^{N_T} (\mu^{-1/2} - \lambda_n^{-1})^+ = \mathcal{P}/(N_R \sigma_n^2)$ ，这

就是注水算法。它所谓的门限效应就是依据注水算法对信道确定一个标准（门限），满足这个标准，训练信号才向该链路发送检测信号。

而这时最小均方误差估计的性能表达式仍为式（6.34），它与信噪比、发送天线阵元个数、接收天线阵元个数和信道的相关特性的关联关系均在这个表达式中。

## 6.6 计算机模拟实验结果和说明

下面几个图形给出了 V-BLAST 发送系统在几个特定系统情形下的误比特率曲线。图中的每一个点大约都是 15 000 次试验平均结果，在所有模拟试验中没有考虑帧结构，且在这几个模拟试验中均假定加性噪声是服从标准高斯分布的。

图 6.9 所示是一个  $2 \times 2$  具有 QPSK 调制（频谱有效性为  $2 \times 2 \text{bps/Hz}$ ）V-BLAST 发送系统的误比特率曲线。

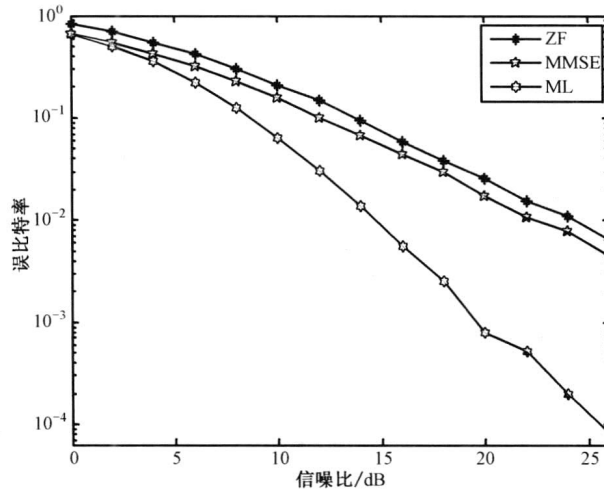


图 6.9 一个  $2 \times 2$  具有 QPSK 调制 V-BLAST 发送系统的误比特率曲线

图 6.9 中的三条曲线分别代表最大似然检测、最小均方误差检测、解相关检测。我们看到，最小均方误差检测和解相关检测的性能曲线基本平行，这说明它们具有相同的空间分集增益，且最小均方误差检测相比解相关检测大约有 2dB 的收益，这可以认为是已知环境噪声功率信息的代价。

从图 6.9 中还看到，最大似然检测相对最小均方误差和解相关检测有更好的性能。这是因为在这种发送方式中，最大似然检测具有  $N_R$  阶空间分集增益，而最小均方误差和解

相关检测只有  $N_R - N_T + 1$  阶空间分集增益。但我们知道，最大似然检测是一个非线性检测器，具有较高的算法复杂度，而最小均方误差和解相关检测是线性检测器，其算法复杂度较低。

图 6.10 给出了一个  $2 \times 2$  具有 16QAM 调制（频谱有效性为  $2 \times 4\text{bps/Hz}$ ）V-BLAST 发送系统的误比特率曲线。从中可以看出，两条曲线几乎是平行的，说明两种检测算法实现相同的分集阶数。

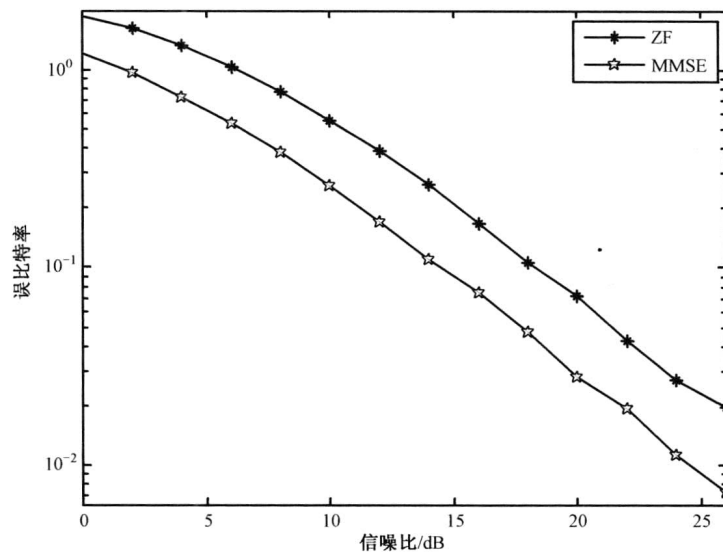


图 6.10 一个  $2 \times 2$  具有 16QAM 调制 V-BLAST 发送系统的误比特率曲线

图 6.11 给出了一个  $4 \times 4$  具有 16QAM 调制（频谱有效性为  $4 \times 4\text{bps/Hz}$ ）V-BLAST 发送系统的误比特率曲线。从中可以看出，两条曲线也是几乎平行的，这时系统吞吐量大于图 6.10 所给情况。

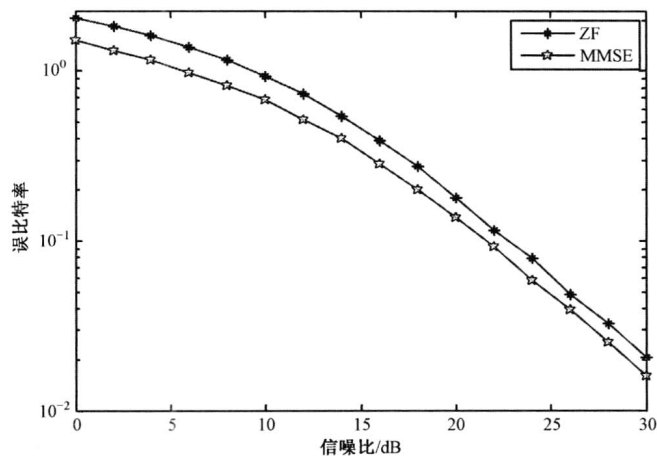


图 6.11 一个  $4 \times 4$  具有 16QAM 调制 V-BLAST 发送系统的误比特率曲线

图 6.12 给出了解相关和最小均方误差检测算法及使用迭代干扰剔除方法时的误比特率曲线。从中可以看出，系统性能有明显的改善。

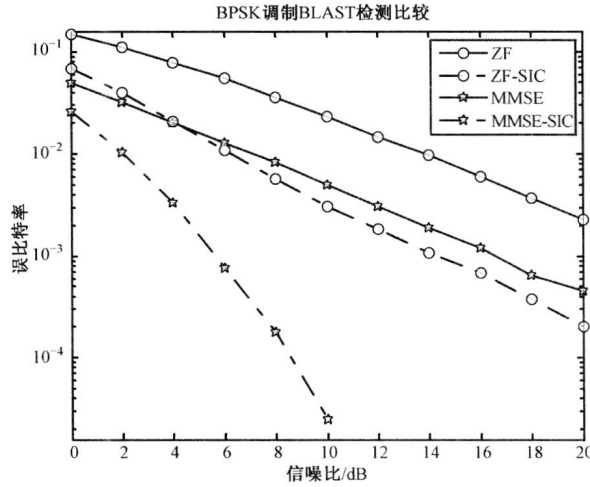


图 6.12 迫零算法与最小均方误差算法逐次干扰剔除时误比特率曲线

图 6.13 和图 6.14 给出了利用长度为 20 的 Hadamard 训练序列对  $2 \times 2$  信道实行最小二乘估计情况下 Alamouti 算法的性能及迫零算法和最小均方误差算法的性能曲线。Hadamard 序列是码域正交的。其中 Alamouti 算法的结果利用了 MATLAB 2009<sup>®</sup>中关于信道估计情形 Alamouti 编码方案的子程序。

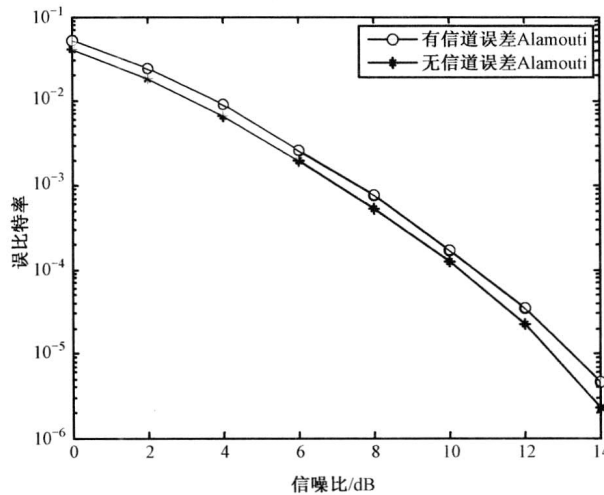


图 6.13 Alamouti 算法在信道估计时误比特率曲线

表 6.1 给出了最大似然检测、最小均方误差检测、解相关检测它们的空间分集阶数、信噪比损失的对比、算法复杂度等，以帮助我们整体理解和掌握这三个较重要的检测算法。

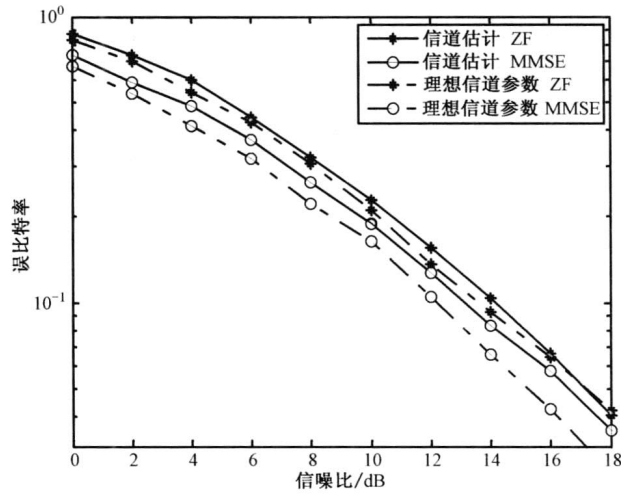


图 6.14 迫零算法与最小均方差算法在信道估计时误比特率曲线

表 6.1 几种检测算法的性能对比

接收机类型	分集阶数	信噪比损失	实现途径 (简化算法)	复杂度
ZF	$\geq N_R - N_T + 1$	较高	线性 (逐次干扰剔除)	线性
MMSE	$\geq N_R - N_T + 1$	低	线性 (逐次干扰剔除)	线性
ML	$N_R$	无损失	非线性	非线性

另外，我们没有给出关于水平分层发送方案的模拟结果，我们认为在不考虑帧结构情况下，大量实验结果统计平均后，本章所讨论的各种各样的发送方案在性能上应该没有本质的区别。但在任何一次实验中，它们是遵从整个理论分析结果的，以及每个发送方案都有其特殊的应用意义。

通过这些理论分析和计算机模拟工作，就能对分层空时编码和 BLAST 有一个比较全面整体的认知。

对于图 6.12 和表 6.1 可以这样来解释<sup>[16]</sup>，设发射天线有  $N_T$  个阵元，接收天线有  $N_R$  个阵元，且  $N_T = N_R$ 。每一个接收阵元收到的信号是  $N_T$  个阵元发射的信号和环境加性噪声的线性叠加。假设接收端将第一个发射天线阵元发送的信号作为期望信号，则其他  $N_T - 1$  个信号都是干扰信号。线性接收机需要  $N_T - 1$  个阵元来抑制这  $N_T - 1$  个干扰信号，因此有  $N_R - (N_T - 1)$  阶的分集增益。

若这个期望信号已经准确地检测，设接收端将在第二个阵元发送的信号为期望信号，这时，线性接收机需要  $N_T - 2$  个阵元来抑制这  $N_T - 2$  个其余的干扰信号。这时就有  $N_R - (N_T - 2)$  阶的分集增益。以此类推，直到所有的发送信号被检测。显然，在这个结构中，主要的分集阶数是  $N_R - (N_T - 1)$ ，它是其他信号能被正确检测的关键环节。

通过模拟结果图表的展示，基本能够说明最大似然算法、解相关算法、最小均方差算法在空时分层编码方案中实现信号检测与估计的性能结果，以及这些算法对于信道估计

问题的应用效果。但是，要全面地理解空时分层编码各种方案的性能，必须结合卷积码或格型编码等前端处理，然后再结合相应分层处理，应用各种检测算法，从系统吞吐量、误码率等方面进行模拟分析、总结。而对信道参数估计，也必须通过设计相应的时域正交、频域正交、码域正交的导频信号，利用最小二乘、最小均方误差等估计算法，再结合前面讨论过的各种编码方案进行传输与信道参数估计相结合，通观系统各种性能指标进行分析。这样才能达到一个较好的认识。所以，目前的工作只能是一个初步的。

## 6.7 本章要点总结

(1) 分层结构主要有水平分层与垂直分层。在水平分层中有对角分层与线程分层。在垂直分层中有 D-BLAST 和 V-BLAST。BLAST 技术的关键是同时考虑了接收端信号处理、估计和解码算法。

(2) 线程分层发送方案的空-时分集与编码矩阵的空-时跨距有关，也与编码矩阵的秩有关，或者说线程分层发送方案有特殊的帧结构，或者说线程分层发送方案类似于将阵列天线信号处理技术与第 4 章和第 5 章所讨论的空时编码技术相结合的产物。

(3) 空间复用通过收发端的阵列天线结构增加系统吞吐量，而非用于提供信号的多个模板以增加信号的空间分集增益。接收天线阵元数  $N_R$  一般要求大于或等于发射天线阵元数  $N_T$ ，这一要求一方面能增加系统的空间分集增益，另一方面作为较简单的线性估计的基本要求。

(4) 接收端信号处理估计解码算法主要有最大似然检测算法、最小均方误差检测和解相关检测算法。

(5) 最大似然检测算法是通过星座图搜索获得信号估计，其简化的算法为“球形”解码算法。

(6) 最小均方误差检测、解相关检测是线性检测算法。最小均方误差相比解相关检测需要已知环境噪声功率。而解相关检测具有放大加性噪声功率的缺陷，最小均方误差则没有。

## 练习题

1. 分析建立接收信号式 (6.6) 的概率密度函数的表达式。
2. 根据接收信号式 (6.6) 的概率密度函数的表达式推导对应的最大似然估计的表达式。
3. 利用最小二乘拟合准则求当信道参数矩阵  $\mathbf{H}$  已知时，信号矩阵  $\mathbf{S}$  的估计式。
4. 对于迫零算法估计式 (6.9) 求对应加性噪声的概率密度函数的表达式。
5. 对于最小均方误差估计式 (6.10) 求对应加性噪声的概率密度函数的表达式。
6. 试推导式 (6.12) 干扰逐个剔除算法中某第  $k$  行的剔除过程。
7. 给定一个有限长编码方案说明对角分层与水平分层之间的区别。
8. 给定一个有限长编码方案及确定发射阵列天线，写出线程空时分层码编码矩阵。
9. 举例说明 V-BLAST 编码方案。

## 参 考 文 献

- [1] Foschini G. Layered Space-Time Architecture for Wireless Communication in a Fading Environment When Using Multielement Antennas. Bell Labs Technical Journal, Autumn 1996: 41–59.
- [2] Gamal H E, Damen M O. Universal Space-Time Coding. IEEE Trans on IT, 2003, 49 (5) : 1097-1119.
- [3] Foschini G J, Chizhik D, Gans M J, et al. Analysis and Performance of Some Basic Space-Time Architectures. IEEE Journal on SAC, 2003,21 (3) : 303-319.
- [4] Loyka S, Gagnon F. Performance Analysis of the V-BLAST Algorithm: an Analysis Approach. IEEE Trans on WC, 2004, 3 (4) : 1326-1340.
- [5] Matache A, Wesel R D. Universal Trellis Codes for Diagonally Layered Space-Time Systems. IEEE Trans on SP, 2003, 51 (11) : 2773-2783.
- [6] Sellathurai M, Foschini G J. Stratified Diagonal Layered Space-Time Architectures: Signal Processing and Information Theoretic Aspects. IEEE Trans on SP, 2003, 51 (11): 2943-2954.
- [7] amal H E, Hammons A R. A New Approach to Layered Space-Time Coding and Signal Processing. IEEE Trans. Inf. Theory, 2001, 47 (6) : 2321–2334.
- [8] olden G D, et al.. Detection Algorithm and Initial Laboratory Results Using the V-BLAST Space-Time Communication. Electronic Letters, 1999, 35 (1) : 14–16.
- [9] irmanto W, et al. Layered Space-Time Coding: Performance Analysis and Design Criteria. Globecom 2001, Vol. 2, November 2001: 1083–1087.
- [10] trang G. Linear Algebra and Its Applications. 3rd edition. Fort Worth, TX: Saunders College Publishing, Brace Jovanovich College Publishers, 1988.
- [11] lub G, Van Loan C. Matrix Computations. 2nd edition. Baltimore, MD: John Hopkins University Press, 1989.
- [12] Kay S M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.
- [13] Biguesh M, Gershman A B. Training-Based MIMO Channel Estimation: A Study of Estimator Tradeoffs and Optimal Training Signal. IEEE Trans on SP, 2006, 54(3): 884-893.
- [14] 邵朝, 卢光跃, 保铮. 结合交替分离 (AS) 和交替投影 (AP) 算法的 ASAP 算法. 中国科学 E 辑, 2004, 34 (4): 448-456.
- [15] 邵朝, 卢光跃. 几种主要的线性检测器及性能分析. 系统工程与电子技术, 2001, 23 (9): 12-15.
- [16] Tarokh V, et al. Combined Array Processing and Space-Time Coding. IEEE Trans. on Inform. Theory, Vol. 45, May 1999: 1121–1128.
- [17] Jacobson N. Basic Algebra, II. W. H. Freeman and Company, 1980.

## 第7章 准正交空时分组码和最小解码复杂度分析

### 引言

通过前面第4章的讨论可以看出,自从 Alamouti 空时编码方案提出后,正交空时分组码(OSTBC)得到了广泛的关注<sup>[1-10]</sup>。正交空时分组码有两个显著的优点,一是最简单的、可分离、相互独立的最大似然译码——以单个复符号为单元的最优化解码;二是具有满空时分集特性。其问题或缺陷也是很明显的,事实上,就复信号的星座图而言,速率为1的正交设计仅存在 Alamouti 方案中。对于三根以上的发射天线,复正交设计的空时分组码最高传输速率为 $3/4$ <sup>[15]</sup>。若码字的速率 $R$ 为全速率,表明不引起任何的带宽扩展,而速率 $R$ 小于1,则意味着有 $1/R$ 的带宽扩展。因此非全速率空—时码必然引起频谱扩展,这显然与下一代无线通信系统空中接口端不能引起任何的带宽扩展的技术要求是不相容的。因此,这种设计缺陷限制了 OSTBC 在工程实际中的应用。

为提高复符号的符号速率,人们将正交空时分组码码字间的正交性放宽为准(拟)正交性,如 Sharma-Papadias<sup>[21]</sup>、Jafarkhani<sup>[22]</sup>、Tirkkonen-Boariu-Hottinen<sup>[23]</sup>和 Papadias-Foschini<sup>[24]</sup>,它们分别被称为 SP-型、J-型、TBH-型、PF-型准(拟)正交空时分组码,简记为 QOSTBC (Quasi-Orthogonal Space-Time Block Coding)。它们松弛了正交空时分组码编码矩阵各列之间的正交性,以牺牲部分分集增益来换取传输速率的提高。这种松弛同时也些许增加了最大似然译码算法的复杂度。事实上,原始的准正交空时分组码<sup>[22-24]</sup>都不具有满分集特性。例如,对于具有4个发射天线阵元的准正交空时分组码,其分集阶数仅为2,同时其对应的最大似然译码算法皆为两个符号的联合解码。

为弥补准正交空时分组码在空时分集方面的损失,同时能够尽力保持相应最大似然译码算法的复杂度,参考文献<sup>[24-27]</sup>分别独立地提出了基于成对符号(pair-wise)最大似然译码复杂度的所谓信息符号旋转准正交空时分组码(Rotating Symbol Quasi-Orthogonal Space-Time Block Coding)。进一步,Su-Xia<sup>[26]</sup>在分集最大化意义下,关于任意正方形格点星座图或等边三角形格点星座图,建立了相应最优旋转角分别为 $\pi/4$ 和 $\pi/6$ 。在 Su-Xia<sup>[26]</sup>的方法中,有一半的复信息符号被旋转。同时,Su-Xia<sup>[26]</sup>也证明了满足最优复符号旋转角的 QOSTBC 编码方案相对于所有复符号的线性变换而言具有最大分集增益。

进一步,Yuen-Guan-Tjhung<sup>[32-33]</sup>提出了不同的复信息符号旋转 QOSTBC 编码方案,此方案不但具有满分集增益,而且对应的最大似然译码算法具有实成对符号解码复杂度,且求出对于正方形或矩形 QAM 调制星座图的最佳旋转角为 $\arctan(1/2)/2 = 13.2825^\circ$ 。YGT-型 QOSTBC<sup>[32-33]</sup>方案的获益是将 QOSTBC 方案的复成对符号最大似然译码解码复杂度简化为

实成对符号最大似然译码解码复杂度，但它相对于 Su-Xia<sup>[26]</sup>的 QOSTBC 方案在空时分集增益上有些许轻微的损失。

为了借助 QOSTBC 编码方案来提高 OSTBC 编码方案的传输速率, Khan-Rajan 等<sup>[28-31]</sup>将经过虚部循环交织的 OSTBC 编码矩阵放置在 QOSTBC 编码矩阵的对角线上, 同时联合地选择对角线上所有 OSTBC 编码的信息符号, 此编码方案被称为坐标交织正交设计 (Coordinate Interleaved Orthogonal Design, CIOD)。可以证明, 对于正方形 QAM 调制星座图, 坐标交织正交设计编码方案能够获得满分集增益以及具有最小译码复杂度——实成对符号最大似然解码。其缺陷是因为在非对角块处以零符号元发送, 所以系统峰均值比较高。

本章将系统性地讨论具有满分集增益和实成对符号最大似然解码复杂度的 QOSTBC 编码方案所涉及的复信息符号的线性变换。并将建立具有实成对符号最大似然解码的 QOSTBC 方案复信息符号的线性变换所满足的充分条件或充分必要条件; 以及具有实成对符号最大似然解码、对于正方形和矩形 QAM 调制星座图而言能获得最优分集增益的 QOSTBC 方案的最佳线性 (但可能不是旋转或正交的) 变换矩阵。还将建立坐标交织正交设计 (CIOD) 关于一般矩形 QAM 调制星座图具有最佳分集增益的最优线性符号变换。在同一发送物理环境假设下, 最优符号线性变换的 QOSTBC 编码方案与坐标交织正交设计编码方案具有相同的实成对符号最大似然译码解码复杂度和相同的最大分集增益。然而由于坐标交织正交设计编码方案中有零符号, 因而具有比较高的峰均值比 (PAPR)。本章最后也给出了一些模拟结果, 在丰富读者的感性认知的同时也增强理论叙述的可信度。

## 7.1 拟 (准) 正交空时分组码的传输模型

假定基带系统有  $N_T$  根发射天线和  $N_R$  根接收天线, 则系统模型可定义为

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\frac{\rho}{N_T}} \mathbf{C} \mathbf{H} + \mathbf{W} \quad (7.1)$$

式中,  $\mathbf{C} \in \mathbf{C}^{T \times N_T}$  为  $T \times N_T$  的发送符号码字矩阵, 通常假设传输符号矩阵能量满足约束条件  $E\{\|\mathbf{C}\|_F^2\} = T \cdot N_T$ , 此处  $E\{\cdot\}$  是期望算子;  $\mathbf{H} \in \mathbf{C}^{N_T \times N_R}$  为准静态的慢衰落瑞利信道, 其中元素  $h_{n,m}$  为第  $m$  根接收天线到第  $n$  根发射天线的路径衰落系数, 一般均假设元素  $h_{n,m}$  为独立同分布零均值、每一实维方差为 0.5 的复高斯随机变量, 即元素  $h_{n,m}$  为循环对称复高斯随机变量。一般均假设元素  $h_{n,m}$  在传输符号的一帧内是不变的, 而在不同帧内是变化的, 即信道为准静态的。  $\mathbf{W} \in \mathbf{C}^{T \times N_R}$  为噪声矩阵, 其元素是服从均值为 0, 每一实维的方差为 0.5 的复高斯随机变量。  $\mathbf{Y} \in \mathbf{C}^{T \times N_R}$  为接收矩阵, 其元素  $y_{p,q}$  为第  $q$  根天线在  $p$  时刻的接收信号。  $\rho$  为发射天线系统总的信噪比,  $\sqrt{\rho/N_T}$  来保证每根发射天线分配相同的发射功率,  $T$  为发送码字的时隙数。

在接收端, 采用最大似然译码算法, 其对应的判决统计量为



$$\left\| \mathbf{Y} - \sqrt{\rho/N_T} \mathbf{C} \mathbf{H} \right\|_F^2 \quad (7.2)$$

式中,  $\|\cdot\|_F$  为 F 范数, 译码器选择使判决统计量取值最小的码字作为译码输出。

基于成对符号差错概率分析, 对于上面的最大似然译码算法, 第 3 章提出了空时码矩阵的秩准则和行列式准则。即对于元素取遍调制符号星座图的编码矩阵  $\mathbf{C}$  和  $\tilde{\mathbf{C}}$ , 码字差矩阵  $\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}}$  的最小秩应尽可能地大。为了达到满空时分集, 必须要求码字差矩阵  $\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}}$  是满秩的, 即要求编码增益矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}}) = (\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}})^H (\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}})$  是满秩的。由线性代数理论, 矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})$  的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_T}$  的乘积等于矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})$  的行列式的值  $\det[\mathbf{A}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})]$ 。由第 3 章和第 4 章的讨论, 矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})$  的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_T}$  的乘积越大, 则对应空时码的编码增益越大, 从而成对差错概率愈小。因此, 定义一个有助于标示空时编码矩阵特性的量, 所谓分集积  $\zeta$  [39-40], 即

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{N_T}} \min_{\mathbf{C} \neq \tilde{\mathbf{C}}} \left| \det[\mathbf{A}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})] \right|^{1/(2T)}$$

因子  $1/2\sqrt{N_T}$  是为了分集积  $\zeta$  满足  $0 \leq \zeta \leq 1$ , 因为

$$\min_{\mathbf{C} \neq \tilde{\mathbf{C}}} \left| \det[\mathbf{A}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})] \right|^{1/T} \leq \frac{1}{T} \min_{\mathbf{C} \neq \tilde{\mathbf{C}}} \|\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}}\|_F^2 \leq \frac{1}{T} E \left\{ \|\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}}\|_F^2 \right\} \leq 4N_T$$

(因子 4 是因为有元素差的因素) 进一步为获得较大编码增益, 要求在调制符号功率一定的条件下编码增益矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})$  的特征值的乘积最大化, 这等价于要求在调制符号功率一定的条件下编码增益矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})$  的行列式值最大化。

若  $\mathbf{C} = \mathbf{G}_{N_T}(x_1, x_2, \dots, x_k)$  为正交空时分组码, 则利用正交空时分组码的定义应有  $\mathbf{C}^H \mathbf{C} = \mathbf{G}_{N_T}^H(x_1, x_2, \dots, x_k) \mathbf{G}_{N_T}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k |x_i|^2 \mathbf{I}_{N_T}$ , 所以有  $E \left\{ \|\mathbf{C}\|_F^2 \right\} = k \cdot N_T$ 。为满足约束条件  $E \left\{ \|\mathbf{C}\|_F^2 \right\} = T \cdot N_T$ , 需对编码矩阵  $\mathbf{G}_{N_T}(x_1, x_2, \dots, x_k)$  做归一化处理, 即乘以因子  $\sqrt{T/k}$ , 即令编码矩阵  $\mathbf{C} = \sqrt{T/k} \mathbf{G}_{N_T}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 。这样就很容易证明在正交空时分组码假设条件下, 分集积  $\zeta$  有表达式 [26]

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{N_T}} d_{\min}$$

式中,  $d_{\min}$  是编码矩阵  $\mathbf{G}_{N_T}(x_1, x_2, \dots, x_k)$  中元素所属的调制符号星座图中任意两点的最短距离。我们记此分集积  $\zeta$  为  $\zeta_{\text{opt}}$  或  $\zeta_{\text{opt,SX}}$ , 其中后缀为相应表达式或定义提出者名字的缩写。

由于空时编码矩阵  $\mathbf{C}$  有  $T$  行  $N_T$  列, 满秩性要求对于具有  $N_T$  个发射阵元的天线系统, 传输时隙  $T$  应满足  $T \geq N_T$  的条件。这说明对于具有  $N_T$  个发射阵元的天线系统要实现每信道用户  $R$  bit (  $R$  bit/channel use 或  $R$  bps/Hz ) 的传输速率, 空时编码矩阵  $\mathbf{C}$  的尺寸必须大于等于  $2^{R \cdot N_T}$ 。因此如果不对空时编码矩阵  $\mathbf{C}$  的结构加以优化, 最大似然解码 (7.2) 的复

杂度关于发射天线阵元数是指数增长的。这正是第 4 章至第 6 章问题讨论的核心所在。在此给出准正交设计时最大似然解码所对应的关系式 (7.2)，以便与第 4 章的正交设计做对比理解。

假设空时编码矩阵  $\mathbf{C}$  是由  $k$  个调制复符号  $x_1, x_2, \dots, x_k$  和  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$  构成的； $\mathbf{C}$  满足正交设计的条件，即当符号  $x_1, x_2, \dots, x_k$  取遍调制符号星座图  $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \dots \times \mathcal{S}_k$ （此处“ $\times$ ”为笛卡儿乘积，对于  $k \neq l$ ，调制符号星座图  $\mathcal{S}_k$  和  $\mathcal{S}_l$  可相同也可不同）皆有  $\mathbf{C}^H \mathbf{C} = \sum_{i=1}^k |x_i|^2 \mathbf{I}_{N_T}$ 。式 (7.2) 可以写作

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{Y} - \sqrt{\rho/N_T} \mathbf{C} \mathbf{H} \right\|_F^2 &= \text{tr}\{\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}\} - \sqrt{\frac{\rho}{N_T}} \text{tr}\{\mathbf{Y}^H \mathbf{C} \mathbf{H} + \mathbf{H}^H \mathbf{C}^H \mathbf{Y}\} + \frac{\rho}{N_T} \text{tr}\{\mathbf{H}^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{H}\} \\ &= \text{tr}\{\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}\} - \sqrt{\frac{\rho}{N_T}} \text{tr}\{\mathbf{Y}^H \mathbf{C} \mathbf{H} + \mathbf{H}^H \mathbf{C}^H \mathbf{Y}\} + \frac{\rho}{N_T} \sum_{k=1}^K |x_k|^2 \text{tr}\{\mathbf{H}^H \mathbf{H}\} \end{aligned} \quad (7.3a)$$

$$= f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_k(x_k) \quad (7.3b)$$

式 (7.3a) 中，第一项与调制符号“无关”，是观察数据的 F-范数；第二项是编码矩阵的线性变换，所以也是调制复符号  $x_1, x_2, \dots, x_k$  和  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$  的线性变换；第三项是调制复符号  $|x_1|^2, |x_2|^2, \dots, |x_k|^2$  的线性变换。所以函数  $f_i(x)$ ， $i=1, 2, \dots, k$  是相互独立的关于变量  $x$  的一元二次式（即变量  $x$  的二次型函数）。即对应最大似然解码问题为

$$\min_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \dots \times \mathcal{S}_k} \left\| \mathbf{Y} - \sqrt{\rho/N_T} \mathbf{C} \mathbf{H} \right\|_F^2 = \min_{x_1 \in \mathcal{S}_1} f_1(x_1) + \min_{x_2 \in \mathcal{S}_2} f_2(x_2) + \dots + \min_{x_k \in \mathcal{S}_k} f_k(x_k) \quad (7.3c)$$

式 (7.3c) 表明原始最大似然解码的  $k$  维搜索问题在正交设计假设下等价于  $k$  个一维搜索问题，即线性复杂度解码。我们称式 (7.3c) 为基于单个复符号的解码 (complex symbol-wise decoding)。且需要特别指出的是，式 (7.3c) 这种基于单个复符号的最大似然解码算法对于调制符号星座图  $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \dots \times \mathcal{S}_k$  是没有任何限制的。

**定义 7.1** 称符号调制星座图  $\mathcal{S}$  为矩形 QAM，若

$$\mathcal{S} = \left\{ z = \frac{n \cdot d}{2} + j \frac{m \cdot d}{2} \mid n, m \in \mathcal{N}_i, i=1, 2 \right\}$$

式中， $j = \sqrt{-1}$  为虚单位； $\mathcal{N}_i = \{-(2N_i - 1), -(2N_i - 3), \dots, -1, 1, \dots, (2N_i - 3), (2N_i - 1)\}$ ， $N_1$  和  $N_2$  为正整数； $d$  为正数，用以调节总的符号功率。

**定义 7.2** 称符号调制星座图  $\mathcal{S}$  为正方形 QAM，若上述定义中  $N_1 = N_2 = M$ ，也被称为  $M^2$ -QAM。图 7.1 给出了 32(4×8)-QAM、4<sup>2</sup>-QAM、8-QAM 等符号调制星座图。

若假设式 (7.3c) 左边符号  $x_1, x_2, \dots, x_k$  取自同一星座图  $\mathcal{S}$ ，且  $\mathcal{S}$  为矩形 QAM，设  $|x_i|^2 = (d^2/4)[n_{i,1}^2 + n_{i,2}^2]$ ， $i=1, 2, \dots, k$ ；则式 (7.3c) 变为

$$\begin{aligned} & \min_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathcal{S}^k} \left\| \mathbf{Y} - \sqrt{\rho/N_T} \mathbf{C} \mathbf{H} \right\|_F^2 \\ &= \min_{n_{1,1} \in \mathcal{N}_1} f_{1,1}(n_{1,1}) + \min_{n_{1,2} \in \mathcal{N}_2} f_{1,2}(n_{1,2}) + \dots + \min_{n_{k,1} \in \mathcal{N}_1} f_{k,1}(n_{k,1}) + \min_{n_{k,2} \in \mathcal{N}_2} f_{k,2}(n_{k,2}) \end{aligned} \quad (7.4)$$

式中，函数  $f_{i,1}$  和  $f_{i,2}$  是相互独立的、分别关于正整数变量  $n_{i,1}$  和  $n_{i,2}$  的一元二次式。

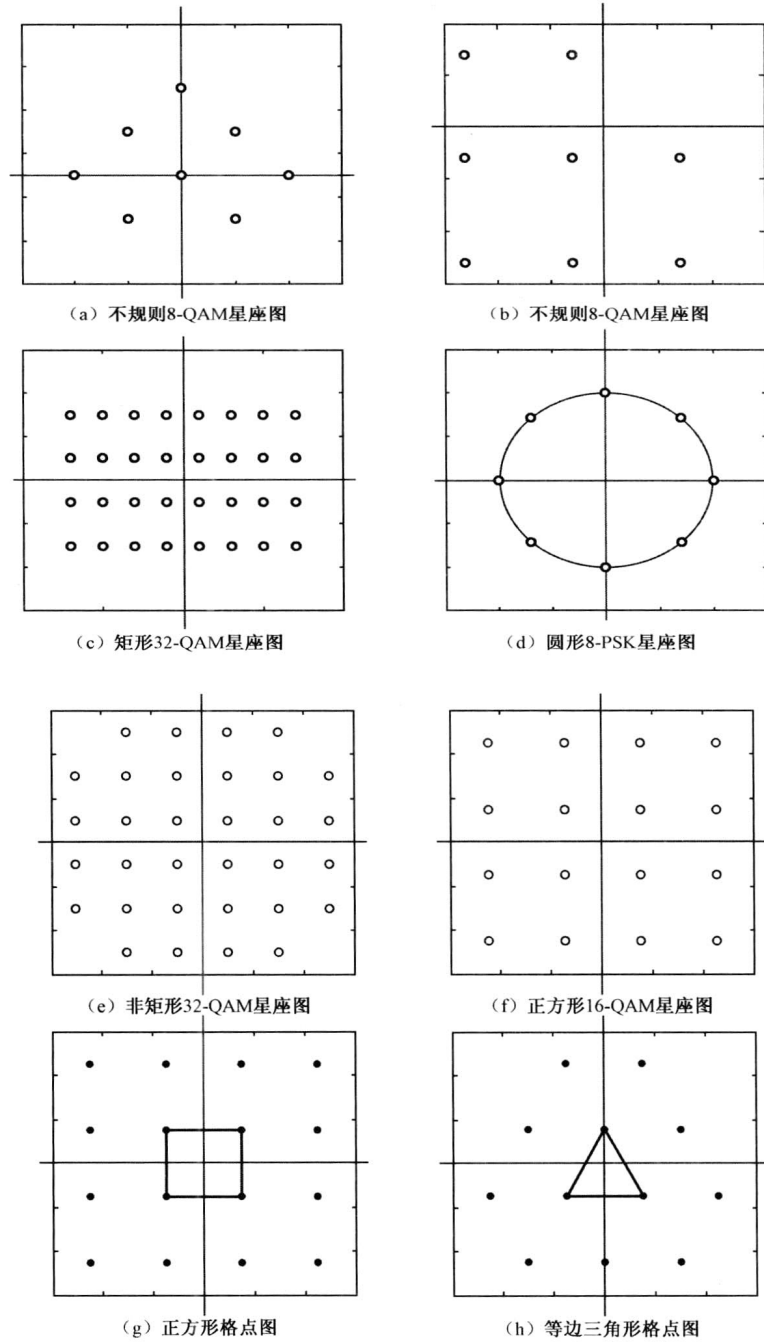


图 7.1 几种符号调制星座图和格点图形

若将式 (7.3c) 中的复变量  $x_i$  看成是实数对, 则基于单个复符号的最大似然解码复杂度等同于基于实符号对联合搜索的最大似然解码复杂度。但是对于式 (7.4), 当调制符号星座图  $\mathcal{S}$  为正方形或矩形 QAM 时, 基于单个复符号的最大似然解码可以简化为基于单个实符号的最大似然解码, 即具有最小解码复杂度。但是这种解码复杂度降低特性传导到对调制符号星座图  $\mathcal{S}$  提出额外的要求。另外, 问题是正交空时分组码对于任意传输时延  $T$ , 其符号传输速率当发射天线阵元数  $N_T > 2$  时是小于或等于  $3/4$  的<sup>[15]</sup>。为了满足全速率传输, 我们松弛正交性的限制, 提出如下拟 (准) 正交空时码的概念。在图 7.1 中给出了几种具有特殊形状的调制符号星座图  $\mathcal{S}$ , 读者可以观察它们实虚、部之间是否有关联关系, 以便能够较好地理解准正交空时码解码复杂度与调制符号星座图形状的关系。

## 7.2 拟 (准) 正交空时分组码的编码规则和解码算法

为了提高正交空时分组码的符号传输速率, 人们弱化空时编码矩阵各列相互正交的要求, 提出了准正交空时分组码的概念。其主要方式有 Sharma-Papadias<sup>[21]</sup>码、Jafarkhani<sup>[22]</sup>码、Tirkkonen-Boariu-Hottinen<sup>[23]</sup>码和 Papadias-Foschini<sup>[24]</sup>码。

### 7.2.1 几种拟 (准) 正交空时分组码的编码方案

当发射天线的阵元数  $N_T = 4$  时, 假设  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  为两个 Alamouti 空时码矩阵, 也就是假设调制符号星座图为  $\mathcal{S}$ , 则

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} z_3 & z_4 \\ -z_4^* & z_3^* \end{bmatrix}; \quad z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathcal{S}$$

则 Jafarkhani<sup>[22]</sup>码的编码矩阵为

$$\mathbf{C}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^* & \mathbf{A}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ -z_2^* & z_1^* & -z_4^* & z_3^* \\ -z_3^* & -z_4^* & z_1^* & z_2^* \\ z_4 & -z_3 & -z_2 & z_1 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

而 Tirkkonen-Boariu-Hottinen<sup>[23]</sup>码的编码矩阵为

$$\mathbf{C}_{\text{TBH}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ -z_2^* & z_1^* & -z_4^* & z_3^* \\ z_3 & z_4 & z_1 & z_2 \\ -z_4^* & z_3^* & -z_2^* & z_1^* \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Papadias-Foschini<sup>[24]</sup>码的编码矩阵为

$$\mathbf{C}_{\text{PF}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^{\text{H}} & \mathbf{A}^{\text{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ -z_2^* & z_1^* & -z_4^* & z_3^* \\ -z_3^* & z_4 & z_1^* & -z_2 \\ -z_4^* & -z_3 & z_2^* & z_1 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

为了在每个时隙中发射  $b$  bit 信息, 使用包含  $2^b$  个点的星座图  $\mathcal{S}$ 。传送  $4b$  bit, 选择星座符号  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathcal{S}$ 。

$$\mathbf{C}_{\text{J}}^{\text{H}} \mathbf{C}_{\text{J}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\text{H}} \mathbf{A} + \mathbf{B}^{\text{T}} \mathbf{B}^* & \mathbf{A}^{\text{H}} \mathbf{B} - \mathbf{B}^{\text{T}} \mathbf{A}^* \\ \mathbf{B}^{\text{H}} \mathbf{A} - \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{B}^* & \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^{\text{H}} \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b_{\text{J}} \\ 0 & a & -b_{\text{J}} & 0 \\ 0 & -b_{\text{J}} & a & 0 \\ b_{\text{J}} & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

$$\mathbf{C}_{\text{TBH}}^{\text{H}} \mathbf{C}_{\text{TBH}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\text{H}} \mathbf{A} + \mathbf{B}^{\text{H}} \mathbf{B} & \mathbf{B}^{\text{H}} \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\text{H}} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{\text{H}} \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\text{H}} \mathbf{B} & \mathbf{A}^{\text{H}} \mathbf{A} + \mathbf{B}^{\text{H}} \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & b_{\text{TBH}} & 0 \\ 0 & a & 0 & b_{\text{TBH}} \\ b_{\text{TBH}} & 0 & a & 0 \\ 0 & b_{\text{TBH}} & 0 & a \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

式中,  $a = \sum_{i=1}^{2k} |z_i|^2$ ,  $b_{\text{J}} = 2\text{Re}\{z_1 z_4^* - z_2 z_3^*\}$ ,  $b_{\text{TBH}} = 2\text{Re}\{z_1 z_3^* + z_2 z_4^*\}$ 。

Jia Hou、Moon Ho Lee、Ju Yong Park<sup>[34]</sup>不再拘泥(但受启发)于 Alamouti 码, 基于四根发射天线而言提出了两种新的拟(准)正交空时分组码。其编码单元分别为

$$\mathbf{A}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

而两种新的准正交空时分组码分别为

$$\mathbf{C}_{\text{HLP}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(z_1, z_2) & \mathbf{A}(z_3, z_4) \\ -\mathbf{A}^{\text{H}}(z_3, z_4) & \mathbf{A}^{\text{H}}(z_1, z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_2 & z_1 & z_4 & z_3 \\ -z_3^* & -z_4^* & z_1^* & z_2^* \\ -z_4^* & -z_3^* & z_2^* & z_1^* \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{\text{HLP}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(z_1, z_2) & \mathbf{B}(z_3, z_4) \\ -\mathbf{B}^{\text{H}}(z_3, z_4) & \mathbf{B}^{\text{H}}(z_1, z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ -z_2 & z_1 & -z_4 & z_3 \\ -z_3^* & z_4^* & z_1^* & -z_2^* \\ -z_4 & -z_3 & z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

很容易验证拟(准)正交空时分组码  $\mathbf{C}_{\text{HLP}}$  和  $\mathbf{D}_{\text{HLP}}$ , 分别有满足关系

$$\mathbf{C}_{\text{HLP}}^{\text{H}} \mathbf{C}_{\text{HLP}} = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ c & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & c & a \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{\text{HLP}}^{\text{H}} \mathbf{D}_{\text{HLP}} = \begin{bmatrix} a & jd & 0 & 0 \\ -jd & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & jd \\ 0 & 0 & -jd & a \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

式中, ( $j = \sqrt{-1}$ );  $c = 2\text{Re}\{z_1 z_2^* + z_3 z_4^*\}$ ;  $d = 2\text{Im}\{z_1 z_2^* + z_3 z_4^*\}$ 。Jia Hou、Moon Ho Lee、Ju Yong

Park<sup>[34]</sup>这种编码规则也被称为广义准正交空时码。利用分块矩阵的行列式公式，有

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$$

很容易求得式 (7.8) ~ 式 (7.10) 所对应的编码矩阵的距离增益矩阵的行列式的值分别为

$$\det(\mathbf{C}_J^H \mathbf{C}_J) = (a^2 - b_J^2)^2; \quad \det(\mathbf{C}_{\text{TBH}}^H \mathbf{C}_{\text{TBH}}) = (a^2 - b_{\text{TBH}}^2)^2; \quad \det(\mathbf{Q}_{2N_T}^H \mathbf{Q}_{2N_T}) = (a^2 - b^2)^2$$

$$\det(\mathbf{C}_{\text{HLP}}^H \mathbf{C}_{\text{HLP}}) = (a^2 - c^2)^2; \quad \det(\mathbf{D}_{\text{HLP}}^H \mathbf{D}_{\text{HLP}}) = (a^2 - d^2)^2$$

因此，式 (7.8) 至式 (7.10) 所对应的编码矩阵的距离增益矩阵都可能是缺秩的。对于编码矩阵 (7.5) 至 (7.7)，结合图 7.1 所给调制符号星座图讨论其缺秩发生的概率和编码增益矩阵的条件数等问题，对它们进行对比研究。但因为下面关于调制符号星座图旋转等一系列对缺秩的修补方法，所以这些问题就没有必要啦。另外，由于这些编码矩阵基本情况完全类似，下面主要以 Sharma-Papadias 准正交空时码、Jafarkhani 空时码和 Tirkkonen-Boariu-Hottinen 空时码为主进行讨论。

## 7.2.2 拟（准）正交空时分组码的星座图旋转编码与解码算法

星座图旋转.

下面先以 Sharma-Papadias 为例进行讨论，Sharma-Papadias 构造准正交空时码的编码矩阵为（注意该准正交空时码编码法则没有局部 Alamouti 码的特征）：

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_2^* & -z_1^* & z_4^* & -z_3^* \\ z_3 & -z_4 & -z_1 & z_2 \\ z_4^* & z_3^* & -z_2^* & -z_1^* \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

为了在每个时隙中发射  $b$  bit，使用包含  $2^b$  个点的星座图  $\mathcal{S}$ ，选择星座符号  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathcal{S}$ 。则编码矩阵 (7.11) 实现了通过 4 个时隙传送  $4b$  bit 符号信息的目标，因此编码矩阵 (7.11) 实现全速率发送。设  $\mathbf{v}_i$  表示式 (7.11) 矩阵的第  $i$  列，那么有关系式

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 \rangle = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle \neq 0 \quad (7.12)$$

也就是说，式 (7.11) 矩阵的列矢量  $\mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{v}_3$  张成的子空间正交于列矢量  $\mathbf{v}_2$  和  $\mathbf{v}_4$  张成的子空间。而且 Sharma-Papadias 码有如下特点：

$$\mathbf{C}^H \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & 0 & jb & 0 \\ 0 & a & 0 & -jb \\ -jb & 0 & a & 0 \\ 0 & jb & 0 & a \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

式中， $a$ 、 $b$  为实数，且  $a = \sum_{i=1}^{2k} |z_i|^2$ ， $b = 2 \text{Im}\{z_1^* z_3 + z_2 z_4^*\}$ ； $j$  是虚单位，满足  $\det(\mathbf{C}^H \mathbf{C}) = (a^2 - b^2)^2$ 。显然当信息符号  $z_1, z_2, z_3, z_4$  取遍调制符号星座图  $\mathcal{S}$  时， $\mathbf{C}$  可能是缺秩的。

关于 Sharma-Papadias 准正交空时码的解码算法，可以有两种不同的处理方法，一种是在第 4 章已经采用的方法，即不妨假设接收天线为单个阵元，若发送信号的编码矩阵为

$\mathbf{C}$ ，则在时隙  $t$  的接收信号矢量为

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{C}\mathbf{h}_t + \mathbf{n}_t$$

式中， $\mathbf{h}_t$  为信道参数矢量； $\mathbf{n}_t$  为加性噪声矢量。则接收信号矢量可以写作  $\tilde{\mathbf{r}}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_t$ ，其中信道参数矩阵

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ -h_2^* & h_1^* & -h_4^* & h_3^* \\ -h_3 & h_4 & h_1 & -h_2 \\ -h_4^* & -h_3^* & h_2^* & h_1^* \end{bmatrix}$$

所传输的信号矢量

$$\mathbf{s} = \sqrt{\frac{\rho}{N_T}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

此处依然用  $\mathbf{n}_t$  表示加性噪声矢量，因为这时的加性噪声矢量  $\mathbf{n}_t$  只是对原来的加性噪声矢量中某些分量做了共轭变换，对其均值与协方差不会有任何改变。同时在这里将发射信号功率归一化因子  $\sqrt{\rho/N_T}$  融在发送信号矢量中。对  $\tilde{\mathbf{r}}_t$  左乘以矩阵  $\mathbf{H}_t^H$ ，得  $\mathbf{y}_t = \mathbf{\Omega}_t \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{n}}_t$ ，其中矩阵  $\mathbf{\Omega}_t$  的表达式为

$$\mathbf{\Omega}_t = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & j\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -j\beta \\ -j\beta & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & j\beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

式中，标量参数  $\alpha$ 、 $\beta$  为实数， $\alpha = \sum_{i=1}^4 |h_i|^2$ ， $\beta = 2 \operatorname{Im}\{h_1^* h_3 + h_2 h_4^*\}$ 。所以有

$$\mathbf{y}_t = \sqrt{\frac{\rho}{N_T}} \begin{bmatrix} \alpha z_1 + j\beta z_3 \\ \alpha z_2 - j\beta z_4 \\ \alpha z_3 - j\beta z_1 \\ \alpha z_4 + j\beta z_2 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{n}}_t \quad (7.14)$$

式中，加性噪声矢量  $\tilde{\mathbf{n}}_t$  仍是高斯的，但由于变换矩阵  $\mathbf{H}_t$  的非（酉）正交性，此时矢量  $\tilde{\mathbf{n}}_t$  变成色噪声，其协方差矩阵具有  $\mathbf{\Omega}_t$  那样的形式。观察式 (7.14)，我们看到这时的最大似然解码算法分别关于信息符号  $z_1$  和  $z_3$  是联合解码、 $z_2$  和  $z_4$  是联合解码。这可以理解为准正交空时码由于松弛了编码矩阵各列之间的正交性，从而带来对应最大似然解码算法复杂度的提升。

我们将对应于信息符号  $z_1$  和  $z_3$  的  $\mathbf{y}_t$  分量取出来构成新的观察矢量

$$\mathbf{r}_t = \sqrt{\frac{\rho}{N_T}} \begin{bmatrix} \alpha & j\beta \\ -j\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\eta}_t \quad (7.15)$$

式中，系数矩阵的特征值为  $\lambda_1 = (\alpha + \beta)/2$ 、 $\lambda_2 = (\alpha - \beta)/2$ ；而特征矩阵为

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$$

对观察矢量  $\mathbf{r}_i$  左乘以特征矩阵  $\mathbf{U}^H$ ，并不改变加性噪声矢量  $\boldsymbol{\eta}_i$  的分布特性，仍记观察矢量  $\mathbf{r}_i$ 。则有

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1,i} &= -j\sqrt{\frac{\rho}{N_T}} \frac{\alpha - \beta}{2} (z_1 + jz_3) + \boldsymbol{\eta}_{1,i} \\ \mathbf{r}_{2,i} &= \sqrt{\frac{\rho}{N_T}} \frac{\alpha + \beta}{2} (z_1 - jz_3) + \boldsymbol{\eta}_{2,i} \end{aligned} \quad (7.16)$$

因为信息符号  $z_i$  乘以虚单位  $j$  就是对对应调制符号星座图做旋转变换，为求一致性，将这个变换都施加于信息符号  $z_3$ ，如式 (7.16) 所示。

在实际中，信息符号  $z_1$  和  $z_3$  可随机地取之于不同的调制符号星座图  $\mathcal{S}_1$  和  $\mathcal{S}_3$  中。若调制符号星座图  $\mathcal{S}_1$  和  $\mathcal{S}_3$  分别含有  $N_1$  和  $N_3$  个符号，记  $|\mathcal{S}_1| = N_1$ 、 $|\mathcal{S}_3| = N_3$ ，且称  $|\mathcal{S}_1|$  为调制符号星座图  $\mathcal{S}_1$  这个点集的“集重”或“势”。则由式 (7.16) 接收信号符号  $z_1 + jz_3$  和  $z_1 - jz_3$  衍生的调制符号星座图分别为  $\mathcal{B}_1$  和  $\mathcal{B}_3$ ，则  $\mathcal{B}_1$  和  $\mathcal{B}_3$  的“集重”或“势”为  $N_1 \cdot N_3$ 。图 7.2 (a) 所示为 QPSK 调制符号星座图  $\mathcal{S}$  在经变换  $z_1 + jz_3$  后的衍生调制符号星座图  $\mathcal{B}_1$ 。图 7.2 (b) 所示为 QPSK 调制符号星座图  $\mathcal{S}$  经变换  $z_1 + e^{j\theta_0} z_3$  (旋转角度为  $\theta_0 = 29.7938^\circ$ ) 后的衍生调制符号星座图  $\tilde{\mathcal{B}}_1$ 。从图 7.2 中可以看到，这种非常简单的变换，确实增加了衍生调制符号星座图的“集重”或“势”。这也从另一个侧面说明编码矩阵 (7.11) 所对应的最大似然解码算法的复杂度的增加。

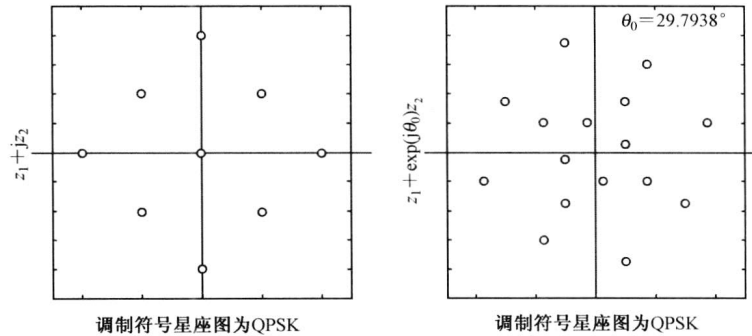


图 7.2 当调制符号星座图为 QPSK 时的  $\mathcal{B}_1$  与  $\tilde{\mathcal{B}}_1$

若用  $d_{\mathcal{B}_1}$  和  $d_{\mathcal{B}_3}$  表示衍生调制符号星座图  $\mathcal{B}_1$  和  $\mathcal{B}_3$  中任意两点的最小距离，再令  $d_{\min} = \min\{d_{\mathcal{B}_1}, d_{\mathcal{B}_3}\}$ 。图 7.3 绘出了当原始调制符号星座图  $\mathcal{S}$  为 QPSK、8PSK、16QAM 时， $d_{\min}(\theta)$  随旋转角度  $\theta$  的变化曲线。

从图 7.3 中可以看出，对于不同的调制符号星座图  $d_{\min}(\theta)$  均有极大值点。而  $d_{\min}$  越大对于解码越有利。因此将使得  $d_{\min}$  取得最大值的旋转角度  $\theta$  称为最佳旋转角。

另一种处理方法是依据上面讨论的启发，对准正交空时编码矩阵  $\mathbf{C}$  依据最大似然解码算法中信息符号之间的依赖关系做分解，即将  $\mathbf{C}$  分解为

$$\mathbf{C} = \mathcal{G}_1(z_1, 0, z_3, 0) + \mathcal{G}_2(0, z_2, 0, z_4)$$



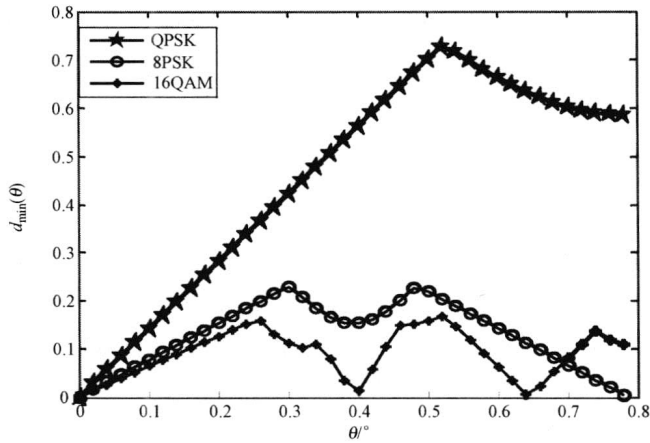


图 7.3 几种不同调制符号星座图下的指标变量在  $d_{\min}(\theta)$  的变化曲线

因为准正交空时编码矩阵  $\mathbf{C}$  列矢量  $\mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{v}_3$  张成的子空间正交于列矢量  $\mathbf{v}_2$  和  $\mathbf{v}_4$  张成的子空间，所以关于发送信号矩阵  $\mathcal{G}_1(z_1, 0, z_3, 0)$  和  $\mathcal{G}_2(0, z_2, 0, z_4)$  的接收信号是可以独立分离的，即分别有接收信号

$$\mathbf{y}_{1,t} = \sqrt{\frac{\rho}{N_T}} \mathcal{H}_1 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{n}}_{1,t} \quad (7.17)$$

其中信道参数矩阵

$$\mathcal{H}_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_3 \\ -h_2^* & -h_4^* \\ -h_3^* & h_1 \\ -h_4^* & h_2 \end{bmatrix}$$

而矩阵  $\mathcal{H}_1^H \mathcal{H}_1$  与式 (7.16) 中的系数矩阵完全相同，所以可以采用类似的处理方法对式 (7.17) 做分量分解得到式 (7.16)，进而得到上面的讨论结果。

对空时码矩阵  $\mathcal{G}_2(0, z_2, 0, z_4)$  实施上面的类似讨论与分析，可以得到完全类似于式 (7.16) 的结果，不过这时的旋转变换是施与信息符号  $z_4$  的。

这样是否可以预先对准正交空时编码矩阵  $\mathbf{C}$  中的  $z_3$ 、 $z_4$  做旋转变换，以期获得更为有利的结果呢？

考虑  $z_1, z_2 \in \mathcal{S}$  而  $z_3, z_4 \in \tilde{\mathcal{S}}$ ，其中调制符号星座图  $\tilde{\mathcal{S}}$  是调制符号星座图  $\mathcal{S}$  的一个  $\theta$  角旋转， $\tilde{\mathcal{S}}$  也可以是不同于  $\mathcal{S}$  的某个调制符号星座图的一个  $\theta$  角旋转。得准正交空时编码矩阵  $\tilde{\mathbf{C}}$  为

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 e^{j\theta} & z_4 e^{j\theta} \\ z_2^* & -z_1^* & z_4^* e^{-j\theta} & -z_3^* e^{-j\theta} \\ z_3 e^{j\theta} & -z_4 e^{j\theta} & -z_1 & z_2 \\ z_4^* e^{-j\theta} & z_3^* e^{-j\theta} & -z_2^* & -z_1^* \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

记  $\tilde{\mathbf{C}}$  的列矢量为  $\tilde{\mathbf{v}}_i$  ( $i=1,2,3,4$ )，则

$$z_1 z_3^* e^{-j\theta} + z_2^* z_4 e^{j\theta} - z_1^* z_3 e^{j\theta} - z_2 z_4^* e^{-j\theta}$$

$$2 \operatorname{Im} \{z_2^* z_4 e^{j\theta} - z_1^* z_3 e^{j\theta}\} = 0$$

$$\operatorname{Im} \{ (z_2^* z_4 - z_1^* z_3) e^{j\theta} \} = 0$$

$\langle \tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ ;  $\langle \tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_4 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 \rangle = 0$ ;  $\langle \tilde{\mathbf{v}}_3, \tilde{\mathbf{v}}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ ;  $\langle \tilde{\mathbf{v}}_3, \tilde{\mathbf{v}}_4 \rangle = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle = 0$   
 只要证明存在旋转角度  $\theta$ , 使得  $\langle \tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_3 \rangle = 0$  与  $\langle \tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_4 \rangle = 0$  同时成立即可。容易验证, 当  $\theta = \arg \{z_1 z_3^* - z_2 z_4^*\}$  时,  $\langle \tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_4 \rangle = 0$  与  $\langle \tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3 \rangle = 0$  同时成立。在此假设下, 对应于式 (7.18) 的准正交空时编码矩阵就变为正交空时码矩阵, 即有

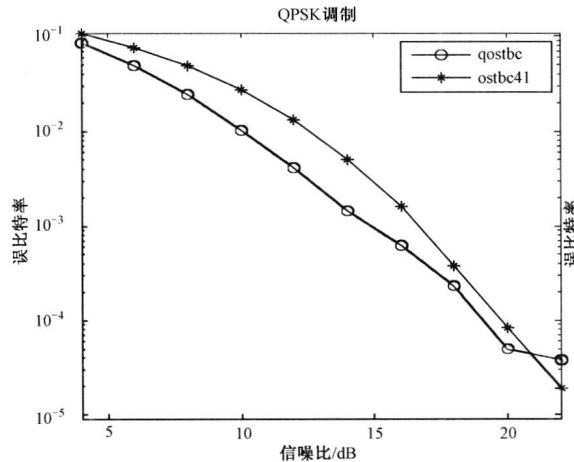
$$\tilde{\mathbf{C}}^H \tilde{\mathbf{C}} = (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2) \mathbf{I} \quad (7.19)$$

所以, 对应的最大似然解码为基于单个复符号复杂度的最优解码。但式 (7.19) 成立的关键问题是旋转角度  $\theta$  与即时信息符号有关, 其工程实现是不可行的。我们只能求其次, 根据调制方式求最佳旋转角  $\theta$ , 使对应  $d_{\min}$  达到最大以提高传输的有效性, 同时还可以确保准正交空时编码  $\tilde{\mathbf{C}}$  的满秩性, 从而提高其空时分集增益, 以提高检测概率。所以在准正交空时编码方案中, 类似于式 (7.16) 的两个或更多个信息符号的联合解码是不可避免的。我们将这理解为准正交空时编码方案松弛编码矩阵中各列之间的正交性, 换来发射天线阵元大于 2 时传输速率实现全速率应付出的代价。

参考文献[26]根据星座图旋转角度与分集积的变换关系, 得出当调制符号星座图  $\mathcal{S}$  是一个正方形格点的子集,  $d_{\min}$  是这个正方形格点的边长, 则在分集积最大意义下的旋转角度为  $\pi/4$ ; 当调制符号星座图  $\mathcal{S}$  是一个等边三角形格点的子集,  $d_{\min}$  是这个等边三角形的边长, 则在分集积最大意义下的旋转角度为  $\pi/6$ ; 当调制符号星座图  $\mathcal{S}$  是  $M$ -PSK, 则在分集积最大意义下的旋转角度为  $\pi/M$ 。图 7.4 所示模拟性能曲线是依据参考文献[26]这个结论进行的。

图 7.4 (a) 所示是 Jafarkhani 准正交空时编码方案与第 4 章的正交空时码  $\mathcal{H}_4$  码的误比特率曲线, 若无特别说明, 我们的系统都采用单个阵元的接收天线。

图 7.4 (b) 所示是 Jafarkhani 准正交空时编码方案与准正交空时编码方案采用星座图旋转时的误比特率曲线比较, 同时还有一般的旋转与最佳旋转结果的比较。从图 7.4 所示的模拟结果可以看出, 准正交空时分组码与星座图旋转时的准正交空时分组码具有明显的性能改善。图中旋转角度为 0.7854 弧度等于  $45^\circ$ ; 0.2 弧度约等于  $11.5^\circ$ 。



(a) 准正交与正交编码方案的性能比较曲线

图 7.4 几种编码方案的性能曲线

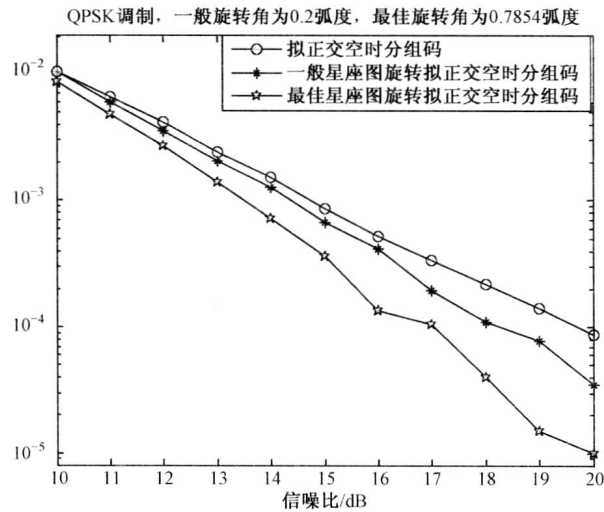


图 7.4 几种编码方案的性能曲线 (续)

应该注意, 准正交空时分组码的传输速率是 1, 而正交空时分组码的传输速率是 3/4; 正交空时分组码的编码矩阵具有满分集增益, 而准正交空时分组码的编码矩阵仅有一半空间分集增益; 准正交空时分组码的编码矩阵是缺秩的, 而旋转准正交空时分组码的编码矩阵是满秩的。

图 7.5 (a) 所示是 4 发 1 收准正交系统关于不同调制方式的性能对比曲线, 图 7.5 (b) 所示 4 发 1 收最佳旋转准正交系统关于不同调制方式的性能对比曲线。对比两个图形明显地可以看出, 经过旋转变换性能有所提升。

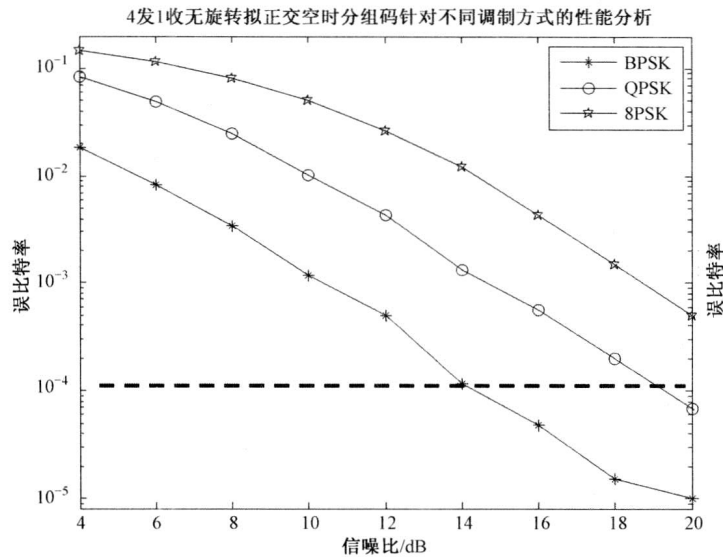
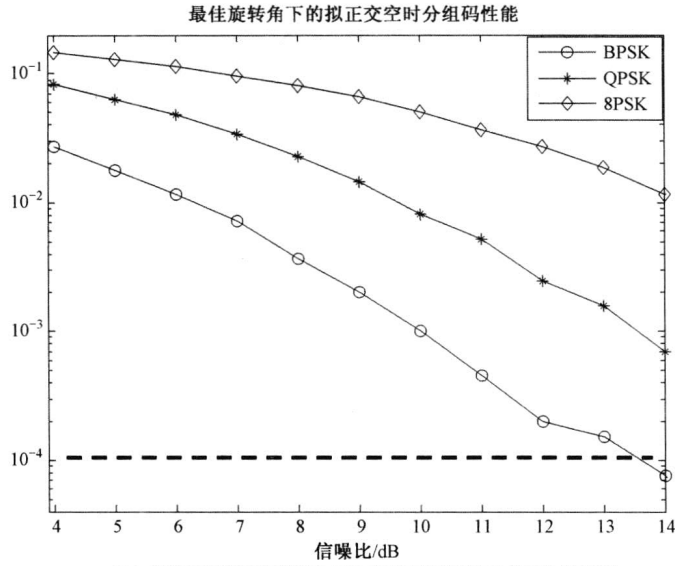


图 7.5 最佳旋转与无旋转时拟正交编码方案的性能曲线



(b) 最佳旋转正交编码方案关于不同调制方式的性能曲线

图 7.5 最佳旋转与无旋转时拟正交编码方案的性能曲线 (续)

### 7.2.3 拟(准)正交空时分组码的解码算法复杂度分析

相对于式 (7.3) 相互独立的单个复符号的最大似然解码算法, Jafarkhani 空时码、Tirkkonen-Boariu-Hottinen 空时码和 Sharma-Papadias 空时码的最大似然译码算法为相互独立的成对复符号 (四维复杂度) 译码, 即

$$\min_{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathcal{S}^4} \left\| \mathbf{Y} - \sqrt{\rho/N_T} \mathbf{C}_J \mathbf{H} \right\|_F^2 = \min_{z_1, z_4} f_{1,4}(z_1, z_4) + \min_{z_2, z_3} f_{2,3}(z_2, z_3) \quad (7.20a)$$

$$\min_{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathcal{S}^4} \left\| \mathbf{Y} - \sqrt{\rho/N_T} \mathbf{C}_{TBH} \mathbf{H} \right\|_F^2 = \min_{z_1, z_3} f_{1,3}(z_1, z_3) + \min_{z_2, z_4} f_{2,4}(z_2, z_4) \quad (7.20b)$$

虽然式 (7.5) 的 Jafarkhani 空时码和式 (7.6) 的 Tirkkonen-Boariu-Hottinen 空时码将符号传输速率提升到全速率, 但是它们的编码距离增益矩阵的秩只有正交空时码相应矩阵维数的一半。参考文献[21, 25-27]相互独立地提出了通过对编码矩阵  $\mathbf{C}_J$  和  $\mathbf{C}_{TBH}$  中的符号  $z_3$ 、 $z_4$  做旋转变换, 从而使相应距离增益矩阵变为满秩的。参考文献[26]还求得对于任意具有正方形或等边三角形格点的星座图的信号在最大分集增益意义下的最佳旋转角拟(准)正交空时分组码, 如图 7.1 (e)、(f) 所示。

下面将 Tirkkonen-Boariu-Hottinen 码类推广到发射天线为任意偶数的情况下。设  $\mathbf{A} = \mathcal{G}_{N_T}(z_1, z_2, \dots, z_k)$ ,  $\mathbf{B} = \mathcal{G}_{N_T}(z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{2k})$  分别为  $T \times N_T$  维的正交设计。 $\mathbf{Q}_{2N_T}(z_1, z_2, \dots, z_{2k})$  为  $2T \times 2N_T$  维的拟(准)正交设计, 按 Tirkkonen-Boariu-Hottinen 结构构造, 则

$$\mathbf{Q}_{2N_T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

那么可以得到

$$\mathbf{Q}_{2N_T}^H \mathbf{Q}_{2N_T} = \begin{bmatrix} a\mathbf{I}_{N_T} & b\mathbf{I}_{N_T} \\ b\mathbf{I}_{N_T} & a\mathbf{I}_{N_T} \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

式中

$$a = \sum_{i=1}^{2k} |z_i|^2; \quad b = \sum_{i=1}^k (z_i z_{k+i}^* + z_{k+i} z_i^*) \quad (7.22)$$

对应的最大似然解码公式为

$$\min_{(z_1, z_{k+1}, \dots, z_k, z_{2k}) \in \prod_{i=1}^{2k} \mathcal{S}_i} \left\| \mathbf{Y} - \sqrt{\rho/N_T} \mathbf{Q}_{2N_T} \mathbf{H} \right\|_F^2 = \min_{z_1, z_{k+1}} f_1(z_1, z_{k+1}) + \dots + \min_{z_k, z_{2k}} f_k(z_k, z_{2k}) \quad (7.23)$$

式中，函数  $f_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) 是关于变量  $z_i$  和  $z_{k+i}$  的二次型，称为基于复符号对的最大似然解码算法。通过旋转  $z_{k+i}$ ，使  $z_{k+i} \in \mathcal{S}_{k+i} = \{e^{j\theta} s : s \in \mathcal{S}_i\}$ ，拟（准）正交空时编码矩阵  $\mathbf{Q}_{2N_T}$  可以获得满分集增益。由于变量  $z_i$  和  $z_{k+i}$  仍是联合解码的，所以旋转变换没有改变复符号对最大似然解码算法的复杂度。

在空时编码矩阵  $\mathbf{Q}_{2N_T}$  和最大似然解码式 (7.23) 中对符号星座图  $\mathcal{S}_i$  是没有任何限制的，但是如果将调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  限定为矩形 QAM 时，传输符号  $z_i$  可以表示为  $z_i = r_i + j\varsigma_i$ ，而  $r_i$  和  $\varsigma_i$  是相互独立的实数。则对应参数  $a$ 、 $b$  的表达式为

$$a = \sum_{i=1}^{2k} (r_i^2 + \varsigma_i^2), \quad b = \sum_{i=1}^k (r_i r_{k+i} + \varsigma_i \varsigma_{k+i}) \quad (7.24)$$

基于复符号对的最大似然解码算法 (7.23) 变成

$$\begin{aligned} & \min_{(z_1, z_{k+1}, \dots, z_k, z_{2k}) \in \prod_{i=1}^{2k} \mathcal{S}_i} \left\| \mathbf{Y} - \sqrt{\rho/N_T} \mathbf{Q}_{2N_T} \mathbf{H} \right\|_F^2 \\ & = \min_{r_1, r_{k+1}} f_{1,1}(r_1, r_{k+1}) + \min_{\varsigma_1, \varsigma_{k+1}} f_{1,2}(\varsigma_1, \varsigma_{k+1}) + \dots + \min_{r_k, r_{2k}} f_{k,1}(r_k, r_{2k}) + \min_{\varsigma_k, \varsigma_{2k}} f_{k,2}(\varsigma_k, \varsigma_{2k}) \end{aligned} \quad (7.25)$$

式中，函数  $f_{i,1}$ 、 $f_{i,2}$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) 分别是关于变量  $r_i$ 、 $r_{k+i}$  和  $\varsigma_i$ 、 $\varsigma_{k+i}$  的二次型，称为基于实符号对的最大似然解码算法。它是拟（准）正交空时编码情形下最优解码最小复杂度算法。

综上所述，式 (7.25) 这种最优解码最小复杂度算法成立的条件归纳为：

- (1) 空时编码矩阵  $\mathbf{Q}_{2N_T}$  的准正交性与参数  $a$  模值平方和及参数  $b$  对称实部、虚部和；
- (2) 基于对称复符号对的最大似然解码算法；
- (3) 相互独立的实、虚部调制符号星座图；
- (4) 存在的关键问题为空时编码矩阵  $\mathbf{Q}_{2N_T}$  是半秩的。

我们提出的问题是：能否通过旋转信息符号，使这种一般的准正交空时编码矩阵  $\mathbf{Q}_{2N_T}$  变为满秩（并非正交）的，而同时保证类似于式 (7.25) 的基于实符号对（二维复杂度）的最大似然解码算法仍成立。这个问题已被 Yuen-Guan-Tjhung<sup>[32-33]</sup> 研究和解决，他们提出将式 (7.25) 中的  $(r_i, r_{k+i})$  旋转变换为  $(p_i, p_{k+i})$ ，而将  $(\varsigma_i, \varsigma_{k+i})$  旋转变换为  $(q_i, q_{k+i})$ 。Yuen-Guan-Tjhung 也获得了对于正方形和矩形 QAM 调制符号星座图的最佳旋转角度。实

实际上这种旋转变换关系早前已经由 Khan-Rajan 等<sup>[28-31]</sup>在他们所谓坐标交织正交设计中提出，但坐标交织正交设计是不同于准正交空时编码设计的。

### 7.3 通用的非奇异线性星座图符号变换公式

通过上面分析我们看到基于实符号对的最大似然解码算法（7.25）这种最优解码最小复杂度算法成立是由于关系式（7.21）、（7.22）与（7.24）的这种信息符号和信息符号实虚部的变换关系；而在式（7.22）与式（7.24）的变换关系中，我们看到其一是参数  $a$ 、 $b$  关于信息符号变量对称的二次型结构，其二是这种关于信息符号变量对称的二次型结构关于信息符号变量实、虚部分解的保持性。由此启发我们建立通用的、能够保持基于实符号对的最大似然解码算法的准正交空时编码线性符号变换公式。为简化公式的推导过程，设多重信息符号调制星座图  $\mathcal{S}_i$  是相同的， $\mathcal{S}_i = \mathcal{S} (\forall i)$ ，即符号调制星座图  $\mathcal{S}$  至少由 4 个整数或正方形格点构成，即  $\mathcal{S} \supseteq \mathbf{Z}[j]$ ， $\mathbf{Z}[j] = \{z = n + jm \mid n, m \in \mathbf{Z}, j = \sqrt{-1}\}$ ，且这些点是非共线的（其定义见附录 C）。我们有如下的编码规则：

（1）将二进制信息序列映射为调制符号星座图  $\mathcal{S}$  内的点  $x_i$ ， $x_i = r_i + js_i$  ( $1 \leq i \leq 2k$ )。

（2）对于任一  $i$  ( $1 \leq i \leq 2k$ )，采用预先设计的非奇异线性变换矩阵  $U_i$ ，将 4 维实矢量  $(r_i, s_i, r_{k+i}, s_{k+i})^T$  变换为另一 4 维实矢量  $(p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i})^T$ ，即

$$(p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i})^T = U_i (r_i, s_i, r_{k+i}, s_{k+i})^T \text{ 或 } (z_i, z_{k+i})^T = U_i (x_i, x_{k+i})^T \quad (7.26)$$

（3）形成新的复变量  $z_i = p_i + jq_i$  ( $1 \leq i \leq 2k$ )。

（4）利用复变量  $z_i$  ( $1 \leq i \leq 2k$ ) 形成通过  $2N_T$  个发射天线阵元发送的准正交空时编码矩阵  $\mathbf{Q}_{2N_T}(z_1, z_2, \dots, z_{2k})$ 。

其编码过程如图 7.6 所示。

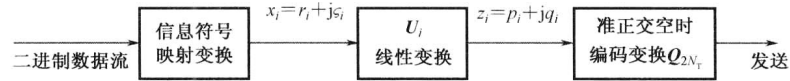


图 7.6 准正交空时编码原理

在图 7.6 中关键步骤是设计维数为  $4 \times 4$  的线性变换矩阵  $U_i$ ，其目的是保证准正交空时编码矩阵  $\mathbf{Q}_{2N_T}(z_1, z_2, \dots, z_{2k})$  所对应的距离增益矩阵（7.21） $\mathbf{Q}_{2N_T}^H \mathbf{Q}_{2N_T}$  是满秩的和对应的最大似然解码算法是基于实符号对的，从而所对应的传输矩阵的满分集的、最大似然解码算法是“最小复杂度的。”为此定义函数对

$$\left. \begin{aligned} g_i(p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i}) &= p_i^2 + q_i^2 + p_{k+i}^2 + q_{k+i}^2 \\ f_i(p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i}) &= 2(p_i p_{k+i} + q_i q_{k+i}) \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

对比式（7.25），为保证最大似然解码算法具有实符号对复杂度，线性变换矩阵  $U_i$  必须使如下三种情形之一成立。注意在式（7.27）中，关键是二次型函数  $f_i$  中各变量的组合关系，

二次型函数  $g_i$  只须以  $f_i$  中各变量的组合关系做分解即可, 而函数  $f_i$  中各变量的组合关系共有且仅有三种情形, 对应于下面的情形 1~3。

情形 1: 函数对  $g_i$ 、 $f_i$  可以独立地分解为

$$\left. \begin{aligned} g_i(p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i}) &= g_{i,1}(r_i, \varsigma_i) + g_{i,2}(r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) \\ f_i(p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i}) &= f_{i,1}(r_i, \varsigma_i) + f_{i,2}(r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

情形 2: 函数对  $g_i$ 、 $f_i$  可以独立地分解为

$$\left. \begin{aligned} g_i(p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i}) &= g_{i,1}(r_i, r_{k+i}) + g_{i,2}(\varsigma_i, \varsigma_{k+i}) \\ f_i(p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i}) &= f_{i,1}(r_i, r_{k+i}) + f_{i,2}(\varsigma_i, \varsigma_{k+i}) \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

情形 3: 函数对  $g_i$ 、 $f_i$  可以独立地分解为

$$\left. \begin{aligned} g_i(p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i}) &= g_{i,1}(r_i, \varsigma_{k+i}) + g_{i,2}(r_{k+i}, \varsigma_k) \\ f_i(p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i}) &= f_{i,1}(r_i, \varsigma_{k+i}) + f_{i,2}(r_{k+i}, \varsigma_k) \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

假设依据图 7.6 中的流程进行编码, 且线性变换矩阵  $U_i$  使得准正交空时编码矩阵  $\mathbf{Q}_{2N_T}(z_1, z_2, \dots, z_{2k})$  的编码增益矩阵参数  $a$  和  $b$  所对应的函数式 (7.24) 满足上面所述的三种情形之一, 不妨设情形 1 成立, 则对应的最大似然解码算法为

$$\begin{aligned} \min_{(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \in \prod_{i=1}^{2k} \mathcal{S}_i} & \left\| \mathbf{Y} - \sqrt{\rho/N_T} \mathbf{Q}_{2N_T}(\mathbf{U}_1(x_1, x_{k+1}), \dots, \mathbf{U}_k(x_k, x_{2k})) \mathbf{H} \right\|_F^2 \\ & = \min_{r_1, \varsigma_1} \varphi_1(r_1, \varsigma_1) + \min_{r_2, \varsigma_2} \varphi_2(r_2, \varsigma_2) + \dots + \min_{r_{2k}, \varsigma_{2k}} \varphi_{2k}(r_{2k}, \varsigma_{2k}) \end{aligned} \quad (7.31)$$

式中,  $x_i = r_i + j\varsigma_i$  ( $1 \leq i \leq 2k$ ) 是调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  中的点, 函数  $\varphi_i(r_i, \varsigma_i)$  是关于自由变量  $r_i$  和  $\varsigma_i$  的二次型。这样就实现了基于实符号对的最大似然解码算法。其他情形可以完全类似地证明。然而对于上述三种不同情形, 由于  $g_i$ 、 $f_i$  的不同分解形式, 使解码算法中调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  与  $\mathcal{S}_{k+i}$  中点的实、虚部有不同的关联关系, 进而形成对调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  的结构有不同的限制。

对于情形 1 而言, 由于是对调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  ( $1 \leq i \leq 2k$ ) 中点的实、虚部联合解码, 也就是对复符号  $x_i$  ( $1 \leq i \leq 2k$ ) 独立解码, 因此对调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  ( $1 \leq i \leq 2k$ ) 没有任何限制。

对于情形 2 而言, 是对调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  与  $\mathcal{S}_{k+i}$  ( $1 \leq i \leq k$ ) 中的点的实部联合解码和虚部联合解码, 因此要求调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  与  $\mathcal{S}_{k+i}$  ( $1 \leq i \leq k$ ) 中的点的实、虚部是相互独立的, 因此要求调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  与  $\mathcal{S}_{k+i}$  ( $1 \leq i \leq k$ ) 是正方形或矩形 QAM。

对于情形 3 而言, 是对调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  中的点的实部与  $\mathcal{S}_{k+i}$  ( $1 \leq i \leq k$ ) 中的点的虚部联合解码以及调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  中的点的虚部与  $\mathcal{S}_{k+i}$  ( $1 \leq i \leq k$ ) 中的点的实部联合解码, 因此要求调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  与  $\mathcal{S}_{k+i}$  ( $1 \leq i \leq k$ ) 中的点的实、虚部是相互独立的, 即同样要求调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  与  $\mathcal{S}_{k+i}$  ( $1 \leq i \leq k$ ) 是正方形或矩形 QAM。

另外还需要注意的是, 上面三种情形分类是完备的; 非奇异线性变换矩阵  $U_i$  仅与四个变量  $(r_i, r_{k+i}, \varsigma_i, \varsigma_{k+i})$  有关, 对于距离增益矩阵的满秩性和最大似然解码算法是基于实符号对的最小复杂度性是充分的。

## 7.4 非奇异线性变换矩阵 $U_i$ 的设计

本节分析上面所述三种情形下非奇异线性变换矩阵  $U_i$  的特征, 即非奇异线性变换矩阵  $U_i$  使最大似然解码算法是基于实符号对复杂度所应有的结构。还给出了在准正交空时编码矩阵具有最大分集增益意义下非奇异线性变换矩阵  $U_i$  的最优设计。

### 7.4.1 非奇异线性变换矩阵 $U_i$ 对最大似然解码为实符号对复杂度的充分必要条件

对最大似然解码公式中的二次型公式 (7.27), 有

$$\left. \begin{aligned} g_i(p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i}) &= (p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i}) \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{bmatrix} (p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i})^T \\ f_i(p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i}) &= (p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i}) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_2 \\ I_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} (p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i})^T \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

结合式 (7.26), 对应二次型公式应有

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_i(r_i, r_{k+i}, s_i, s_{k+i}) &= (r_i, r_{k+i}, s_i, s_{k+i}) U_i^T \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{bmatrix} U_i (r_i, r_{k+i}, s_i, s_{k+i})^T \\ \bar{f}_i(r_i, r_{k+i}, s_i, s_{k+i}) &= (r_i, r_{k+i}, s_i, s_{k+i}) U_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_2 \\ I_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} U_i (r_i, r_{k+i}, s_i, s_{k+i})^T \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

**定理 7.1** 假设式 (7.26) 中的维数为  $4 \times 4$  的非奇异线性变换矩阵  $U_i$  为实矩阵, 则有下面结论:

(1) 情形 1 成立当且仅当非奇异线性变换矩阵  $U_i$  可写为

$$U_i = \begin{bmatrix} U_{i,1} & U_{i,2} \\ U_{i,1}V_{i,1} & U_{i,2}V_{i,2} \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

式中,  $U_{i,1}$ 、 $U_{i,2}$ 、 $V_{i,1}$ 、 $V_{i,2}$  全为  $2 \times 2$  的实矩阵; 且  $V_{i,1}^2 = I_2$ ;  $V_{i,2}^2 = I_2$  以及

$$U_{i,1}^T U_{i,2} + V_{i,1}^T U_{i,1}^T U_{i,2} V_{i,2} = \mathbf{0} \text{ 等价于 } V_{i,1}^T U_{i,1}^T U_{i,2} + U_{i,1}^T U_{i,2} V_{i,2} = \mathbf{0}$$

(2) 情形 2 成立当且仅当非奇异线性变换矩阵  $U_i$  可写为

$$U_i = \begin{bmatrix} U_{i,1} & U_{i,2} \\ U_{i,1}V_{i,1} & U_{i,2}V_{i,2} \end{bmatrix} P_1 \quad (7.35)$$

式中,  $U_{i,1}$ 、 $U_{i,2}$ 、 $V_{i,1}$ 、 $V_{i,2}$  与情形 1 所给相同, 而

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(3) 情形 3 成立当且仅当非奇异线性变换矩阵  $U_i$  可写为

$$U_i = \begin{bmatrix} U_{i,1} & U_{i,2} \\ U_{i,1}V_{i,1} & U_{i,2}V_{i,2} \end{bmatrix} P_2 \quad (7.36)$$

式中,  $U_{i,1}$ 、 $U_{i,2}$ 、 $V_{i,1}$ 、 $V_{i,2}$  与情形 1 所给相同, 而

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此定理的证明在附录 C 中。

从上面通用的线性符号变换公式的建立过程我们看到, 如果式 (7.26) 中的非奇异线性变换矩阵  $U_i$  满足定理 7.1, 则对应的准正交空时码具有实符号对的最大似然解码复杂度。如同上面讨论中所述, 对于不同情形, 对信息调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  的结构可能有不同的要求。

如果式 (7.26) 中的非奇异线性变换矩阵  $U_i$  满足定理 7.1 中的情形 1, 则信息调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  可以是任何形状的 QAM 均能使对应准正交空时码具有实符号对的最大似然解码复杂度; 而如果式 (7.26) 中的非奇异线性变换矩阵  $U_i$  满足定理 7.1 中的情形 2 或 3, 则信息调制符号星座图  $\mathcal{S}_i$  必须是矩形或正方形的 QAM 才能保证对应的准正交空时码具有实符号对的最大似然解码复杂度。

为使讨论的问题简单化, 下面仅考虑非奇异线性变换矩阵  $U_i$  满足定理 7.1 中的情形 1。从定理 7.1 本身来说, 显然存在有无限多个式 (7.26) 中的非奇异线性变换矩阵  $U_i$ , 能使对应的准正交空时码具有实符号对的最大似然解码复杂度。可问题是我们要求出满足定理 7.1 且在信号平均传输功率一定的约束条件下, 准正交空时分组码具有最大分集积的最佳非奇异线性变换矩阵  $U_i$ , 为叙述方便, 记满足这些特定条件的  $U_i$  的解集合为  $\mathcal{U}$ , 即上述问题可以表述为优化问题

$$\max_{U_i \in \mathcal{U}} \zeta[\mathcal{Q}_{2N_T}(z_1, z_2, \dots, z_{2k})] \quad (7.37)$$

在求解式 (7.37) 之前, 先考查一下参考文献[32-33]提出的旋转方法, 一方面作为实际例子, 另一方面也给予我们一定感性认知。在参考文献[33]中, 其旋转方法是

$$(p_i, p_{k+i})^T = \mathbf{R}_\theta (r_i, r_{k+i})^T \text{ 和 } (q_i, q_{k+i}) = \mathbf{R}_\theta (s_i, s_{k+i})^T \quad (7.38)$$

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

式中,  $\mathbf{R}_\theta$  是一个  $2 \times 2$  的旋转矩阵。显然这个旋转仅对应于定理 7.1 中的情形 2, 这样对应式 (7.35) 的矩阵  $U_i$  可以写作

$$U_i = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & -\cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

除去矩阵  $P_1$  的影响后, 对应变换矩阵为

$$U_i = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} P_1; \quad V_{i,1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_{i,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

在参考文献[32]中, 其旋转方法是

$$(p_i, q_i)^T = R_\theta(r_i, \varsigma_i)^T \text{ 和 } (p_{k+i}, q_{k+i}) = R_\theta(r_{k+i}, \varsigma_{k+i})^T \quad (7.39)$$

式中,  $R_\theta$  是一个  $2 \times 2$  的旋转矩阵。显然这个旋转仅对应于定理 7.1 中的情形 1, 这样对应式 (7.34) 的矩阵  $U_i$  可以写作

$$U_i = \begin{bmatrix} R_\theta & \theta \\ \theta & R_\theta \end{bmatrix}$$

参考文献[32-33]已经证明在调制符号星座图为正方形或矩形 QAM 时, 能够使准正交空时分组码具有最大分集积意义下的最佳旋转角度为

$$\theta_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} = 0.2318 \text{ (弧度)} = 13.2825^\circ$$

另外, 参考文献[26]在无任何限制条件下利用最佳复符号旋转构造出相应线性变换矩阵  $U_i$ , 使得对应准正交空时分组码具有最大分集积, 且在复符号对最大似然解码算法复杂度意义下所有可能线性变换中的最佳解。

最优化问题 (7.37) 的解  $U_i$  所对应的分集积是对应于实符号对最大似然解码算法复杂度, 因而可能小于参考文献[26]所得到的复符号对最大似然解码算法复杂度所对应的分集积。

基于对情形 1 至情形 3 的上述认识, 有必要对不同形状的调制符号星座图讨论对应的线性变换矩阵  $U_i$  的构造。

## 7.4.2 正方形 QAM 情形下的最佳线性变换

考虑正方形 QAM 调制符号星座图, 即  $M^2$ -QAM,  $M$  是任意正整数。我们要给出与  $M$  无关的但与正方形 QAM 星座图有关的优化问题 (7.37) 的解, 在后面还将要给出对应矩形 QAM 调制符号星座图情形下优化问题 (7.37) 的解。

从图 7.6 和上面的讨论, 若记矢量  $p_i = (p_i, q_i)^T$ ,  $\zeta_i = (r_i, \varsigma_i)^T$ , 可以得到如下的映射关系

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_{k+1} \\ \cdots \\ p_k \\ p_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & \cdots & \theta \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta & \cdots & U_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_{k+1} \\ \cdots \\ \zeta_k \\ \zeta_{2k} \end{bmatrix}$$

对于  $M^2$ -QAM,  $x_i = r_i + j\varsigma_i$  ( $i=1, 2, \dots, 2k$ ), 其中  $r_i, \varsigma_i \in \mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}$  为整数集合。非奇异矩阵  $U_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) 为  $4 \times 4$  实矩阵。因而发送符号格点  $p_i, q_i$  的平均信号功率由格点生成矩阵  $U_i$  决定, 即取决于因子

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^k |\det(\mathbf{U}_i)|}$$

所以准正交空时分组码  $\mathbf{Q}_{2N_T}$  的归一化分集积考虑到平均信号功率约束时对应表达式为

$$\bar{\zeta}(\mathbf{Q}_{2N_T}) = \frac{\zeta(\mathbf{Q}_{2N_T})}{\prod_{i=1}^k |\det(\mathbf{U}_i)|}$$

式中,  $\zeta(\mathbf{Q}_{2N_T})$  是准正交空时分组码  $\mathbf{Q}_{2N_T}(z_1, z_2, \dots, z_{2k})$  的分集积。所以优化问题 (7.37) 转化为: 求解非奇异线性变换矩阵  $\mathbf{U}_i$  满足定理 7.1 使得分集积  $\bar{\zeta}(\mathbf{Q}_{2N_T})$  取得最大值。为求解此优化问题, 有如下的定理:

定理 7.2 设

$$\alpha = \arctan 2 = 1.1071, \quad \mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

且  $\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{P}_2$  为分别定义于定理 7.1 情形 2 和情形 3 的  $4 \times 4$  矩阵。我们分别有下面结论:

(1) 情形 1 设

$$\mathbf{U}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{R}_\alpha & -\mathbf{R}_\alpha \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

式中,  $\mathbf{U}_i$  是一个正交矩阵, 且满足定理 7.1 情形 1 中对  $\mathbf{U}_i$  中各个分块的关系要求。因此式 (7.27) 中二次型函数  $g_i$ 、 $f_i$  有式 (7.28) 的形式分解。进一步,  $\mathbf{U}_i$  在优化问题 (7.37) 取得最大值的意义下是最佳的, 即

$$\max_{\mathbf{U}_i \in \mathcal{U}} \bar{\zeta}[\mathbf{Q}_{2N_T}] = \frac{1}{2\sqrt{2}N_T} \left(\frac{4}{5}\right)^{1/4} \quad (7.41)$$

(2) 情形 2 设

$$\mathbf{U}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{R}_\alpha & -\mathbf{R}_\alpha \end{bmatrix} \mathbf{P}_1 \quad (7.42)$$

则正交矩阵  $\mathbf{U}_i$  满足定理 7.1 情形 2 中对  $\mathbf{U}_i$  中各个分块的关系要求, 且  $\mathbf{U}_i$  在优化问题 (7.37) 取得最大值 (7.41) 的意义下是最佳的。

(3) 情形 3 设

$$\mathbf{U}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{R}_\alpha & -\mathbf{R}_\alpha \end{bmatrix} \mathbf{P}_2 \quad (7.43)$$

则正交矩阵  $\mathbf{U}_i$  满足定理 7.1 情形 3 中对  $\mathbf{U}_i$  中各个分块的关系要求, 且  $\mathbf{U}_i$  在优化问题 (7.37) 取得最大值 (7.41) 的意义下是最佳的。在附录 D 中给出了关于定理 7.2 的证明。

对于正方形 QAM 调制星座图, 关于所讨论的情形 1 至情形 3, 在准正交空时码具有实符号对最大似然解码复杂度意义下, 上面讨论的旋转变换是充分的, 同时, 满足定理 7.1 情形 1~3 的线性变换  $\mathbf{U}_i$  分别使得对应分集积  $\bar{\zeta}(\mathbf{Q}_{2N_T})$  取得最大值。

由于旋转关系 (7.38) 仅仅分别涉及第  $i$  个和第  $k+i$  个复符号的实部以及第  $i$  个和第  $k+i$  个复符号的虚部, 旋转关系 (7.38) 不适用于定理 7.1 的情形 1 和 3。需强调情形 1 应该给予特别的关注, 因为此情形 1 对应的实符号对最大似然解码不是关于两个复符号对的

实部或虚部，而是对应于单个复符号的实、虚部，且对应调制星座图  $\mathcal{S}_i$  可以是任何 QAM，同时对应准正交空时码具有满分集增益和好的分集积性质。但是我们还不能证明对于任意 QAM 调制符号星座图，上述的非奇异线性变换  $U_i$  在分集积最大化意义下是最佳的。关于这一点，将在后文给予讨论。

### 7.4.3 矩形 QAM (RQAM) 情形下的最佳线性变换

考虑矩形 QAM 调制符号星座图  $\mathcal{S}$  具有总格点数  $N \cdot M$ ，则调制符号星座图  $\mathcal{S}$  的总能量  $\mathcal{TE}$  为

$$\mathcal{TE} = \frac{2}{3} NM(2N^2 + 2M^2 - 1)d^2$$

假设调制符号星座图  $\mathcal{S}$  的总能量为归一化的，即  $\mathcal{TE} = 1$ 。所以星座图  $\mathcal{S}$  中相邻两点的距离

$$d = \sqrt{\frac{3}{2NM(2N^2 + 2M^2 - 1)}}$$

由于在准正交空时码矩阵  $\mathbf{Q}_{2N_T}(z_1, z_2, \dots, z_{2k})$  中有  $2k$  个变量，因此复信息符号  $z_1, z_2, \dots, z_{2k}$  的总能量是  $2k$ 。这里以定理 7.1 情形 1 为例，其他情形类似讨论。

非奇异线性变换  $U_i$  将矩形 QAM 调制符号星座图  $\mathcal{S}$  中的点  $x_i = r_i + j\varsigma_i$  ( $1 \leq i \leq 2k$ ) 变换为准正交空时码矩阵  $\mathbf{Q}_{2N_T}(z_1, z_2, \dots, z_{2k})$  中的  $z_i = p_i + jq_i$  ( $1 \leq i \leq 2k$ )。为简化讨论，要求两个符号星座图总能量（在线性变换  $\{U_i\}_{i=1}^k$  前后）保持不变，即线性变换  $\{U_i\}_{i=1}^k$  是总能量不变的。而总能量不变性意味着

$$\sum_{i=1}^k \left( \sum_{p_i + jq_i \in \mathcal{D}_i} (p_i^2 + q_i^2) + \sum_{p_{k+i} + jq_{k+i} \in \mathcal{D}_{k+i}} (p_{k+i}^2 + q_{k+i}^2) \right) = 2k \quad (7.44)$$

式中，对于  $i=1, 2, \dots, 2k$ ，离散点集合  $\mathcal{D}_i$  的定义为

$$\mathcal{D}_i = \{p_i + jq_i : x_i = r_i + j\varsigma_i \in \text{RQAM}, x_{(k+i) \bmod 2k} = r_{(k+i) \bmod 2k} + j\varsigma_{(k+i) \bmod 2k} \in \text{RQAM}\}$$

因为非奇异线性变换  $U_i$  满足定理 7.1 情形 1，所以

$$\begin{aligned} p_i^2 + q_i^2 + p_{k+i}^2 + q_{k+i}^2 &= (p_i, p_{k+i}, q_i, q_{k+i})(p_i, p_{k+i}, q_i, q_{k+i})^T \\ &= (r_i, r_{k+i}, \varsigma_i, \varsigma_{k+i})\mathbf{U}_i^T \mathbf{U}_i (r_i, r_{k+i}, \varsigma_i, \varsigma_{k+i})^T \\ &= (r_i, \varsigma_i, r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1} & \mathbf{U}_{i,2} \\ \mathbf{U}_{i,1}\mathbf{V}_{i,1} & \mathbf{U}_{i,2}\mathbf{V}_{i,2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1} & \mathbf{U}_{i,2} \\ \mathbf{U}_{i,1}\mathbf{V}_{i,1} & \mathbf{U}_{i,2}\mathbf{V}_{i,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \\ r_{k+i} \\ \varsigma_{k+i} \end{pmatrix} \\ &= (r_i, \varsigma_i, r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{V}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \\ r_{k+i} \\ \varsigma_{k+i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= (r_i, \varsigma_i) (\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1}) \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} + (r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) (\mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{V}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2}) \begin{pmatrix} r_{k+i} \\ \varsigma_{k+i} \end{pmatrix}$$

所以总能量不变性表现为

$$2k = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{r_i + j\varsigma_i \in \text{RQAM}} (r_i, \varsigma_i) (\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1}) \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} + \sum_{r_{k+i} + j\varsigma_{k+i} \in \text{RQAM}} (r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) (\mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{V}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2}) \begin{pmatrix} r_{k+i} \\ \varsigma_{k+i} \end{pmatrix} \right)$$

为满足这个总能量不变性要求，给出如下定理。

**定理 7.3** 对于所关注的情形 1 至情形 3，有下面一系列结果：

(1) 对于情形 1 和具有总能量为 1 的 RQAM 调制符号星座图，设

$$\varepsilon = \frac{4N^2 - 1}{2(2N^2 + 2M^2 - 1)}; \quad \wp = \frac{4M^2 - 1}{2(2N^2 + 2M^2 - 1)}; \quad \alpha = \arctan 2 = 1.1071; \quad \rho = \sqrt{\frac{5}{12(1 + \varepsilon \cdot \wp)}}$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \mathbf{J}_2; \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & 1 - 2\varepsilon \\ 1 - 2\varepsilon & 2 - \varepsilon \end{bmatrix}$$

显然矩阵  $\mathbf{V}_1$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{\Sigma}$  均为对称矩阵。假设矩阵  $\mathbf{\Sigma}$  的对角化为  $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^T$ ，其中对角矩阵  $\mathbf{D} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ， $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  为矩阵  $\mathbf{\Sigma}$  的特征值，而  $\mathbf{W}$  为正交矩阵。设

$$\mathbf{U}_{i,1} = \rho \mathbf{W} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} \mathbf{W}^T; \quad \mathbf{U}_{i,2} = \rho \mathbf{W} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1} \end{bmatrix} \mathbf{W}^T \mathbf{P}; \quad \mathbf{V}_2 = -\mathbf{P}\mathbf{V}_1\mathbf{P}$$

则

$$\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1} & \mathbf{U}_{i,2} \\ \mathbf{U}_{i,1}\mathbf{V}_1 & \mathbf{U}_{i,2}\mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

为所有满足定理 7.1 的情形 1 的线性变换矩阵中对应的准正交空时码具有最大分集积意义下是最佳的，其分集积（以发现者首个字母大写来表示）为

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{opt,WWX}} &= \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \frac{d}{(1 + \varepsilon \cdot \wp)^{1/4}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \sqrt{\frac{3}{N \cdot M \sqrt{16N^4 + 16M^4 + 48N^2M^2 - 20N^2 - 20M^2 + 5}}} \end{aligned} \quad (7.45)$$

(2) 对于情形 2

$$\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1} & \mathbf{U}_{i,2} \\ \mathbf{U}_{i,1}\mathbf{V}_1 & \mathbf{U}_{i,2}\mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \mathbf{P}_1 \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

为最佳非奇异线性变换矩阵，其中  $\mathbf{P}_1$  为定义于定理 7.1 情形 2 的  $4 \times 4$  矩阵。

(3) 对于情形 3

$$\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1} & \mathbf{U}_{i,2} \\ \mathbf{U}_{i,1}\mathbf{V}_1 & \mathbf{U}_{i,2}\mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \mathbf{P}_2 \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

为最佳非奇异线性变换矩阵，其中  $\mathbf{P}_2$  为定义于定理 7.1 情形 3 的  $4 \times 4$  矩阵。在附录 E 中给出了关于定理 7.3 的证明。

**注意：**通过一个  $T \times N_T$  维的复正交设计  $\mathbf{G}_{N_T}(z_1, z_2, \dots, z_k)$  得到相应  $2T \times 2N_T$  维准正交空时分组码  $\mathbf{Q}_{2N_T}(z_1, z_2, \dots, z_k)$ ，因此分集积 (7.45) 中相应分母因子为  $\sqrt{2N_T}$ 。另外，由于矩形 QAM (RQAM) 符号调制星座图包含正方形 QAM 符号调制星座图，因此，在上述定理中可以令  $N = M$ ，则有  $\varepsilon = \rho = 1/2$ ； $\rho = \sqrt{1/3}$ ； $\Sigma = (3/2)\mathbf{I}_2$ ；所以  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3/2$ ； $\mathbf{U}_{i,1} = \mathbf{U}_{i,2} = (1/\sqrt{2})\mathbf{I}_2$ ，即最佳线性变换矩阵  $\mathbf{U}_i$  与定理 7.2 所得一致，故有如下推论。

**推论 7.1** 对于一个尺寸为  $M^2$  的正方形 QAM 符号调制星座图，对于所有满足定理 7.1 的非奇异线性变换矩阵  $\mathbf{U}_i$  所对应的准正交空时分组码，其最佳分集积为

$$\zeta_{\text{opt}} = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5M^2(4M^2-1)}}} = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} d \quad (7.46)$$

如上面已经指出的，定理 7.2 和定理 7.3 中的情形 1 和情形 2 线性变换矩阵  $\mathbf{U}_i$  所对应的最佳旋转分别不同于参考文献[32]和[33]所得到的最佳旋转，但是对应的最佳分集积是相同的，即对尺寸为  $M^2$  的正方形 QAM 符号调制星座图最佳分集积均为式 (7.46)。

考查定理 7.2 和定理 7.3，虽然有两个不同的能量归一化和不同的证明，非奇异最佳线性变换矩阵  $\mathbf{U}_i$  对于正方形 QAM 符号调制星座图是一样的，所以可以说，定理 7.3 包含定理 7.2。

从定理 7.3 可见，非奇异最佳线性变换矩阵  $\mathbf{U}_i$  与矩形 QAM 符号调制星座图的尺寸和形状有关，即与参数  $M$  和  $N$  有关。这显然是不能通过式 (7.40) 或式 (7.42) 的旋转得到的。事实上，参考文献[32]、[33]关于式 (7.38)、式 (7.39) 的最佳旋转对于矩形 QAM 符号调制星座图的最佳分集积为

$$\zeta_{\text{opt,YGT}} = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \left(\frac{4}{5}\right)^{1/4} d = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5M \cdot N(2M^2 + 2N^2 - 1)}}} \quad (7.47)$$

显然有

$$\zeta_{\text{opt,WWX}} = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \frac{d}{\sqrt[4]{1+\varepsilon \cdot \rho}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \sqrt[4]{\frac{4}{5}} d = \zeta_{\text{opt,YGT}}$$

当且仅当  $N = M$  即当为正方形 QAM 符号调制星座图的情形等号成立，这个结论引出如下定理。

**定理 7.4** 对于任何非正方形的矩形 QAM 符号调制星座图，具有满足定理 7.3 的最佳线性变换  $\mathbf{U}_i$  的准正交空时分组码的分集积大于具有满足式 (7.40) 的最佳旋转角线性变换矩阵  $\mathbf{U}_i$  所对应的准正交空时分组码的分集积。

(解释性证明) 事实上，与适用于矩形 QAM 符号调制星座图且无任何约束的定理 7.1 中的所有可能的非奇异线性变换  $\mathbf{U}_i$  对应的准正交空时分组码的最佳分集积比较，有如下的性能顺次关系

$$\zeta_{\text{opt,SX}} = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} d_{\min} = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} d > \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \frac{1}{(1+\varepsilon \cdot \kappa)^{1/4}} = \zeta_{\text{opt,WWX}}$$

式中， $d_{\min}$  是符号调制星座图  $\mathcal{S}$  中任意两点的最小欧几里得（Euclidean）距离，在符号调制星座图  $\mathcal{S}$  为矩形 QAM 情形下， $d_{\min} = d$ 。

在参考文献[26]中已经证明，对于任意符号调制星座图  $\mathcal{S}$  和关于符号调制星座图的任何非奇异线性变换， $d_{\min} / (2\sqrt{2N_T})$  是所有对应的准正交空时分组码的分集积的上界。例如，对于一个  $8 \times 4$ -矩形 QAM 符号调制星座图，也就是  $N = 4$ 、 $M = 2$ ；以及  $4 \times 4$  的准正交空时分组码，即  $N_T = 2$ ，则有

$$\zeta_{\text{opt,SX}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{43264}} > \frac{1}{4\sqrt[4]{49984}} = \zeta_{\text{opt,WWX}} > \frac{1}{4\sqrt[4]{54080}} = \zeta_{\text{opt,YGT}}$$

#### 7.4.4 关于任何格点上的任意 QAM 调制符号星座图的非奇异线性变换

本节先建立关于矩形 QAM (RQAM) 调制星座图在任意格点上的最佳非奇异线性变换  $U_i$ ，然后再进一步分析、研究此最佳非奇异线性变换  $U_i$  关于任意形状 QAM 调制星座图和任意格点上调制星座图的性能。

如前所述，当两个复信息符号的两个实部或两个虚部或一个复信息符号的实部与另外一个复信息符号的虚部联合及独立解码时，必须要求复信息符号的实部与虚部相互独立。这一要求使得复符号调制星座图必须是正方形格点上的矩形 QAM (RQAM)。这种情形下一些通用的调制复符号星座图，例如，图 7.1 (e)、(h)、(d) 所示的 32-QAM 和等边三角形格点或圆形调制复符号星座图将被排除在外。因而上面所述的情形 2 和情形 3 不能应用于任意（非矩形）QAM 符号调制星座图。另外，若一个复信息符号的实部和虚部没有分成两个独立部分进行解码，如上面所述的情形 1，则对于基于实符号对最小复杂度最大似然解码算法的准正交空时分组码的复信息符号的实部和虚部就无必要一定是相互独立的。在这种情形下，复符号调制星座图可以是任何有限复数集合。对于基于实符号对最小复杂度最大似然解码算法的准正交空时分组码，情形 1 是仅有的非奇异线性变换矩阵  $U_i$ 。

首先考虑复平面上任意（非整数）格点的矩形 QAM 符号调制星座图。复平面上的任意 2 维实矢量格点可以由整数格点通过一个  $2 \times 2$  非奇异矩阵  $\mathcal{K}$  生成，即

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \mathcal{K} \begin{bmatrix} r \\ \varsigma \end{bmatrix}$$

式中， $r$ 、 $\varsigma$  是整数，称为  $\mathcal{K}$  格点。一个格点  $\mathcal{K}$  上的矩形形状的（或 QAM）符号调制星座图  $\bar{\mathcal{S}}$  对应于一个正方形或整数格点上的矩形 QAM 符号调制星座图  $\mathcal{S} = \{(r, \varsigma) : (r, \varsigma)\mathcal{K}^T = (\alpha, \beta) \in \bar{\mathcal{S}}\}$ 。这样就可以将上面所有可以应用于正方形或整数格点上的矩形 QAM 符号调制星座图的结论通过将格点变换矩阵  $\mathcal{K}$  合并于非奇异线性变换矩阵  $U_i$ ，并应用于任意（非整数）格点的矩形 QAM 符号调制星座图。

对于一个一般格点  $\mathcal{K}$  上的矩形形状 QAM 符号调制星座图  $\bar{\mathcal{S}}$ ，其实部  $\alpha$ 、虚部  $\beta$  ( $\bar{x} = \alpha + j\beta \in \bar{\mathcal{S}}$ ) 可能是相关的。这样，上面关于情形 2 和情形 3 所得的结果就不能应用

于这样一个一般格点上的矩形 QAM 符号调制星座图。但对于情形 1 而言，因为不要求其复符号的实虚部是相互独立的，因此有下面推论。

**推论 7.2** 对于一个格点  $\mathcal{K}$  上的矩形 QAM 符号调制星座图  $\bar{\mathcal{S}}$  和一个  $2 \times 2$  非奇异矩阵  $\mathcal{K}$ ，令

$$\bar{U}_i = U_i \text{diag}\{\mathcal{K}^{-1}, \mathcal{K}^{-1}\}$$

式中， $U_i$  是定理 7.3 情形 1 所定义的非奇异线性变换矩阵。假设信息符号  $\bar{x} = \alpha + j\beta$  随机地取之于格点  $\mathcal{K}$  上的矩形 QAM 符号调制星座图  $\bar{\mathcal{S}}$ ，则遵从上面所述的编码规则，分别用  $\alpha_i$ 、 $\beta_i$ 、 $\bar{x}_i$ 、 $\bar{p}_i$ 、 $\bar{q}_i$ 、 $\bar{z}_i$ 、 $\bar{U}_i$  代替  $r_i$ 、 $\zeta_i$ 、 $x_i$ 、 $p_i$ 、 $q_i$ 、 $z_i$ 、 $U_i$ ；则  $\bar{U}_i$  在对应准正交空时码具有实符号对最大似然解码复杂度和最大分集积意义下是最佳的。

而对于任意格点上的任意 QAM 符号调制星座图，我们有如下结果。

**定理 7.5** 设非奇异线性变换矩阵  $\bar{U}_i$  如推论 7.2 所定义，而  $U_i$  如定理 7.3 的情形 1 所定义，则具有这些线性变换的准正交空时码对于任意格点上的任意 QAM 符号调制星座图具有实符号对最大似然解码复杂度和满分集增益。

**证明** 不失一般性，仅考虑正方形格点的情形，也就是格点变换矩阵  $\mathcal{K} = I_2$ 。令符号调制星座图  $\mathcal{S}$  为正方形格点上任意有限点集合，增加适当的若干个点使符号调制星座图  $\mathcal{S}$  变为尺寸是  $N \times M$  的矩形 QAM 符号调制星座图  $\bar{\mathcal{S}}$ 。显然，若一个准正交空时码矩阵  $\mathcal{Q}$  关于尺寸为  $N \times M$  的矩形 QAM 符号调制星座图  $\bar{\mathcal{S}}$  是满分集的，则它关于子集符号调制星座图  $\mathcal{S}$  也应该是满分集的。对于尺寸为  $N \times M$  的矩形 QAM 符号调制星座图  $\bar{\mathcal{S}}$ ，应用定理 7.3 情形 1 的结果，我们知道对应准正交空时码矩阵  $\mathcal{Q}$  具有最佳分集积和最小复杂度实符号对最大似然解码。所以关于子集符号调制星座图  $\mathcal{S}$  也应该具有最佳分集积和最小复杂度实符号对最大似然解码。

上述定理肯定了对于任意格点上的任意 QAM 符号调制星座图，非奇异线性变换矩阵  $\bar{U}_i$  所对应的准正交空时码具有实符号对最大似然解码最小复杂度满分集增益特性，但是没有确定其对应分集积是否为最大。由定理 7.3，非奇异线性变换矩阵  $U_i$  所对应的准正交空时码的分集积为

$$\zeta_{\text{wvx}} = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1+\varepsilon \cdot \rho}} \cdot d$$

式中， $\varepsilon$ 、 $\rho$  如定理 7.3 所定义，若在定理 7.3 中  $N = M$ ，则非奇异线性变换矩阵  $U_i$  所对应的准正交空时码的分集积为

$$\zeta_{\text{wvx}} = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{5}} \cdot d$$

而在参考文献[26]中，在所有非奇异线性变换中，准正交空时码的最佳分集积为

$$\zeta_{\text{opt,SX}} = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \cdot d$$

此处参数  $d$  与前述相同，为相关能量归一化符号调制星座图  $\mathcal{S}$  中任意两点的最小欧氏 (Euclidean) 距离。



**例 7.1** 考虑一个 32-QAM 调制符号星座图  $\mathcal{S}$  (如图 7.1 所示), 采用定理 7.3 所建立的非奇异线性变换矩阵  $U_i$ , 则  $\zeta_{\text{wwx}} = 0.0187$ , 而参考文献[26]所述的最佳分集积为  $\zeta_{\text{opt,SX}} = 0.0198$ 。

**例 7.2** 考虑一个 32(8×4)-矩形 QAM 调制符号星座图  $\mathcal{S}$ , 仍采用定理 7.3 所建立的非奇异线性变换矩阵  $U_i$ , 则  $\zeta_{\text{opt,wwx}} = 0.0167$ , 而参考文献[26]所述的最佳分集积为  $\zeta_{\text{opt,SX}} = 0.0173$ 。

## 7.5 关于矩形 QAM 调制符号星座图和坐标交织正交设计的最佳线性变换

关于坐标交织正交设计的论述可以参考文献[28-31]。这里的论述较多地参考了 Khan-Rajan<sup>[29-30]</sup>的结果。坐标交织设计的主要思想是通过坐标交织变换, 将同一信息符号的实、虚部通过不同的时隙、不同的信道传输, 以期实现信号的空时分集及其可靠性传输的目的。

### 7.5.1 坐标交织正交设计编码的概念

在此仍然以 4 个发射天线阵元为例进行叙述, 其结果很容易推广到 8 个发射天线阵元及更多个发射天线阵元的情形。

**定义 7.3** 坐标交织正交设计 (Coordinate-Interleaved Design, CID) 设  $x_i = x_{i,\mathcal{R}} + jx_{i,\mathcal{I}}$  ( $i=0,1,2,3$ ) 为调制符号星座图  $\mathcal{S}$  中的点, 其中  $x_{i,\mathcal{R}}$  和  $x_{i,\mathcal{I}}$  分别是变量  $x_i$  的实、虚部,  $j = \sqrt{-1}$  是虚单位; 令

$$\tilde{x}_i = x_{i,\mathcal{R}} + jx_{(i+2)_4,\mathcal{I}} \quad (i=0,1,2,3)$$

其中  $(a)_k = a \bmod k$ 。变量  $\tilde{x}_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) 称为变量  $x_i$  的坐标交织。而对应坐标交织正交设计编码矩阵为

$$\mathcal{G}_4(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & 0 & 0 \\ -\tilde{x}_1^* & \tilde{x}_0^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 \\ 0 & 0 & -\tilde{x}_3^* & \tilde{x}_2^* \end{bmatrix} \quad (7.48)$$

容易验证

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= x_{0,\mathcal{R}} + jx_{2,\mathcal{I}} \\ \tilde{x}_1 &= x_{1,\mathcal{R}} + jx_{3,\mathcal{I}} \\ \tilde{x}_2 &= x_{2,\mathcal{R}} + jx_{0,\mathcal{I}} \\ \tilde{x}_3 &= x_{3,\mathcal{R}} + jx_{1,\mathcal{I}} \end{aligned}$$

注意变量  $\tilde{x}_i$  的虚部的变化规则满足  $(00\ 01\ 10\ 11) \oplus_2 10$ , 其中  $\oplus_2$  表示 mod 2 和。同时注意还有结果

$$\begin{aligned}\tilde{x}_0 &= \tilde{x}_{0,\mathcal{R}} + j\tilde{x}_{2,\mathcal{I}} = x_{0,\mathcal{R}} + jx_{0,\mathcal{I}} = x_0 \\ \tilde{x}_1 &= \tilde{x}_{1,\mathcal{R}} + j\tilde{x}_{3,\mathcal{I}} = x_{1,\mathcal{R}} + jx_{1,\mathcal{I}} = x_1 \\ \tilde{x}_2 &= \tilde{x}_{2,\mathcal{R}} + j\tilde{x}_{0,\mathcal{I}} = x_{2,\mathcal{R}} + jx_{2,\mathcal{I}} = x_2 \\ \tilde{x}_3 &= \tilde{x}_{3,\mathcal{R}} + j\tilde{x}_{1,\mathcal{I}} = x_{3,\mathcal{R}} + jx_{3,\mathcal{I}} = x_3\end{aligned}$$

即坐标交织信号的坐标交织为原信号。

显然坐标交织正交设计编码矩阵  $\mathcal{G}_4(x_0, x_1, x_2, x_3)$  是在  $4 \times 4$  维编码矩阵的对角块上放置两个 Alamouti 正交空时编码矩阵，而在其他非对角块上放置  $2 \times 2$  维的零矩阵。

特别需要注意的是，当变量  $x_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) 为调制符号星座图  $\mathcal{S}$  中的点时，而坐标交织正交设计编码矩阵  $\mathcal{G}_4(x_0, x_1, x_2, x_3)$  中的元素为这些变量的坐标交织变换，它们不是调制符号星座图  $\mathcal{S}$  中的点，而是调制符号星座图  $\mathcal{S}$  的坐标交织变换衍生星座图  $\tilde{\mathcal{S}}$  中的点。如图 7.7 (a)、(d) 所示，坐标交织变换衍生星座图  $\tilde{\mathcal{S}}$  中有 8 个点而原调制符号星座图  $\mathcal{S}$  中仅有 4 个点。在图 7.7 (c) 中，调制符号星座图  $\mathcal{S}_\theta$  是调制符号星座图  $\mathcal{S}$  的一个逆时针旋转角  $\theta=13.2825^\circ$  的旋转变换，即  $\mathcal{S}_\theta = \{e^{j\theta}, -e^{j\theta}, je^{j\theta}, -je^{j\theta}\}$ ；但坐标交织变换衍生星座图  $\tilde{\mathcal{S}}_\theta$  有 16 个点，如图 7.7 (d) 所示。

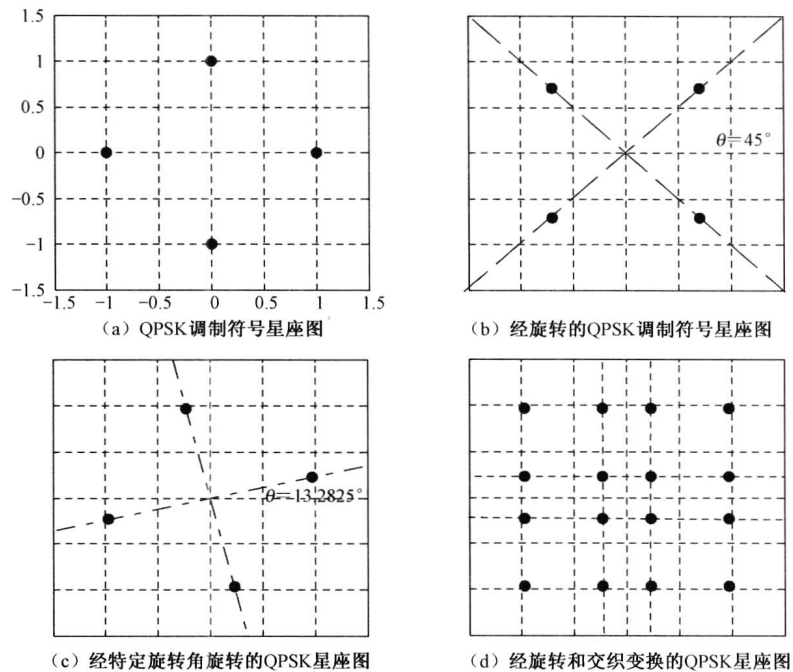


图 7.7 原始、交织、最佳旋转和交织衍生变换 QPSK 调制符号星座图

另外一个需要特别注意的是，坐标交织正交设计编码矩阵  $\mathcal{G}_4(x_0, x_1, x_2, x_3)$  对应最大似然解码算法是关于变量  $x_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) 而不是变量  $\tilde{x}_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) 的解码。

坐标交织正交设计空时分组码与正交设计空时分组码的特性总结如下：

- (1) 坐标交织正交设计编码矩阵  $\mathcal{G}_4 = \mathcal{G}_4(x_0, x_1, x_2, x_3)$  不是一个正交矩阵，

$$\mathbf{G}_4^H \mathbf{G}_4 = \begin{bmatrix} a\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & b\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

式中, 常数  $a = |\tilde{x}_0|^2 + |\tilde{x}_1|^2$ ,  $b = |\tilde{x}_2|^2 + |\tilde{x}_3|^2$ 。

(2) 若上面的参数  $a$ 、 $b$  满足关系式  $ab \neq 0$ , 则坐标交织正交设计空时分组码  $\mathbf{G}_4$  是满秩的 (这就提供了坐标交织正交设计空时分组码满分集增益的可能性和设计途径), 且坐标交织正交设计空时分组码  $\mathbf{G}_4$  是广义正交设计空时分组码。

(3) 坐标交织正交设计空时分组码  $\mathbf{G}_4$  是适用于 4 个发射阵元的全速率传输的空时分组码矩阵, 而对于正交设计空时分组码是不存在满足 4 个发射阵元的全速率传输的空时分组码矩阵的。

(4) 考查坐标交织正交设计空时分组码  $\mathbf{G}_4$ , 则在任意给定时刻, 只有两个发射阵元发送信息符号, 而其他两个阵元没有发送任何信息符号或说其处于沉寂状态。因此, 以坐标交织正交设计空时分组码矩阵传输的系统峰均值比要大大高于正交设计空时分组码的传输系统。

### 7.5.2 坐标交织正交码的最优解码

假设系统以坐标交织正交设计空时分组码式 (7.48)  $\mathbf{G}_4$  格式传输信息, 不失一般性, 假设接收天线的阵元为 1, 则接收信号矢量为

$$\mathbf{r}_t = \sqrt{\frac{\rho}{N_T}} \mathbf{G}_4 \mathbf{h}_t + \mathbf{n}_t \quad (t = 0, 1, 2, 3) \quad (7.49)$$

式中,  $t$  为对应于坐标交织正交设计空时分组码发送格式的时隙参数;  $\rho$  是发射天线系统总的信噪比;  $\mathbf{h}_t$  是  $t$  时刻发送天线阵元与接收天线阵元间的链路增益参数矢量;  $\mathbf{n}_t$  是均值为零单边功率谱密度为  $\sigma^2$  的循环高斯白噪声矢量。因此, 对应最大似然解码算法的判决量为

$$\sum_{t=0}^3 \left\| \mathbf{r}_t - \sqrt{\rho/N_T} \mathbf{G}_4 \mathbf{h}_t \right\|^2$$

仿照第 4 章的讨论方法, 式 (7.49) 可以改写为

$$\mathbf{r}_t = \sqrt{\frac{\rho}{N_T}} \mathbf{H}_t \mathbf{g}_4 + \mathbf{n}_t \quad (t = 0, 1, 2, 3) \quad (7.50)$$

式中

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} h_{0,t} & h_{1,t} & 0 & 0 \\ h_{1,t}^* & -h_{0,t}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{2,t} & h_{3,t} \\ 0 & 0 & h_{3,t}^* & -h_{2,t}^* \end{bmatrix}$$

为链路增益参数矩阵或信道编码矩阵; 而

$$\mathbf{g}_4 = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$$

为传输符号矢量。

对式 (7.50) 两边同乘以矩阵链路增益参数矩阵  $\mathbf{H}_t^H$  得

$$\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{H}_t^H \mathbf{r}_t = \sqrt{\frac{\rho}{N_T}} \begin{bmatrix} \tilde{a} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{b} \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \mathbf{G}_4 + \mathbf{H}_t^H \mathbf{n}_t \quad (t=0,1,2,3)$$

式中,  $\tilde{a} = |h_{0,t}|^2 + |h_{1,t}|^2$ ,  $\tilde{b} = |h_{2,t}|^2 + |h_{3,t}|^2$ 。对接收数据矢量进行坐标交织变换得新的接收数据为

$$\hat{\eta}_{t,0} = \eta_{0,\mathcal{R}} + j\eta_{2,\mathcal{I}} = \tilde{a}x_{0,\mathcal{R}} + j\tilde{b}x_{0,\mathcal{I}} + \hat{n}_{t,0}$$

$$\hat{\eta}_{t,1} = \eta_{1,\mathcal{R}} + j\eta_{3,\mathcal{I}} = \tilde{a}x_{1,\mathcal{R}} + j\tilde{b}x_{1,\mathcal{I}} + \hat{n}_{t,1}$$

$$\hat{\eta}_{t,2} = \eta_{2,\mathcal{R}} + j\eta_{0,\mathcal{I}} = \tilde{b}x_{2,\mathcal{R}} + j\tilde{a}x_{2,\mathcal{I}} + \hat{n}_{t,2}$$

$$\hat{\eta}_{t,3} = \eta_{3,\mathcal{R}} + j\eta_{1,\mathcal{I}} = \tilde{b}x_{3,\mathcal{R}} + j\tilde{a}x_{3,\mathcal{I}} + \hat{n}_{t,3}$$

或  $\hat{\eta}_{t,i} = \eta_{i,\mathcal{R}} + j\eta_{(i+2)_{4},\mathcal{I}}$  ( $i=0,1,2,3$ ), 其中加性噪声矢量  $\hat{\mathbf{n}}$  是依据  $\boldsymbol{\eta}_t$  到  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  的线性变换关系对  $\mathbf{H}_t^H \mathbf{n}_t$  做相应线性变换所得。根据  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  的表达式, 考虑接收信号形式为

$$\mathbf{r} = c_1 s_{\mathcal{R}} + jc_2 s_{\mathcal{I}} + \mathbf{n}$$

式中,  $s_{\mathcal{R}}$  与  $s_{\mathcal{I}}$  分别是发送信号  $s$  的同相分量与正交分量; 常参数  $c_1 = \tilde{a}$ 、 $c_2 = \tilde{b}$  或  $c_1 = \tilde{b}$ 、 $c_2 = \tilde{a}$ ;  $\mathbf{n}$  为零均值、而同相分量  $n_{\mathcal{R}}$  与正交分量  $n_{\mathcal{I}}$  分别有方差 (平均功率) 为  $c_1 \sigma^2$ 、 $c_2 \sigma^2$  的加性高斯白噪声。所以  $\mathbf{n}$  的概率分布密度函数为

$$p_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{c_1c_2}} \exp\left(-\frac{n_{\mathcal{R}}^2}{2c_1\sigma^2} - \frac{n_{\mathcal{I}}^2}{2c_2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{c_1c_2}} \exp\left(-\frac{c_2n_{\mathcal{R}}^2 + c_1n_{\mathcal{I}}^2}{2c_1c_2\sigma^2}\right)$$

所以对应最大似然解码准则为

$$\min_{s \in \mathcal{S}} \left\{ c_2 |r_{\mathcal{R}} - c_1 s_{\mathcal{R}}|^2 + c_1 |r_{\mathcal{I}} - c_2 s_{\mathcal{I}}|^2 \right\}$$

式中,  $\mathcal{S}$  是所考虑的调制符号星座图。这样就得到坐标交织正交设计空时码具有单个复符号最大似然解码算法复杂度——最优复杂度解码。图 7.8 给出了 4 发 1 收天线系统在坐标交织正交设计空时码与准正交空时分组码情形下的性能仿真, 虽然坐标交织正交设计空时码的性能弱于准正交空时分组码, 但其解码复杂度要比准正交空时分组码低许多。

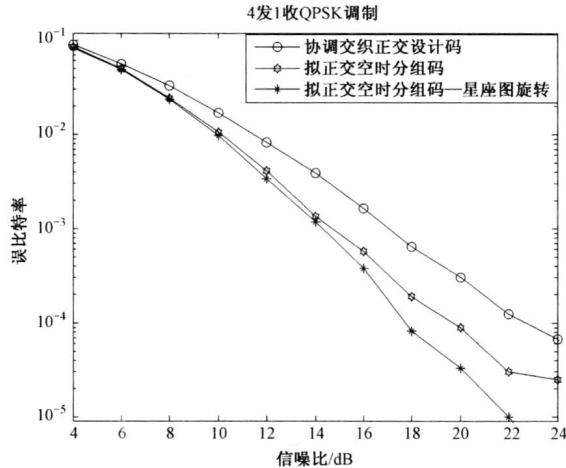


图 7.8 坐标交织正交设计编码的性能

图 7.9 给出了坐标交织正交设计编码从信源到信宿整个链路的框图形式。其特点是在发端有坐标交织编码模块与收端的合并解交织模块。

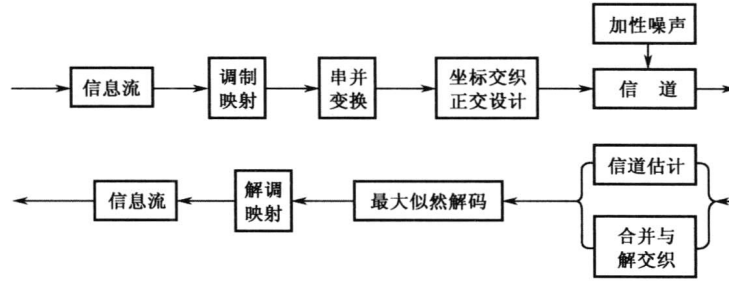


图 7.9 坐标交织编码传输链路模块

### 7.5.3 坐标交织正交码的空时分集增益和编码增益

对于式 (7.48) 定义的坐标交织正交设计编码矩阵  $\mathcal{G}_4 = \mathcal{G}_4(x_0, x_1, x_2, x_3)$ ，其对应的差错增益矩阵

$$\mathcal{G}_4^H \mathcal{G}_4 = \begin{bmatrix} aI_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & bI_2 \end{bmatrix}$$

式中，常数  $a = |\Delta\tilde{x}_0|^2 + |\Delta\tilde{x}_1|^2$ ， $b = |\Delta\tilde{x}_2|^2 + |\Delta\tilde{x}_3|^2$ ，若参数  $a$ 、 $b$  满足关系式  $ab \neq 0$ （等价于要求参数  $a$  和  $b$  均为正数），则坐标交织正交设计空时分组码  $\mathcal{G}_4$  具有满分集增益特性。借助于变量  $\tilde{x}_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) 的表达式不难得出，此条件等价于  $|\Delta x_{i,R}| |\Delta x_{i,I}| \neq 0$ ，也就是说，调制符号星座图  $\mathcal{S}$  中的任意两点不能有相同的横坐标与纵坐标。这看似非常苛刻的约束条件其实根本不是一个限制条件，因为对于任何调制符号星座图  $\mathcal{S}$  通过适当旋转变换都可以满足上述约束条件，如图 7.1 (a) 和 (b) 所示。事实上，通过对调制符号星座图  $\mathcal{S}$  做适当旋转变换还可以提高系统的编码增益。这样标量  $|\Delta x_{i,R}| |\Delta x_{i,I}|$  对于坐标交织正交设计空时分组码就具有特别的意义。

**定义 7.4** 坐标乘积距离 (Coordinate Product Distance, CPD) 调制符号星座图  $\mathcal{S}$  中任意两点  $x = x_R + jx_I$  和  $y = y_R + jy_I$  ( $x \neq y$ ) 的坐标乘积距离定义为

$$\text{CPD}(x, y) = |x_R - y_R| \cdot |x_I - y_I|$$

调制符号星座图  $\mathcal{S}$  的坐标乘积距离定义为

$$\min_{x, y \in \mathcal{S} (x \neq y)} \text{CPD}(x, y)$$

**推论 7.3** 由坐标交织正交设计构造的空时分组码式 (7.48)  $\mathcal{G}_4$  在给定调制符号星座图  $\mathcal{S}$  上是满秩的，当且仅当对应调制符号星座图  $\mathcal{S}$  的坐标乘积距离不为零。

**推论 7.4** 具有满秩的坐标交织正交设计空时分组码式 (7.48)  $\mathcal{G}_4$  的编码增益等于对应调制符号星座图  $\mathcal{S}$  的坐标乘积距离。

#### 7.5.4 4-QAM 星座图的最佳旋转角

本节讨论一个特定情形下的最佳旋转问题，为讨论坐标交织正交设计空时分组码情形下的非奇异线性变换问题奠定基础。

**定理 7.6** 设所考虑的调制符号星座图  $\mathcal{S}$  为具有点集为  $\{(2n-3)d + j(2m-3)d | n, m \in \{1, 2\}\}$  的 4-QAM 调制符号星座图，其中参数  $d$  为任意尺度因子，则能使对应调制符号星座图  $\mathcal{S}$  的 CPD 为最大的旋转角  $\theta = 0.5 \arctan 2 = 31.7175^\circ$ ，而对应 CPD 为  $4d^2 / \sqrt{5}$ 。

**证明** 假设对应旋转角为  $\theta \in [0, 90^\circ]$ ，则对应旋转矩阵为

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

则旋转前后坐标点的对应关系为

$$\begin{bmatrix} \Delta x_\theta \\ \Delta y_\theta \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\theta \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

容易观察到  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  的取值为 0 或  $\pm 2d$ ，但  $|\Delta x| + |\Delta y| \neq 0$ ，即  $\Delta x$  和  $\Delta y$  不可能同时为零，所以对应 CPD 的取值为  $2d^2 \sin(2\theta)$ （此时  $\Delta x$  与  $\Delta y$  中某个为零）或  $4d^2 \cos(2\theta)$ （此时  $\Delta x$  与  $\Delta y$  都不为零），取旋转角  $\theta \in [0, 90^\circ]$  使得  $2d^2 \sin(2\theta) = 4d^2 \cos(2\theta)$ ，则得最大 CPD，即  $\theta = 0.5 \arctan 2 = 31.7175^\circ$ 。而对应 CPD 为  $4d^2 / \sqrt{5}$ （利用关系式  $\sin \theta = \tan \theta / \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$  即可）。

#### 7.5.5 坐标交织正交设计的非奇异线性变换

**定义 7.5** 设  $\mathbf{G}_{N_T}(z_1, z_2, \dots, z_k)$  为关于复变量  $z_1, z_2, \dots, z_k$  的一个  $T \times N_T$  的复正交设计空时编码矩阵，其中  $z_i = p_i + jq_i$  ( $1 \leq i \leq k$ )，而令  $\tilde{z}_i = p_i + jq_{(k+i) \bmod 2k}$  ( $1 \leq i \leq 2k$ ) 为  $z_i$  的交织变量。称  $2T \times 2N_T$  的复正交设计空时编码矩阵  $\mathbf{Q}_{2N_T}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{2k})$  为坐标交织正交设计空时编码矩阵，即

$$\mathbf{Q}_{2N_T}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{2k}) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{N_T}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_k) & \mathbf{0}_{T \times N_T} \\ \mathbf{0}_{T \times N_T} & \mathbf{G}_{N_T}(\tilde{z}_{k+1}, \dots, \tilde{z}_{2k}) \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

假设复符号调制星座图  $\mathcal{S}$ ，则坐标交织正交设计空时编码步骤为（如图 7.10 所示）：

(1) 将二进制信息流映射为符号调制星座图  $\mathcal{S}$  中的复信息符号  $x_i = r_i + jq_i$  ( $1 \leq i \leq 2k$ )。

(2) 将复信息符号  $x_i = r_i + jq_i$  ( $1 \leq i \leq 2k$ ) 旋转变换为  $z_i = p_i + jq_i$  ( $1 \leq i \leq 2k$ )，旋转变换关系式为

$$\begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ \zeta_i \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

(3) 定义  $\tilde{z}_i = p_i + jq_{(k+i) \bmod 2k}$  ( $1 \leq i \leq 2k$ )。

(4) 构造坐标交织复正交空时编码矩阵  $\mathbf{Q}_{2N_T}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{2k})$ ，则完成设计。

其编码调制、调制变换、坐标交织复正交设计等流程如图 7.10 所示。



图 7.10 坐标交织正交空时编码原理

Khan-Rajan<sup>[28-31]</sup>等证明了式 (7.51) 具有满分集增益, 且对于任意形状的复符号调制星座图  $\mathcal{S}$  相应的最大似然解码算法具有相互独立的实符号对  $(r_i, \varsigma_i)$  的联合解码最小复杂度; 进一步, 式 (7.52) 的旋转变换是非必要的, 且任意  $2 \times 2$  的非奇异线性变换  $U$  不改变最大似然解码算法具有相互独立的实符号对  $(r_i, \varsigma_i)$  的联合解码的特性。至于分集积特性, 有如下结果。

**命题 7.1** 设  $\mathcal{S}$  为一个正方形格点上的正方形 QAM 符号调制星座图, 也就是满足  $N = M$  的矩形 QAM (RQAM) 符号调制星座图。则  $\theta = \arctan 2/2$  为旋转变换 (7.52) 在最大分集积意义下的最佳旋转角度, 而对应的分集积为

$$\zeta_{\text{opt,KRL}} = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{5}} \cdot d$$

式中, 参数  $d$  如前所述。

通过上述命题, 我们看到对于正方形格点上的正方形 QAM 符号调制星座图, 在实符号对最大似然解码复杂度约束条件下, 准正交空时分组码与坐标交织正交设计空时码有相同的分集积, 即

$$\zeta_{\text{opt,KRL}} = \zeta_{\text{opt,YGT}} = \zeta_{\text{opt,WWX}}$$

对于非正方形的矩形 QAM 符号调制星座图, 参考文献[26]给出了相应的最佳旋转。

**定理 7.7** 设符号调制星座图  $\mathcal{S}$  为矩形 QAM (即 RQAM), 如式 (7.8) 和式 (7.9) 所定义, 令

$$\phi = \arctan(1/\sqrt{\varepsilon \cdot \rho}), \quad \theta = \arctan(0.5(\sqrt{5}-1)/\sqrt{\rho/\varepsilon}), \quad \varphi = \phi - \theta$$

式中, 参数  $\varepsilon$ 、 $\rho$  如定理 7.3 所定义, 则

$$U_r = \begin{bmatrix} \alpha \cos \theta & \beta \sin \theta \\ -\alpha \sin \varphi & \beta \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (7.53)$$

式中, 参数  $\alpha = 1/\sqrt{2\varepsilon}$ ,  $\beta = 1/\sqrt{2\rho}$ 。用式 (7.53) 所定义的线性变换矩阵  $U_r$  代替式 (7.52) 中的旋转变换矩阵, 则对应线性变换矩阵  $U_i$  在所有非奇异线性变换矩阵中是最佳的, 因此关于相应坐标交织正交设计空时码具有最佳分集积

$$\zeta_{\text{opt,WWX,CIOD}} = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{1+\varepsilon \cdot \rho}} \cdot d$$

式中, 参数  $d$  定义如前所述。该定理的证明在附录 F 中。

结合定理 7.6 与定理 7.3, 对于正方形格点上的任何矩形 QAM 调制符号星座图  $\mathcal{S}$ , 准正交空时码与坐标交织正交设计空时码具有相同的最佳分集积, 即

$$\zeta_{\text{opt,WWX,CIOD}} = \zeta_{\text{opt,WWX}}$$

所以，具有最佳复符号线性变换的准正交空时码与坐标交织正交设计空时码在解码复杂度和分集积意义下具有相同的性能特征。但是，由于在坐标交织正交设计空时码矩阵中，近半数的元素为零，因此对于确定的信号传输功率，准正交空时码相比坐标交织正交设计空时码具有更好的峰均值比<sup>[32]</sup>。

**注意：**定理 7.7 中的最佳非奇异线性变换矩阵  $\mathbf{U}$  是正交矩阵当且仅当  $N = M$ ，即调制符号星座图  $\mathcal{S}$  是正方形 QAM。在此假设下，线性变换矩阵  $\mathbf{U}$  中的参数  $\alpha = \beta = 1/2$ ， $\theta = \varphi = \arctan 2$ 。所以定理 7.7 中的最佳非奇异线性变换矩阵  $\mathbf{U}$  与命题 7.1 中的最佳非奇异线性变换矩阵<sup>[31]</sup>是相同的，即为经典的正交旋转变换。

## 7.6 计算机仿真和结论

这里给出本章前面各小节所讨论过的主要结论的计算机仿真实验结果。基于前面已有的模拟分析结果，在此仅考虑在具有 4 发 1 收的准静态瑞利衰落信道假设下，定理 7.1、定理 7.2、定理 7.3 中的情形 1 的计算机模拟仿真问题。

根据定理 7.1、定理 7.2、定理 7.3 的讨论结果，对于所述情形 1 分别模拟讨论调制符号星座图为不规则形状、正方形格点、矩形格点情形经所考虑定理建立的非奇异线性变换矩阵作用后所得调制符号星座图经准正交空时分组码编码后通过通信链路的传输的性能，它们分别对应于图 7.1 (b) 所示的 8-QAM 调制符号星座图、图 7.1 (f) 所示的  $4^2$ -QAM (16-QAM) 调制符号星座图，以及类似于图 7.1 (c) 所示的矩形（非正方形） $4 \times 2$ -QAM (8-QAM) 调制符号星座图。

对应于定理 7.1 的情形 1，图 7.11 给出的是图 7.1 (b) 所示的 8-QAM 调制符号星座图当经式 (7.37) 所确定的非奇异矩阵线性变换后由 TBH<sup>[23]</sup>所设计的准正交空时码编码后经 4 发 1 收的准静态瑞利衰落信道链路传输的性能曲线。我们看到，由式 (7.37) 所确定的非奇异线性变换的码字的误比特率性能曲线要差于参考文献[26]所确定的最佳旋转变换的码字的误比特率性能曲线，甚至也不如 TBH<sup>[23]</sup>准正交空时编码的误比特率性能曲线，但它们是很接近的。这是因为由式 (7.37) 所确定的非奇异线性变换码所得到接收数据的最大似然（最优）解码算法是单个复符号解码复杂度，这是我们所能获得的最低复杂度解码算法。而参考文献[26]和 TBH<sup>[23]</sup>所确定的最佳旋转变换所对应的最大似然解码算法是两个复符号联合解码复杂度。我们将这些允许的性能损失理解为解码算法复杂度降低的付出。

对应于定理 7.2 的情形 1，如式 (7.40) 所确定的非奇异线性变换矩阵的模拟问题。图 7.12 给出的是图 7.1 (f) 所示的  $4^2$ -QAM (16-QAM) 调制符号星座图当经式 (7.40) 所确定的非奇异线性变换矩阵变换后再由 TBH<sup>[23]</sup>准正交空时编码经准静态瑞利衰落信道传输后的误比特率性能曲线。与图 7.11 所示的模拟结果类似，有参考文献[26]所确定的最佳旋转变换的码字的误比特率性能些许优于 TBH<sup>[23]</sup>准正交空时编码的误比特率性能，后者些许优于式 (7.40) 所确定的非奇异线性变换矩阵变换后的码字的误比特率性能。但式 (7.40) 所确定的非奇异线性变换矩阵变换后的码字经准静态瑞利衰落信道传输后到达接收端的最大似然（最优）解码算法是单个复符号解码复杂度。



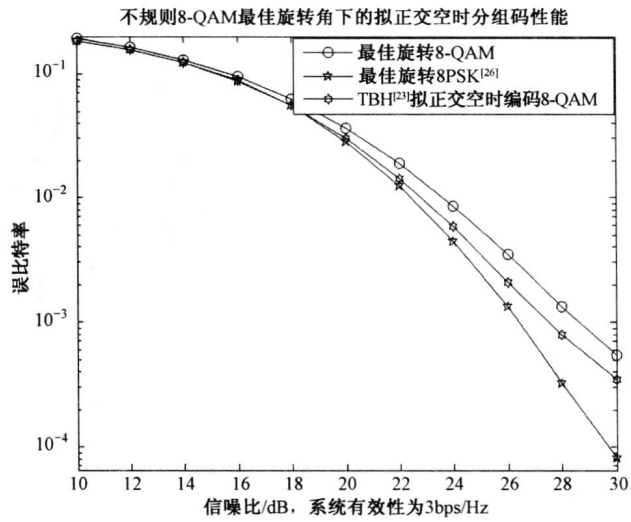


图 7.11 不规则调制星座图在最佳旋转下的性能曲线

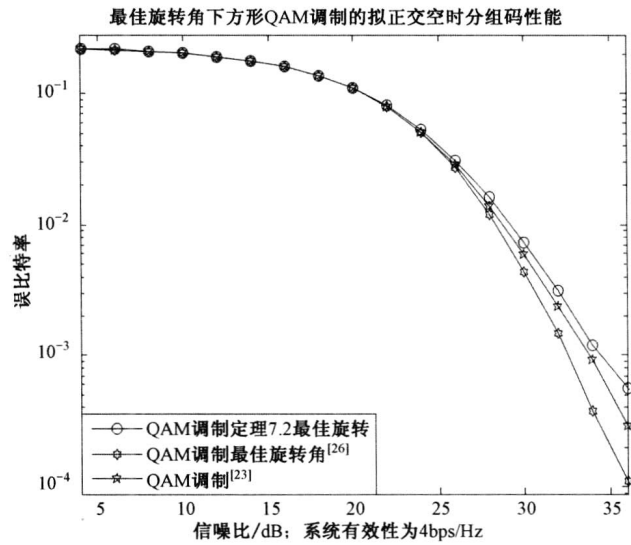


图 7.12 方形调制符号星座图在最佳旋转下的性能曲线

将式 (7.40) 所确定的非奇异线性变换矩阵的前两行看成是对原始调制符号星座图的一个线性组合变换, 而将后两行看成是对原始调制符号星座图的一个线性组合加旋转变换。图 7.13 给出了  $4^2$ -QAM (16-QAM) 调制符号星座图经这两种不同变换后所呈现的形式。其明显的特征前者是“点数”或称“集重”或“势”得以增加, 而后者在此基础上呈现旋转态势。

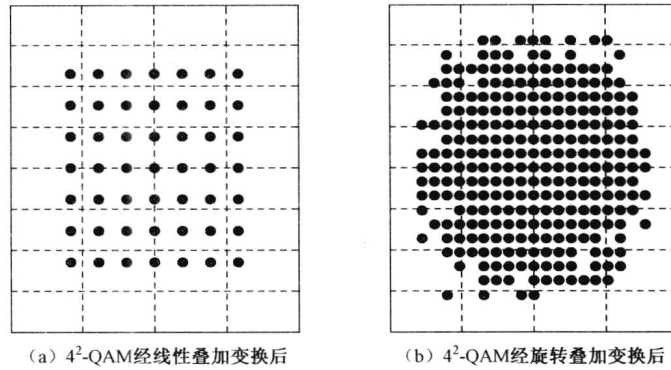


图 7.13 经旋转变换的 16QAM 调制符号星座图

对应于定理 7.3 的情形 1, 图 7.14 给出的是类似于图 7.1 (c) 所示的矩形 (非正方形)  $4 \times 2$ -QAM (8-QAM) 调制符号星座图, 用对应于定理 7.3 的情形 1 所确定的非奇异线性变换矩阵变换后再由 TBH<sup>[23]</sup> 准正交空时编码经准静态瑞利衰落信道传输后的误比特率性能曲线。与图 7.11 所示的模拟结果类似, 也有参考文献[26]所确定的最佳旋转变换的码字的误比特率性能些许优于 TBH<sup>[23]</sup> 准正交空时编码的误比特率性能, 后者些许优于定理 7.3 的情形 1 所确定的非奇异线性变换矩阵变换后的码字的误比特率性能。但定理 7.3 的情形 1 所确定的非奇异线性变换矩阵变换后的码字经准静态瑞利衰落信道传输后到达接收端的最大似然 (最优) 解码算法同样是单个复符号解码复杂度的。

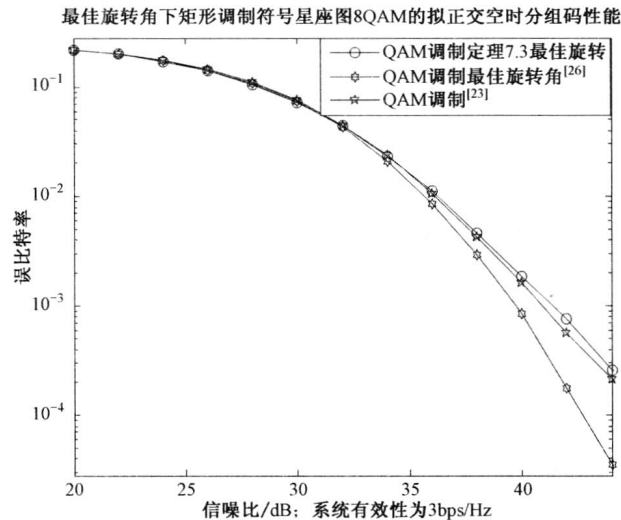


图 7.14 矩形调制符号星座图在最佳旋转下的性能曲线

通过本章建立的三个主要定理, 我们完成了对调制符号星座图广泛意义下的非奇异线性变换, 以期实现在发送端具有全速率、满分集的最佳编码特性, 而在接收端具有最大似然 (最优) 解码算法的实符号对 (最低) 解码复杂度。我们还将这种思想推广到坐标交织

复正交空时编码的情形。最终实现与我们对于“分集”和“传输速率”期冀的契合。

**注意：**在附录 C~F 中，给出了几个关键定理的证明，还有一些附注说明，它们对模拟编程有一定的指导意义。另外需要指出，本章内容较多地参考了参考文献[41]，作者对他们的工作表示崇敬与感谢。

## 7.7 本章要点总结

(1) 编码矩阵  $\mathbf{C}$  是准正交的，例如，定义矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} z_3 & z_4 \\ -z_4^* & z_3^* \end{bmatrix}$$

式中， $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathcal{S}$ ， $\mathcal{S}$  为给定调制符号星座图。则 Jafarkhani 准正交码的编码矩阵为

$$\mathbf{C}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^* & \mathbf{A}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ -z_2^* & z_1^* & -z_4^* & z_3^* \\ -z_3^* & -z_4^* & z_1^* & z_2^* \\ z_4 & -z_3 & -z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

其特点是

$$\mathbf{C}_J^H \mathbf{C}_J = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b_j \\ 0 & a & -b_j & 0 \\ 0 & -b_j & a & 0 \\ b_j & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad a = \sum_{i=1}^{2k} |z_i|^2, \quad b_j = 2 \operatorname{Re}\{z_1 z_4^* - z_2 z_3^*\},$$

$$\det(\mathbf{C}_J^H \mathbf{C}_J) = (a^2 - b_j^2)^2$$

(2) 设编码矩阵  $\mathbf{C}$  是准正交的，定义衡量其编码性能的一个重要指标为分集积，其定义为

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{N_T}} \min_{\mathbf{C} \neq \tilde{\mathbf{C}}} |\det[\mathbf{A}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}})]|^{1/(2T)}$$

式中， $\mathbf{C}$  和  $\tilde{\mathbf{C}}$  是同一准正交编码矩阵，其差异仅在于对应元素可能不同； $N_T$  是发射天线阵元数。相比第 3 章的讨论这是一个更直接的指标。

(3) 准正交编码的解码复杂度往往是双符号的最大似然解码。例如，Jafarkhani 准正交码关于  $z_1$  和  $z_3$  的解码公式为

$$\mathbf{r}_{1,t} = -j\sqrt{\frac{\rho}{N_T}} \frac{\alpha - \beta}{2} (z_1 + jz_3) + \boldsymbol{\eta}_{1,t}$$

$$\mathbf{r}_{2,t} = \sqrt{\frac{\rho}{N_T}} \frac{\alpha + \beta}{2} (z_1 - jz_3) + \boldsymbol{\eta}_{2,t}$$

式中， $\alpha = \sum_{i=1}^4 |h_i|^2$ ， $\beta = 2 \operatorname{Re}\{h_1^* h_4 - h_2 h_3^*\}$ ； $\mathbf{r}_t$  为对应时刻的测量数据。特别注意观测数据  $\mathbf{r}_{1,t}$  中的符号信息可能丢失，这是准正交编码矩阵  $\mathbf{C}$  为非满秩的证据之一。

(4) 由于准正交编码矩阵的非满秩特性，星座图旋转是准正交编码矩阵向满秩转化的

一个有力手段。例如，其对应 Jafarkhani 旋转星座图准正交编码矩阵为

$$\mathbf{C}_j(e^{j\theta}) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 e^{j\theta} & z_4 e^{j\theta} \\ -z_2^* & z_1^* & -z_4^* e^{-j\theta} & z_3^* e^{-j\theta} \\ -z_3^* e^{-j\theta} & -z_4^* e^{-j\theta} & z_1^* & z_2^* \\ z_4 e^{j\theta} & -z_3 e^{j\theta} & -z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

对于合适的  $\theta$ ，矩阵  $\mathbf{C}_j(e^{j\theta})$  可能是正交的，但满足此特性的  $\theta$  是调制符号星座图中的点  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathcal{S}$  的函数。因此，只能降低要求。对于给定调制符号星座图，求  $\theta$  使其满足  $\max_{\theta} \zeta(\theta)$ ，称其为最佳旋转角度。

(5) 星座图旋转变换能改善准正交编码矩阵的非满秩性，更一般的线性变换是否有更理想的结果？这是本章一个中心议题。根据最大似然解码公式中二次型的结构，为能使解码复杂度最小，将对应线性变换分为三种情形。根据此三种情形，建立对应线性变换其结果如定理 7.1 所述。更进一步定理 7.2 论证了星座图旋转变换可以归类于定理 7.1 所述的线性变换。自然地线性变换能实现最优分集积。例如，对于  $M^2$ -QAM 正方形调制符号星座图，其最佳分集积为

$$\zeta_{\text{opt}} = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5M^2(4M^2-1)}}}$$

## 练习题

1. 设 Tirkkonen-Boariu-Hottinen 码的编码矩阵为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ -z_2^* & z_1^* & -z_4^* & z_3^* \\ z_3 & z_4 & z_1 & z_2 \\ -z_4^* & z_3^* & -z_2^* & z_1^* \end{bmatrix}$$

若  $\mathbf{v}_i$  表示上面矩阵的第  $i$  列，证明有关系式

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 \rangle = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle = 0; \quad \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle \neq 0$$

也就是说，该矩阵的列矢量  $\mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{v}_3$  张成的子空间正交于列矢量  $\mathbf{v}_2$  和  $\mathbf{v}_4$  张成的子空间。

2. 对第 1 题的 Tirkkonen-Boariu-Hottinen 码的编码矩阵  $\mathbf{C}$ ，对应的接收信号矢量为  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = \mathbf{C}\mathbf{h} + \mathbf{n}$$

式中，信道参数矢量  $\mathbf{h} = [h_1, h_2, h_3, h_4]^T$ ； $\mathbf{n}$  为环境噪声矢量。通过适当的变换关系，将接收信号矢量  $\mathbf{r}$  表示为

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{H}\mathbf{z} + \mathbf{n}$$

式中， $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3, z_4]^T$  为传输符号矢量；矩阵  $\mathbf{H}$  为信道参数矢量  $\mathbf{h}$  的 Tirkkonen-

Boariu-Hottinen 编码, 它完全类似于矩阵  $C$  为传输符号矢量  $z$  的 Tirkkonen-Boariu-Hottinen 编码形式;  $\tilde{r}$  为接收信号矢量  $r$  的适当形变。

3. 同样对第 1 题的 Tirkkonen-Boariu-Hottinen 码的编码矩阵  $C$ , 证明有

$$C^H C = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}$$

式中,  $a$ 、 $b$  为实数, 且  $a = \sum_{i=1}^{2k} |z_i|^2$ ,  $b = 2\text{Re}\{z_1^* z_3 + z_2^* z_4\}$ ; 且满足  $\det(C^H C) = (a^2 - b^2)^2$ 。

4. 设符号变量  $x_i = r_i + j\zeta_i$ ,  $z_i = p_i + jq_i$ ,  $j = \sqrt{-1}$  为虚单位。进一步设

$$(p_i, p_{k+i})^T = \mathbf{R}_\theta(r_i, r_{k+i})^T \text{ 和 } (q_i, q_{k+i}) = \mathbf{R}_\theta(\zeta_i, \zeta_{k+i})^T$$

式中,  $\mathbf{R}_\theta$  是一个  $2 \times 2$  的旋转矩阵

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

求符号变量  $z_i$ 、 $z_{k+i}$  的表达式。若令  $(p_i, q_i)^T = \mathbf{R}_\theta(r_i, \zeta_i)^T$  和  $(p_{k+i}, q_{k+i}) = \mathbf{R}_\theta(r_{k+i}, \zeta_{k+i})^T$ , 求这时符号变量  $z_i$ 、 $z_{k+i}$  的表达式。

5. 假设非奇异线性变换矩阵

$$U_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{R}_\alpha & -\mathbf{R}_\alpha \end{bmatrix}$$

而  $x_i = r_i + j\zeta_i$ ,  $z_i = p_i + jq_i$  之间的变换关系为

$$(p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i})^T = U_i(r_i, \zeta_i, r_{k+i}, \zeta_{k+i})^T$$

求这时符号变量  $z_i$ 、 $z_{k+i}$  的表达式。

6. 设

$$V_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}; \quad P = J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}; \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

其中对角矩阵  $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ,  $W$  为正交矩阵。设  $\rho$  为一实常数, 令

$$U_{i,1} = \rho W \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} W^T; \quad U_{i,2} = \rho W \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1} \end{bmatrix} W^T P; \quad V_2 = -P V_1 P$$

以及

$$U_i = \begin{bmatrix} U_{i,1} & U_{i,2} \\ U_{i,1} V_1 & U_{i,2} V_2 \end{bmatrix}$$

(1) 利用上面所给矩阵  $V_1$ 、 $V_2$ 、 $W$ 、 $D$  中的符号参数和  $\rho$  表示非奇异线性变换矩阵  $U_i$ ;

(2) 当  $x_i = r_i + j\zeta_i$ ,  $z_i = p_i + jq_i$  之间的变换关系为

$$(p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i})^T = U_i(r_i, \zeta_i, r_{k+i}, \zeta_{k+i})^T$$

求这时符号变量  $z_i$ 、 $z_{k+i}$  的表达式。

7. 设  $x_i = x_{i,\mathcal{R}} + jx_{i,\mathcal{I}}$  ( $i=0,1,2,3$ ) 为调制符号星座图  $\mathcal{S}$  中的点, 其中  $x_{i,\mathcal{R}}$  和  $x_{i,\mathcal{I}}$  分别是变量  $x_i$  的实、虚部,  $j = \sqrt{-1}$  是虚单位, 令

$$\tilde{x}_i = x_{i,\mathcal{R}} + jx_{(i+2)\mathcal{I}} \quad (i=0,1,2,3)$$

其中  $(a)_k = a \bmod k$ 。变量  $\tilde{x}_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) 称为变量  $x_i$  的坐标交织。证明有结果

$$\tilde{\tilde{x}}_0 = \tilde{x}_{0,\mathcal{R}} + j\tilde{x}_{2,\mathcal{I}} = x_{0,\mathcal{R}} + jx_{0,\mathcal{I}} = x_0$$

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_{1,\mathcal{R}} + j\tilde{x}_{3,\mathcal{I}} = x_{1,\mathcal{R}} + jx_{1,\mathcal{I}} = x_1$$

$$\tilde{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_{2,\mathcal{R}} + j\tilde{x}_{0,\mathcal{I}} = x_{2,\mathcal{R}} + jx_{2,\mathcal{I}} = x_2$$

$$\tilde{\tilde{x}}_3 = \tilde{x}_{3,\mathcal{R}} + j\tilde{x}_{1,\mathcal{I}} = x_{3,\mathcal{R}} + jx_{3,\mathcal{I}} = x_3$$

即坐标交织信号的坐标交织为原信号。

## 参 考 文 献

- [1] Guey J C, Fitz M P, Bell M R, et al. Signal design for transmitter diversity wireless communication systems over Rayleigh fading channels. IEEE Trans. Commun., 1999, 47(4): 527-537.
- [2] Tarokh V, Seshadri N, Calderbank A R. Space-time codes for high data rate wireless communication: Performance criterion and code construction. IEEE Trans. Inform. Theory, 1998, 44(2): 744-765.
- [3] Alamouti S. A simple transmit diversity technique for wireless communications. IEEE J. Select. Areas Commun., 1998, 16(8): 1451-1458.
- [4] Tarokh V, Jafarkhani H, Calderbank A R. Space-time block codes from orthogonal designs. IEEE Trans. Inform. Theory, 1999, 45(5): 1456-1467.
- [5] Hochwald B M, Marzetta T L, Papadiaz C B. A transmitter diversity scheme for wideband CDMA systems based on space-time spreading. IEEE J. Selected Areas Commun., 2001, 19(1): 48-60.
- [6] Ganesan G, Stoica P. Space-time block codes: A maximum SNR approach. IEEE Trans. Inform. Theory, 2001, 47(5): 1650-1656.
- [7] Calderbank A R, Naguib A F. Orthogonal designs and third generation wireless communication. // Hirschfeld W P. Surveys in Combinatorics. London Mathematical Society Lecture Note Series 288, Cambridge University Press, 2001: 75-107.
- [8] Tirkkonen O, Hottinen A. Square-matrix embeddable space-time block codes for complex signal constellations. IEEE Trans. Inform. Theory, 2002, 48(1):384-395.
- [9] Su W, Xia X G. Two generalized complex orthogonal space-time block codes of rates 7/11 and 3/5 for 5 and 6 transmit antennas. IEEE Trans. Inform. Theory, 2003, 49(1): 313-316.

- [10] Su W, Xia and X G. On complex orthogonal space-time block codes from complex orthogonal designs. *Wireless Personal Commun.*, 2003, 25(4): 1-26.
- [11] Liang X B. Orthogonal designs with maximal rates. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2003, 49(10): 2468-2503.
- [12] Su W, Xia X G, Liu R J R. A systematic design of high-rate complex orthogonal space-time block code. *IEEE Commun. Lett.*, June 2004.
- [13] Lu K, Fu S, Xia X G. Closed form design of complex orthogonal space-time block codes of rates  $k + 1/2k$  for  $2k - 1$  and  $2k$  transmit antennas. *Proc. ISIT 2004*, Chicago, June/July 2004.
- [14] Liang X B, Xia X G, On the nonexistence of rate-one generalized complex orthogonal designs. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2003, 49(11): 2984-2989.
- [15] Wang H, Xia X G. Upper bounds of complex orthogonal space-time block codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2003, 49(10): 2788-2796.
- [16] Lu H F, Kumar P V, Chung H. On orthogonal designs and space-time codes. *IEEE Commun. Lett.*, 2004, 8(4): 220-222.
- [17] Jafarkhani H, Taherkhani F. Pseudo orthogonal designs as space-time block codes. *IEEE International Symposium on Advances in Wireless Communications (ISWC'02)*, Sept. 2002.
- [18] Dalton L A, Georghiades C. A four transmit antenna orthogonal space-time block code with full diversity and rate. *Proc. Allerton Conf.*, Oct. 2002.
- [19] Dalton L A. New orthogonal space-time block codes with full diversity. Master Thesis, Texas A&M University, Dec. 2002.
- [20] He L, Ge H. A new full-rate full-diversity orthogonal space time block coding scheme. *IEEE Commun. Lett.*, 2003, 7(12): 590-592.
- [21] Sharma N, Papadias C B. Improved quasi-orthogonal codes through constellation rotation. *Prof. WCNC 2002*, 2002, 1(3): 169-171.
- [22] Jafarkhani H. A quasi-orthogonal space-time block code. *IEEE Trans. Commun.*, 2001, 49(1): 1-4.
- [23] Tirkkonen O, Boariu A, Hottinen A. Minimal non-orthogonality rate 1 space-time block code for 3-Tx antennas. *IEEE 6th Int. Symp. on Spread-Spectrum Tech. and Appl. (ISSSTA2000)*, Sept. 2000: 429-432.
- [24] Papadias C B, Foschini G J. Capacity-Approaching Space-Time Codes for Systems Employing Four Transmitter Antennas. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2003, 49( 3): 726-732.
- [25] Tirkkonen O. Optimizing space-time block codes by constellation rotations. *Proc. Finnish Wireless Commun. Workshop FWCW'01*, Finland, Oct. 2001: 59-60.
- [26] Su W, Xia X G. Signal constellations for quasi-orthogonal space-time block codes with

- full diversity. Proc. Globecom 2002, Taipei, Taiwan, Dec. 2002.
- [27] Yuen C, Guan Y L, Tjhung T T. Full-rate full-diversity STBC with constellation rotation. Proc. VTC 2003, Spring, vol. 1, , Seogwipo, Korea, April 2003: 296-300.
  - [28] Khan Z A, Rajan B S. STBC from Co-ordinate interleaved orthogonal designs. Proc. ISIT 2002, pp. 275., Lausanne, Switzerland, June/July 2002.
  - [29] Khan Z A, Rajan B S. A full-diversity rate-one STBC for four Tx with single-symbol decoding. <http://ece.iise.ernet.in/bsraian/KhR-DRDOIISc-web.ps>.
  - [30] Rajan B S, Lee M H, Khan Z A. A rate-one full-diversity quasiorthogonal design for eight Tx antennas. <http://ece.iise.ernet.in/bsraian/RLK-DRDOIISc-web.ps>.
  - [31] Khan Z A, Rajan B S, Lee M H. Rectangular co-ordinate interleaved orthogonal designs. Proc. of Globecom 2003, San Francisco, Dec. 2003: 2004-2009.
  - [32] Yuen C, Guan Y L, Tjhung T T. Construction of quasi-orthogonal STBC with minimum decoding complexity. Proc. ISIT 2004, Chicago, June/July 2004.
  - [33] Yuen C, Guan Y L, Tjhung T T. Improved quasi-orthogonal STBC with group constrained linear transformation. Proc. Globecom 2004, Dallas, Texas, Dec. 2004.
  - [34] J. Hou, M. H. Lee, and J. Y. Park, "Matrices analysis of quasi-orthogonal space-time block codes," IEEE Commun. Lett., vol. 7, No. 8, pp. 385-387, 2003.
  - [35] Hassibi B, Hochwald B M. High-Rate codes that are linear in space and time. IEEE Trans. Inform. Theory, 2002, 48(7): 1804-1824.
  - [36] Heath R W, Paulraj A J. Linear dispersion codes for MIMO systems based on frame theory. IEEE Trans. Signal Process., 2002, 50(10): 2429-2441.
  - [37] Conway J H, Sloane N J A. Sphere Packings, Lattices and Groups. 3rd Ed. New York: Springer-Verlag, 1999.
  - [38] Siegel C L. Lectures on the Geometry of Numbers. New York: Springer-Verlag, 1989.
  - [39] Hochwald B M, Sweldens W. Differential unitary space-time modulation. IEEE Trans. Commun., 2000, 48(11): 2041-2052.
  - [40] Shokrollahi A, Hassibi B, Hochwald B M, et al. Representation theory for high-rate multiple-antenna code design. IEEE Trans. Inform. Theory, 2001, 47(9): 2335-2367.
  - [41] Wang Haiquan, Wang Dong, Xia XiangGen. On Optimal Quasi-Orthogonal Space-Time Block Codes With Minimum Decoding Complexity. IEEE transactions on information theory 2009, 55(3): 1104-1130.



## 附录 C 定理 7.1 的证明

**引理 7.1** 设  $A$  为一个  $4 \times 4$  的对称实矩阵,  $S \subset R^2$  为二维实空间  $R^2$  的任意 4 个点均不共线的子集。若对于任意实数对  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2) \in S$ , 有

$$(x_1, y_1, x_2, y_2)A(x_1, y_1, x_2, y_2)^T = 0 \quad (C.1)$$

则  $A = 0$ 。

**证明** 设集合  $S$  内的点  $(x_i, y_i)$  ( $i=1,2,3,4$ ) 是非共线的。因为  $A$  是对称实矩阵, 所以存在特征分解  $A = WDW^T$ , 其中  $W$  是正交矩阵,  $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ , 其中  $\lambda_i \geq 0$  ( $i=1,2,3,4$ )。假设引理条件成立, 证明  $\lambda_i = 0$  ( $i=1,2,3,4$ ), 即说明矩阵  $A = 0$ 。

由假设  $(x_l, y_l, x_k, y_k)WDW^T(x_l, y_l, x_k, y_k)^T = 0$ , 对于所有  $l, k$  ( $(x_l, y_l)$ 、 $(x_k, y_k) \in S$ ) 成立,  $\lambda_1 > 0$ 。假设  $(w_1, w_2, w_3, w_4)^T$  是  $W$  的第一个列矢量, 由假设条件 (C.1) 应有对所有  $l, k$  ( $(x_l, y_l)$ 、 $(x_k, y_k) \in S$ ) 下式成立

$$(x_l, y_l, x_k, y_k)(w_1, w_2, w_3, w_4)^T = 0$$

由于  $(x_l, y_l)$ 、 $(x_k, y_k) \in S$  的任意性, 考虑  $k=1$ 、 $l=1$ , 则有  $(x_1, y_1) \in S$ , 且

$$(x_1, y_1, x_1, y_1)(w_1, w_2, w_3, w_4)^T = 0$$

考虑  $k=1$ 、 $l=2$ , 则有  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2) \in S$ , 且

$$(x_2, y_2, x_1, y_1)(w_1, w_2, w_3, w_4)^T = 0$$

所以应有

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2, 0, 0)(w_1, w_2, w_3, w_4)^T = 0, \text{ 即有 } w_1(x_1 - x_2) + w_2(y_1 - y_2) = 0$$

类似地, 可以找到  $(x_3, y_3)$ 、 $(x_4, y_4) \in S$ , 且  $(x_i, y_i) \in S$  ( $i=1,2,3,4$ ) 为 4 个不同点, 满足

$$w_1(x_1 - x_i) + w_2(y_1 - y_i) = 0 \quad (i=2,3,4)$$

若  $(w_1, w_2) \neq 0$ , 则找到  $(x_i, y_i) \in S$  ( $i=1,2,3,4$ ) 为 4 个共线点, 与引理假设矛盾。所以  $(w_1, w_2) = 0$ ; 用类似方法可以证明  $(w_3, w_4) = 0$ , 这与  $W$  为正交矩阵的假设矛盾, 所以  $\lambda_1 = 0$  成立。完全类似地证明  $\lambda_i = 0$  ( $i=2,3,4$ )。

### 定理 7.1 的证明

考虑定理 7.1 情形 1, 函数  $f_i$ 、 $g_i$  是变量  $r_i, \varsigma_i, r_{k+i}, \varsigma_{k+i}$  的二次型,  $f_i$  可以表示为

$$f_i(r_i, \varsigma_i, r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) = f_{i,1}(r_i, \varsigma_i) + f_{i,2}(r_{k+i}, \varsigma_{k+i})$$

式中, 函数  $f_{i,1}$  和  $f_{i,2}$  分别是变量  $r_i, \varsigma_i$  和  $r_{k+i}, \varsigma_{k+i}$  的二次型。因此存在  $2 \times 2$  实对称矩阵  $A_{i,1}$ 、 $A_{i,2}$  使得

$$f_{i,1}(r_i, \varsigma_i) = (r_i, \varsigma_i)A_{i,1} \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix}; \quad f_{i,2}(r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) = (r_{k+i}, \varsigma_{k+i})A_{i,2} \begin{pmatrix} r_{k+i} \\ \varsigma_{k+i} \end{pmatrix}$$

结合式 (7.25) 得

$$(r_i, \varsigma_i, r_{k+i}, \varsigma_{k+i})U_i^T \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} U_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \\ r_{k+i} \\ \varsigma_{k+i} \end{pmatrix} = (r_i, \varsigma_i)A_{i,1} \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} + (r_{k+i}, \varsigma_{k+i})A_{i,2} \begin{pmatrix} r_{k+i} \\ \varsigma_{k+i} \end{pmatrix} \quad (C.2)$$

令  $\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1} & \mathbf{U}_{i,2} \\ \mathbf{U}_{i,3} & \mathbf{U}_{i,4} \end{bmatrix}$ , 由式 (C.2) 可以得到

$$(r_i, \varsigma_i, r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{U}_{i,3}^T \mathbf{U}_{i,3} - \mathbf{A}_{i,1} & \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{U}_{i,3}^T \mathbf{U}_{i,4} \\ \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{U}_{i,4}^T \mathbf{U}_{i,3} & \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{U}_{i,4}^T \mathbf{U}_{i,4} - \mathbf{A}_{i,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \\ r_{k+i} \\ \varsigma_{k+i} \end{pmatrix} = 0$$

所以应该有  $\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{U}_{i,3}^T \mathbf{U}_{i,4} = 0$ ; 再利用对函数  $g_i$  类似的分析, 可得关系式

$$(r_i, \varsigma_i, r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) \mathbf{U}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \\ r_{k+i} \\ \varsigma_{k+i} \end{pmatrix} = (r_i, \varsigma_i) \mathbf{B}_{i,1} \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} + (r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) \mathbf{B}_{i,2} \begin{pmatrix} r_{k+i} \\ \varsigma_{k+i} \end{pmatrix}$$

所以应该有  $\mathbf{U}_{i,3}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,4} = 0$ 。即应同时有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,2}^T & \mathbf{U}_{i,4}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1} \\ \mathbf{U}_{i,3} \end{bmatrix} = 0 \text{ 与 } \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,2}^T & \mathbf{U}_{i,4}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,3} \\ \mathbf{U}_{i,1} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{C.3})$$

但  $\mathbf{U}_i$  是一个非奇异矩阵, 所以子阵  $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,2}^T & \mathbf{U}_{i,4}^T \end{bmatrix}^T$ 、 $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1}^T & \mathbf{U}_{i,3}^T \end{bmatrix}^T$  和  $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,3}^T & \mathbf{U}_{i,1}^T \end{bmatrix}^T$  是列满秩的, 所以式 (C.3) 说明矩阵  $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,2}^T & \mathbf{U}_{i,4}^T \end{bmatrix}^T$  的列空间与矩阵  $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1}^T & \mathbf{U}_{i,3}^T \end{bmatrix}^T$  的列空间是互补的, 同样矩阵  $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,2}^T & \mathbf{U}_{i,4}^T \end{bmatrix}^T$  的列空间与矩阵  $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,3}^T & \mathbf{U}_{i,1}^T \end{bmatrix}^T$  的列空间是互补的, 所以, 矩阵  $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1}^T & \mathbf{U}_{i,3}^T \end{bmatrix}^T$  与矩阵  $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,3}^T & \mathbf{U}_{i,1}^T \end{bmatrix}^T$  的列空间是相同的, 所以存在非奇异  $2 \times 2$  (实) 矩阵  $\mathbf{V}_{i,1}$  使得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,3}^T & \mathbf{U}_{i,1}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1}^T & \mathbf{U}_{i,3}^T \end{bmatrix}^T \mathbf{V}_{i,1}$$

因此有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1} \\ \mathbf{U}_{i,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,3} \\ \mathbf{U}_{i,1} \end{bmatrix} \mathbf{V}_{i,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1} \\ \mathbf{U}_{i,3} \mathbf{V}_{i,1} \end{bmatrix} \mathbf{V}_{i,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1} \\ \mathbf{U}_{i,3} \end{bmatrix} \mathbf{V}_{i,1}^2$$

同样由于矩阵  $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1}^T & \mathbf{U}_{i,3}^T \end{bmatrix}^T$  是列满秩的, 所以  $\mathbf{V}_{i,1}^2 = \mathbf{I}_2$ ; 类似证明  $\mathbf{V}_{i,2}^2 = \mathbf{I}_2$ ; 所以关于情形 1 得证。将上面证明中的  $\mathbf{U}_i$  替换为  $\mathbf{U}_i \mathbf{P}_1$  或  $\mathbf{U}_i \mathbf{P}_2$ , 完全类似证明, 即可完成关于情形 2、情形 3 的论证。

附注 1: 对于式 (7.38) 所给的变换关系, 对应的非奇异线性变换矩阵  $\mathbf{U}_i$  为

$$\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & -\cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

即  $p_i = r_i \cos \theta + r_{k+i} \sin \theta$ ,  $q_i = \varsigma_i \cos \theta + \varsigma_{k+i} \sin \theta$ ;  $p_{k+i} = r_i \sin \theta - r_{k+i} \cos \theta$ ,  $q_{k+i} = \varsigma_i \sin \theta - \varsigma_{k+i} \cos \theta$ 。所以变换前后的符号变量具有关系

$$z_i = s_i \cos \theta + s_{k+i} \sin \theta; \quad z_{k+i} = s_i \sin \theta - s_{k+i} \cos \theta$$

所以，以 Tirkkonen-Boariu-Hottinen<sup>[23]</sup>码为例的接收信号矢量为

$$\mathbf{r}_{\text{TBH}} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ -z_2^* & z_1^* & -z_4^* & z_3^* \\ z_3 & z_4 & z_1 & z_2 \\ -z_4^* & z_3^* & -z_2^* & z_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} + \mathbf{n}$$

接收信号矢量完全等价于对信道参数  $\mathbf{h}$  做 Tirkkonen-Boariu-Hottinen 编码而对应的信道参数是被传输的符号矢量  $\mathbf{z}$ ，即等价地有

$$\mathbf{r}_{\text{TBH}} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ -h_2^* & h_1^* & -h_4^* & h_3^* \\ h_3 & h_4 & h_1 & h_2 \\ -h_4^* & h_3^* & -h_2^* & h_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \mathbf{n}$$

注意这时关于信道参数  $\mathbf{h}$  的 Tirkkonen-Boariu-Hottinen 编码矩阵仍然有关系式

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 \rangle = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle = 0; \quad \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle \neq 0, \quad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle \neq 0$$

式中， $\mathbf{v}_i$  为信道参数  $\mathbf{h}$  的 Tirkkonen-Boariu-Hottinen 编码矩阵的第  $i$  个行矢量。当假设为瑞利信道时，其不为零的互相关系数也是比较小的，因而 Tirkkonen-Boariu-Hottinen 信道编码系数矩阵往往是可逆的，这样就能独立地解出传输符号  $\mathbf{z}$ ，进而得到独立的对  $s_i$  的解码关系。

## 附录 D 定理 7.2 的证明

假设  $s_i = r_i + j\varsigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k, k+1, \dots, 2k$ ) 为正方形 QAM 符号调制星座图  $\mathcal{S}$  的点, 用  $\Delta s_i = \Delta r_i + j\Delta \varsigma_i$  表示对应符号差, 则由式 (7.18) 得

$$(\Delta p_i, \Delta q_i, \Delta p_{k+i}, \Delta q_{k+i})^T = U_i(\Delta r_i, \Delta \varsigma_i, \Delta r_{k+i}, \Delta \varsigma_{k+i})^T$$

而对应编码距离矩阵的行列式为

$$\det[\mathbf{Q}_{2N_T}^T \mathbf{Q}_{2N_T}] = \det \begin{bmatrix} (\Delta a)\mathbf{I}_{N_T} & (\Delta b)\mathbf{I}_{N_T} \\ (\Delta b)\mathbf{I}_{N_T} & (\Delta a)\mathbf{I}_{N_T} \end{bmatrix} = (\Delta a - \Delta b)^{N_T} (\Delta a + \Delta b)^{N_T}$$

式中,  $\Delta a = \sum_i (\Delta p_i)^2 + \sum_i (\Delta q_i)^2$ ,  $\Delta b = 2 \sum_i (\Delta p_i \Delta p_{k+i} + \Delta q_i \Delta q_{k+i})$ 。为方便叙述, 令

$$\mathcal{D}_{\min} = \min_{(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{2k}) \neq \mathbf{0}} \det[\mathbf{Q}_{2N_T}^T \mathbf{Q}_{2N_T}]$$

则准正交空时码  $\mathbf{Q}_{2N_T}$  的分集积可以表示为

$$\zeta[\mathbf{Q}_{2N_T}] = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} (\mathcal{D}_{\min})^{1/4N_T}$$

首先考虑定理 7.2 的情形 1, 求  $\mathcal{D}_{\min}$  的下界门限表达式, 由定义

$$\begin{aligned} \Delta a + \Delta b &= \sum_{i=1}^k (p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i}) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} (p_i, q_i, p_{k+i}, q_{k+i})^T \\ &= \sum_{i=1}^k (r_i, \varsigma_i, r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) \mathbf{U}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \mathbf{U}_i (r_i, \varsigma_i, r_{k+i}, \varsigma_{k+i})^T \\ &= \sum_{i=1}^k (r_i, \varsigma_i, r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1}^T & \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \\ \mathbf{U}_{i,2}^T & \mathbf{V}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1} & \mathbf{U}_{i,2} \\ \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1} & \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2} \end{bmatrix} (r_i, \varsigma_i, r_{k+i}, \varsigma_{k+i})^T \end{aligned}$$

因为  $\mathbf{V}_{i,1}^2 = \mathbf{I}_2$ ;  $\mathbf{V}_{i,2}^2 = \mathbf{I}_2$  以及  $\mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2} = \mathbf{0}$ , 所以

$$\Delta a + \Delta b = \sum_{i=1}^k (r_i, \varsigma_i) \mathcal{K}_i (r_i, \varsigma_i)^T + \sum_{i=1}^k (r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) \mathcal{K}_{k+i} (r_{k+i}, \varsigma_{k+i})^T$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i &= \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1} \\ \mathcal{K}_{k+i} &= \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{V}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2} + \mathbf{V}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2} \end{aligned}$$

因为对于所有  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), 皆有

$$\begin{aligned} (r_i, \varsigma_i) \mathcal{K}_i (r_i, \varsigma_i)^T &= \frac{1}{2} (r_i, \varsigma_i, r_i, \varsigma_i) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1}^T & \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \\ \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T & \mathbf{U}_{i,1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1} & \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1} \\ \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1} & \mathbf{U}_{i,1} \end{bmatrix} (r_i, \varsigma_i, r_i, \varsigma_i)^T \\ &= \frac{1}{2} \left\| (r_i, \varsigma_i, r_i, \varsigma_i) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,1}^T & \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \\ \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T & \mathbf{U}_{i,1}^T \end{bmatrix} \right\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

因此  $\mathcal{K}_i$  ( $i=1,2,\dots,k$ ) 是非负定的; 类似证明  $\mathcal{K}_{k+i}$  ( $i=1,2,\dots,k$ ) 是非负定的。

同样方法可以论证,  $\Delta a - \Delta b = \sum_{i=1}^k (r_i, \varsigma_i) \tilde{\mathcal{K}}_i (r_i, \varsigma_i)^T + \sum_{i=1}^k (r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) \tilde{\mathcal{K}}_{k+i} (r_{k+i}, \varsigma_{k+i})^T$ ; 而且  $\tilde{\mathcal{K}}_i$  和  $\tilde{\mathcal{K}}_{k+i}$  ( $i=1,2,\dots,k$ ) 均是非负定的。综合上述结果有, 对于所有  $i$  ( $i=1,2,\dots,k$ ), 皆有  $\mathcal{D}_{\min}$  的下界门限表达式

$$\det \begin{bmatrix} (\Delta a) \mathbf{I}_{N_T} & (\Delta b) \mathbf{I}_{N_T} \\ (\Delta b) \mathbf{I}_{N_T} & (\Delta a) \mathbf{I}_{N_T} \end{bmatrix} \geq \left( \left\| (r_i, \varsigma_i) \sqrt{\mathcal{K}_i} \right\| \left\| (r_i, \varsigma_i) \sqrt{\tilde{\mathcal{K}}_i} \right\| \right)^{N_T}$$

$$\det \begin{bmatrix} (\Delta a) \mathbf{I}_{N_T} & (\Delta b) \mathbf{I}_{N_T} \\ (\Delta b) \mathbf{I}_{N_T} & (\Delta a) \mathbf{I}_{N_T} \end{bmatrix} \geq \left( \left\| (r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) \sqrt{\mathcal{K}_{k+i}} \right\| \left\| (r_{k+i}, \varsigma_{k+i}) \sqrt{\tilde{\mathcal{K}}_{k+i}} \right\| \right)^{N_T}$$

为求  $\mathcal{D}_{\min}$  的上界门限表达式, 引入下面的命题 (这是格点几何中的一个很著名、很重要的定理<sup>[38,39]</sup>)。

**命题 D.1** 设  $\xi = \alpha x + \beta y$ ,  $\eta = \gamma x + \delta y$  以及判别因子  $|\alpha\delta - \beta\gamma| = \Delta > 0$ , 其中  $x$ 、 $y$  为整数变量,  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\delta$  均为常数; 则对于具有判别因子  $\Delta$  的不定格点二次型 (或称为双曲) 函数  $f(x, y) = \xi\eta$ , 存在格点  $(x, y) \neq 0$ , 使得

$$|f(x, y)| \leq \sqrt{\frac{\Delta}{5}}$$

为应用此命题, 需要变换二次型 (对于  $\mathcal{K}_{k+i}$ 、 $\tilde{\mathcal{K}}_{k+i}$  的情形完全类似的证明)

$$(r_i, \varsigma_i) \mathcal{K}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} (r_i, \varsigma_i) \tilde{\mathcal{K}}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix}$$

成为双线性型积 (双曲函数) 的形式。由  $\mathbf{V}_{i,1}^2 = \mathbf{I}_2$ , 可得  $\mathbf{V}_{i,1} = \pm \mathbf{I}_2$  或者  $\mathbf{V}_{i,1} = \begin{bmatrix} a_{i,1} & b_{i,1} \\ c_{i,1} & -a_{i,1} \end{bmatrix}$  满足约束条件

$$a_{i,1}^2 + b_{i,1}c_{i,1} = 1 \quad (\text{D.1})$$

先在假设 (I)  $\mathbf{V}_{i,1} \neq \pm \mathbf{I}_2$  下讨论, 记对称矩阵  $\mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1}$  为

$$\mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1} = \begin{bmatrix} u_{i,1} & u_{i,2} \\ u_{i,2} & u_{i,3} \end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} (r_i, \varsigma_i) \mathcal{K}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} &= (r_i, \varsigma_i) [\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1}] \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} \\ &= (r_i, \varsigma_i) \left\{ \begin{bmatrix} a_{i,1} & c_{i,1} \\ b_{i,1} & -a_{i,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,1} & u_{i,2} \\ u_{i,2} & u_{i,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{i,1} & u_{i,2} \\ u_{i,2} & u_{i,3} \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} \\ &= (r_i, \varsigma_i) \begin{bmatrix} (1+a_{i,1})u_{i,1} + c_{i,1}u_{i,2} & (1+a_{i,1})u_{i,2} + c_{i,1}u_{i,3} \\ (1-a_{i,1})u_{i,2} + b_{i,1}u_{i,1} & (1-a_{i,1})u_{i,3} + b_{i,1}u_{i,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因为  $\mathcal{K}_i$  ( $i=1,2,\dots,k$ ) 是对称非负定矩阵, 所以主代数余子式大于或等于零, 即  $(1+a_{i,1})u_{i,1}+c_{i,1}u_{i,2} \geq 0$ ; 且

$$2a_{i,1}u_{i,2}+c_{i,1}u_{i,3}=b_{i,1}u_{i,1} \quad (\text{D.2})$$

再在假设 (II)  $(1+a_{i,1})u_{i,1}+c_{i,1}u_{i,2} > 0$  下讨论, 则有

$$(r_i, \varsigma_i) \mathcal{K}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} = \left( \sqrt{(1+a_{i,1})u_{i,1}+c_{i,1}u_{i,2}} r_i + \frac{(1+a_{i,1})u_{i,2}+c_{i,1}u_{i,3}}{\sqrt{(1+a_{i,1})u_{i,1}+c_{i,1}u_{i,2}}} \varsigma_i \right)^2$$

完全类似地讨论  $\tilde{\mathcal{K}}_i$ , 在假设 (III)  $(a_{i,1}-1)u_{i,1}+c_{i,1}u_{i,2} > 0$  下讨论, 则有

$$(r_i, \varsigma_i) \tilde{\mathcal{K}}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} = \left( \sqrt{(a_{i,1}-1)u_{i,1}+c_{i,1}u_{i,2}} r_i + \frac{(a_{i,1}-1)u_{i,2}+c_{i,1}u_{i,3}}{\sqrt{(a_{i,1}-1)u_{i,1}+c_{i,1}u_{i,2}}} \varsigma_i \right)^2$$

令  $(1+a_{i,1})u_{i,1}+c_{i,1}u_{i,2} > 0$  及  $(a_{i,1}-1)u_{i,1}+c_{i,1}u_{i,2} > 0$  可得  $c_{i,1} \neq 0$ , 所以对  $(r_i, \varsigma_i) \mathcal{K}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix}$

$(r_i, \varsigma_i) \tilde{\mathcal{K}}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix}$  关于参数

$$\alpha = \sqrt{(1+a_{i,1})u_{i,1}+c_{i,1}u_{i,2}}, \quad \beta = \frac{(1+a_{i,1})u_{i,2}+c_{i,1}u_{i,3}}{\sqrt{(1+a_{i,1})u_{i,1}+c_{i,1}u_{i,2}}};$$

$$\gamma = \sqrt{(a_{i,1}-1)u_{i,1}+c_{i,1}u_{i,2}}, \quad \delta = \frac{(a_{i,1}-1)u_{i,2}+c_{i,1}u_{i,3}}{\sqrt{(a_{i,1}-1)u_{i,1}+c_{i,1}u_{i,2}}}$$

应用命题 D.1, 对应判别式为  $\Delta_i = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\delta\beta\gamma$ , 反复应用 (D.2), 判别式  $\Delta_i$  可化简为

$$\Delta_i = 4 \det \begin{pmatrix} u_{i,2} & u_{i,3} \\ u_{i,1} & u_{i,2} \end{pmatrix} > 0$$

可以得到

$$\mathcal{D}_{\min} \leq \min_{i \in \{1,2,\dots,k\}} \left( \frac{\Delta_i}{5} \right)^{N_T} = \min_{i \in \{1,2,\dots,k\}} \left\{ \frac{4}{5} \det \begin{pmatrix} u_{i,2} & u_{i,3} \\ u_{i,1} & u_{i,2} \end{pmatrix} \right\}^{N_T} \quad (\text{D.3})$$

现在去掉假设 (I), 即  $\mathbf{V}_{i,1} = \mathbf{I}_2$  或  $\mathbf{V}_{i,1} = -\mathbf{I}_2$ ; 对前一假设, 可得  $\tilde{\mathcal{K}}_i = \mathbf{0}$ ; 而对后一假设, 可得  $\mathcal{K}_i = \mathbf{0}$ . 两种情况皆有  $\mathcal{D}_{\min} = 0$ , 所以式 (D.3) 依然成立.

若去掉假设 (II), 取  $s_i$  为实数, 则可得  $\mathcal{D}_{\min} = 0$ ; 若去掉假设 (III), 可以类似证明 (D.3) 依然成立.

再求 (D.3) 的最小化问题, 为此, 需要计算  $\det(\mathbf{U}_1)\det(\mathbf{U}_2)\cdots\det(\mathbf{U}_k)$

$$\begin{aligned} [\det(\mathbf{U}_i)]^2 &= \det(\mathbf{U}_i^T \mathbf{U}_i) \\ &= \det(\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1}) \cdot \det(\mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{V}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2}) \\ &= |u_{i,1}u_{i,3} - u_{i,2}^2| |\tilde{u}_{i,1}\tilde{u}_{i,3} - \tilde{u}_{i,2}^2| \end{aligned}$$

式中,  $\tilde{u}_{i,l}$  ( $l=1,2,3$ ) 是对对称矩阵  $\mathbf{V}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2}$  基于元的表示. 所以有

$$\det(\mathbf{U}_1)\det(\mathbf{U}_2)\cdots\det(\mathbf{U}_k) = \sqrt{\prod_{i=1}^k |u_{i,1}u_{i,3} - u_{i,2}^2| \prod_{i=1}^k |\tilde{u}_{i,1}\tilde{u}_{i,3} - \tilde{u}_{i,2}^2|}$$

假设  $|u_{i,1}u_{i,3} - u_{i,2}^2| = \min_{i \in \{1,2,\dots,k\}} \{|u_{i,1}u_{i,3} - u_{i,2}^2|, |\tilde{u}_{i,1}\tilde{u}_{i,3} - \tilde{u}_{i,2}^2|\}$ , 则有  $\prod_{i=1}^k |\det(\mathbf{U}_i)| \geq |u_{i_0,1}u_{i_0,3} - u_{i_0,2}^2|^k$ , 由分集积  $\bar{\zeta}[\mathbf{Q}_{2N_T}]$  的定义, 得

$$\max_{\mathbf{U}_i \in \mathcal{U}_i} \bar{\zeta}[\mathbf{Q}_{2N_T}] = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \left(\frac{4}{5}\right)^{1/4}$$

最后, 假设  $\mathbf{U}_{i,1} = \mathbf{U}_{i,2} = (1/\sqrt{2})\mathbf{I}_2$  以及

$$\mathbf{V}_{i,1} = -\mathbf{V}_{i,2} = \mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

若  $\theta = \arctan 2$ , 则  $\bar{\zeta}[\mathbf{Q}_{2N_T}]$  获得此上界。

事实上, 令  $a_{i,1} = \cos \theta$ ,  $b_{i,1} = c_{i,1} = \sin \theta$ , 这时非奇异变换矩阵  $\mathbf{U}_i$  是正交矩阵, 由定义可得  $\mathbf{K}_i = \mathbf{I}_2 + \mathbf{R}_\theta$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_i = \mathbf{I}_2 - \mathbf{R}_\theta$ , 所以

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\min} &= \min_{0 \neq (r, \zeta) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}} \left\{ (r, \zeta)(\mathbf{I}_2 + \mathbf{R}_\theta) \begin{pmatrix} r \\ \zeta \end{pmatrix} (r, \zeta)(\mathbf{I}_2 - \mathbf{R}_\theta) \begin{pmatrix} r \\ \zeta \end{pmatrix} \right\}^{N_T} \\ &= \min_{0 \neq (r, \zeta) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}} \left\{ r^2 \sin \theta - 2r\zeta \cos \theta - \zeta^2 \sin \theta \right\}^{2 \cdot N_T} \\ &= \{\sin \theta\}^{2 \cdot N_T} \min_{0 \neq (r, \zeta) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}} \left\{ r^2 - r\zeta - \zeta^2 \right\}^{2 \cdot N_T} \end{aligned}$$

对整数格点上的最小化问题  $\min_{0 \neq (r, \zeta) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}} \{r^2 - r\zeta - \zeta^2\}$ , 容易得到其最小值为 1。所以当  $\theta = \arctan 2$  时

$$\mathcal{D}_{\min} = \left(\frac{4}{5}\right)^{N_T}$$

另外, 因为非奇异变换矩阵  $\mathbf{U}_i$  是正交矩阵, 所以  $\det(\mathbf{U}_i) = 1$ , 所以

$$\bar{\zeta}[\mathbf{Q}_{2N_T}] = \frac{1}{2\sqrt{2N_T}} \left(\frac{4}{5}\right)^{1/4}$$

这样就完成了定理 7.2 情形 1 的证明。定理 7.2 情形 2 和情形 3 的证明完全类似, 只要用  $\mathbf{U}_i \mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{U}_i \mathbf{P}_2$  代替上面的矩阵  $\mathbf{U}_i$  即可。

**附注 2:** 对于式 (7.40) 所给的变换关系, 对应的非奇异线性变换矩阵  $\mathbf{U}_i$  为

$$\mathbf{U}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cos \theta & \sin \theta & -\cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{aligned} p_i &= r_i + r_{k+i}, & p_{k+i} &= r_i \cos \theta + \zeta_i \sin \theta - r_{k+i} \cos \theta - \zeta_{k+i} \sin \theta \\ q_i &= \zeta_i + \zeta_{k+i}, & q_{k+i} &= r_i \sin \theta - \zeta_i \cos \theta - r_{k+i} \sin \theta + \zeta_{k+i} \cos \theta \end{aligned}$$

所以变换前后的符号变量具有关系

$$z_i = s_i + s_{k+i}; \quad z_{k+i} = (s_i^* - s_{k+i}^*) \exp(j\theta)$$

所以以 Tirkkonen-Boariu-Hottinen<sup>[23]</sup>码为例的接收信号矢量为

$$\mathbf{r}_{\text{TBH}} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ -z_2^* & z_1^* & -z_4^* & z_3^* \\ z_3 & z_4 & z_1 & z_2 \\ -z_4^* & z_3^* & -z_2^* & z_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} + \mathbf{n}$$

接收信号矢量完全等价于对信道参数  $\mathbf{h}$  做 Tirkkonen-Boariu-Hottinen<sup>[23]</sup>编码而对应的信道参数是被传输的符号矢量  $\mathbf{z}$ ，即等价地有

$$\mathbf{r}_{\text{TBH}} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \exp(j\theta) & h_4 \exp(j\theta) \\ -h_2^* & h_1^* & -h_4^* \exp(j\theta) & h_3^* \exp(j\theta) \\ h_3 & h_4 & h_1 \exp(j\theta) & h_2 \exp(j\theta) \\ -h_4^* & h_3^* & -h_2^* \exp(j\theta) & h_1^* \exp(j\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 + s_3 \\ s_1 + s_3 \\ s_1^* - s_3^* \\ s_2^* - s_4^* \end{bmatrix} + \mathbf{n}$$

注意这时关于信道参数  $\mathbf{h}$  的 Tirkkonen-Boariu-Hottinen<sup>[23]</sup>编码矩阵仍然有关系式

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 \rangle = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle = 0; \quad \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle \neq 0, \quad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle \neq 0$$

式中， $\mathbf{v}_i$  为信道参数  $\mathbf{h}$  的 Tirkkonen-Boariu-Hottinen<sup>[23]</sup>编码矩阵的第  $i$  个行矢量。当假设为瑞利信道时，特别由于旋转因子  $\exp(j\theta)$  的关系其不为零的互相关系数可能是非常小的数，因而 Tirkkonen-Boariu-Hottinen<sup>[23]</sup>信道编码系数矩阵是非奇异的，这样就能独立地解出传输符号  $s_i$ 。



## 附录 E 定理 7.3 的证明

在定理 7.3 的假设条件下重新计算

$$(r_i, \varsigma_i) \mathcal{K}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} (r_i, \varsigma_i) \tilde{\mathcal{K}}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

条件 (D.1) 和 (D.2) 依然成立。反复应用条件 (D.1) 和 (D.2)，对格点变量  $(r_i, \varsigma_i)$  的系数进行整理，则式 (E.1) 可以写作

$$(r_i, \varsigma_i) \mathcal{K}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} (r_i, \varsigma_i) \tilde{\mathcal{K}}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} = [\alpha\gamma r_i^2 + (\frac{\alpha\delta}{\gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha}) r_i \varsigma_i + \frac{\beta\delta}{\alpha\gamma} \varsigma_i^2]^2$$

其中参数 (记  $\mu = \det(\mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{V}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1})$ )

$$\alpha\gamma = c_{i,1} \sqrt{\mu}; \quad \alpha^2 \delta = -(a_{i,1} + 1) c_{i,1} \mu; \quad \gamma^2 \beta = -(a_{i,1} - 1) c_{i,1} \mu; \quad \beta\delta = -b_{i,1} c_{i,1} \mu$$

所以式 (E.1) 可以写作

$$(r_i, \varsigma_i) \mathcal{K}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} (r_i, \varsigma_i) \tilde{\mathcal{K}}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} = \mu (c_{i,1} r_i^2 - 2a_{i,1} r_i \varsigma_i - b_{i,1} \varsigma_i^2)^2$$

另外， $\mu = \det[\mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{V}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1}] = \det[\mathbf{V}_{i,1}^T] \det[\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1}]$ ，最后一个等式是因为条件 (D.1)，所以式 (E.1) 可以写作

$$(r_i, \varsigma_i) \mathcal{K}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} (r_i, \varsigma_i) \tilde{\mathcal{K}}_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} = \det[\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1}] (c_{i,1} r_i^2 - 2a_{i,1} r_i \varsigma_i - b_{i,1} \varsigma_i^2)^2$$

注意上面的讨论方法及其结果可以完全适用于  $\mathcal{K}_{k+i}$ 、 $\tilde{\mathcal{K}}_{k+i}$ ，所以

$$\mathcal{D}_{\min} = \min_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} \min_{0 \neq (r, \varsigma) \in \Delta \text{RQAM}} \min_{l=1, 2} \left( \det[\mathbf{U}_{i,l}^T \mathbf{U}_{i,l} + \mathbf{V}_{i,l}^T \mathbf{U}_{i,l}^T \mathbf{U}_{i,l} \mathbf{V}_{i,l}] (c_{i,l} r^2 - 2a_{i,l} r \varsigma_i - b_{i,l} \varsigma_i^2) \right)^{N_T}$$

式中， $\Delta \text{RQAM} = \{(r_1 - r_2, \varsigma_1 - \varsigma_2) \mid r_1 + j\varsigma_1; r_2 + j\varsigma_2 \in \text{RQAM}\}$ ，从调制符号星座图 RQAM 的定义， $(r, \varsigma) \in \text{RQAM}$ ，则  $r$  和  $\varsigma$  为整数。利用能量约束条件，不妨假设

$$0 \leq \sum_{(\tau+j\varsigma_i) \in \text{RQAM}} (r_i, \varsigma_i) (\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1}) \begin{pmatrix} r_i \\ \varsigma_i \end{pmatrix} \leq 1 \quad (\text{E.2})$$

利用矩阵  $\mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{V}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2}$  的定义和  $\mathbf{V}_{i,1}^2 = \mathbf{I}$ ，可得

$$\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1} = \begin{bmatrix} a_{i,1} u_{i,1} + c_{i,1} u_{i,2} & a_{i,1} u_{i,2} + c_{i,1} u_{i,3} \\ b_{i,1} u_{i,1} - a_{i,1} u_{i,2} & b_{i,1} u_{i,2} - c_{i,1} u_{i,3} \end{bmatrix}$$

其中  $2a_{i,1} u_{i,2} + c_{i,1} u_{i,3} = b_{i,1} u_{i,1}$ ，所以式 (E.2) 可以写作

$$0 \leq (a_{i,1} u_{i,1} + c_{i,1} u_{i,2}) \sum_{(\tau+j\varsigma_i) \in \text{RQAM}} r_i^2 + 2(a_{i,1} u_{i,2} + c_{i,1} u_{i,3}) \sum_{(\tau+j\varsigma_i) \in \text{RQAM}} r_i \varsigma_i + (b_{i,1} u_{i,2} - a_{i,1} u_{i,3}) \sum_{(\tau+j\varsigma_i) \in \text{RQAM}} \varsigma_i^2 \leq 1$$

由于

$$\sum_{(\tau+j\varsigma_i) \in \text{RQAM}} r_i^2 = \frac{4M^2 - 1}{2(2N^2 + 2M^2 - 1)}; \quad \sum_{(\tau+j\varsigma_i) \in \text{RQAM}} \varsigma_i^2 = \frac{4N^2 - 1}{2(2N^2 + 2M^2 - 1)}$$

令  $\varepsilon = \frac{4M^2 - 1}{2(2N^2 + 2M^2 - 1)}$ 、 $\rho = \frac{4N^2 - 1}{2(2N^2 + 2M^2 - 1)}$ 。容易证明  $\sum_{(r, \varsigma) \in \Delta\text{RQAM}} r_i \varsigma_i = 0$ ，这样能量约束

可以写作

$$0 \leq (a_{i,1} u_{i,1} + c_{i,1} u_{i,2}) \varepsilon + (b_{i,1} u_{i,2} - a_{i,1} u_{i,3}) \rho \leq 1$$

利用约束条件 (D.2) 和假设  $a_{i,1} \neq 0$ ，消去其中的变量  $u_{i,2}$  可得能量约束条件为

$$0 \leq \frac{(a_{i,1}^2 + 1)\varepsilon + b_{i,1}^2 \rho}{2a_{i,1}} u_{i,1} - \frac{c_{i,1}^2 \varepsilon + (a_{i,1}^2 + 1)\rho}{2a_{i,1}} u_{i,3} \leq 1 \quad (\text{E.3})$$

同样利用条件 (D.2) 和假设  $a_{i,1} \neq 0$ ，可得

$$\det[\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2}] = u_{i,2}^2 - u_{i,1} u_{i,3} = \frac{b_{i,1}^2 u_{i,1}^2 - 2(a_{i,1}^2 + 1)u_{i,1} u_{i,3} + c_{i,1}^2 u_{i,3}^2}{2a_{i,1}^2}$$

此处仍然假设  $a_{i,1} \neq 0$ ，后面将考虑去掉此限制。为求行列式  $\det[\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2}]$  的上界，考虑优化问题

$$\begin{aligned} & \max_{x,y} \frac{b^2 x^2 - 2(a^2 + 1)xy + c^2 y^2}{2a^2} \\ & 0 \leq \frac{(a^2 + 1)\varepsilon + b^2 \rho}{2a} x - \frac{c^2 \varepsilon + (a^2 + 1)\rho}{2a} y \leq 1 \end{aligned}$$

利用 Lagrange 乘子法和条件 (D.2) 可得  $(x, y) = (\lambda a \rho, -\lambda a \varepsilon)$ 。再利用约束条件可得

$$\lambda = \frac{2}{(c\varepsilon - b\rho)^2 + 4\varepsilon\rho}$$

所以

$$(x, y) = \left( \frac{a\rho}{(c\varepsilon - b\rho)^2 + 4\varepsilon\rho}, -\frac{a\varepsilon}{(c\varepsilon - b\rho)^2 + 4\varepsilon\rho} \right)$$

所以在满足约束条件 (E.3) 时，有

$$\max_{x,y} \frac{b^2 x^2 - 2(a^2 + 1)xy + c^2 y^2}{2a^2} = \frac{1}{(c\varepsilon - b\rho)^2 + 4\varepsilon\rho}$$

所以

$$\mathcal{D}_{\min} \leq \min_{0 \neq (r, \varsigma) \in \Delta\text{RQAM}} \left( \frac{(c_{i,\ell} r_i^2 - 2a_{i,\ell} r_i \varsigma_i - b_{i,\ell} \varsigma_i^2)^2}{(b_{i,\ell} \rho - c_{i,\ell} \varepsilon)^2 + 4\varepsilon\rho} \right)^{N_T}$$

由于对于  $0 \neq (r, \varsigma) \in \Delta\text{RQAM}$  仅有三种可能性，即  $(d, 0) \in \Delta\text{RQAM}$ ， $(0, d) \in \Delta\text{RQAM}$ ， $(d, d) \in \Delta\text{RQAM}$ ，所以

$$\begin{aligned} & \min_{0 \neq (r, \varsigma) \in \Delta\text{RQAM}} \left( (c_{i,\ell} r_i^2 - 2a_{i,\ell} r_i \varsigma_i - b_{i,\ell} \varsigma_i^2)^2 \right) \leq \min \left\{ b_{i,\ell}^2 d^4, c_{i,\ell}^2 d^4, (c_{i,\ell} - 2a_{i,\ell} - b_{i,\ell})^2 d^4 \right\} \\ & \mathcal{D}_{\min} \leq \left( \frac{\min \left\{ b_{i,\ell}^2 d^4, c_{i,\ell}^2 d^4, (c_{i,\ell} - 2a_{i,\ell} - b_{i,\ell})^2 d^4 \right\}}{(b_{i,\ell} \rho - c_{i,\ell} \varepsilon)^2 + 4\varepsilon\rho} \right)^{N_T} \quad (\text{E.4}) \end{aligned}$$

再次利用式 (D.1) 和  $\varepsilon + \wp = 1$ , 可得当且仅当  $b_{i,l}^2 = c_{i,l}^2 = (c_{i,l} - 2a_{i,l} - b_{i,l})^2$ , 即  $b_{i,l}^2 = c_{i,l}^2 = 4a_{i,l}^2 = 4/5$ , 式 (E.4) 右边获得最小极大值, 所以

$$\mathcal{D}_{\min} \leq \left( \frac{d^4}{1 + \varepsilon \wp} \right)^{N_T}$$

若  $a_{i,1} = 0$ , 则  $b_{i,1}c_{i,1} = 1$ , 且  $0 \leq (c_{i,1}\varepsilon + b_{i,1}\wp)u_{i,2} \leq 1$  以及

$$\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1} = \begin{bmatrix} c_{i,1}u_{i,2} & c_{i,1}u_{i,3} \\ b_{i,1}u_{i,1} & b_{i,1}u_{i,2} \end{bmatrix}$$

由于此矩阵的对称和非负定性, 得  $c_{i,1}u_{i,2} \geq 0$ ,  $b_{i,1}u_{i,2} \geq 0$ ,  $u_{i,3} = b_{i,1}u_{i,1} / c_{i,1}$ 。所以  $u_{i,2}^2 \leq (c_{i,1}\varepsilon + b_{i,1}\wp)^2$ , 以及

$$\det(\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1}) = u_{i,2}^2 - u_{i,1}u_{i,3} = u_{i,2}^2 - u_{i,1}^2 / c_{i,1}^2 \leq u_{i,2}^2$$

所以同样有

$$\det(\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1}) \leq \frac{1}{(b_{i,1}\wp - c_{i,1}\varepsilon)^2 + 4\varepsilon\wp}$$

对于  $\mathcal{D}_{\min}$  的上界  $[d^4 / (1 + \varepsilon \cdot \wp)]^{N_T}$ , 我们证明它是可以达到的, 为此, 构造出相应非奇异线性变换矩阵  $\mathbf{U}_i$ , 使对应上界可取得。

对于一个固定的 RQAM 符号调制星座图  $\mathcal{S}$ ,  $N$ 、 $M$ 、 $\varepsilon$ 、 $\wp$  和  $\varepsilon + \wp = 1$  都是确定的。令  $\alpha = \arctan 2$ ,  $\mu = \sqrt{5/12(1 + \varepsilon \cdot \wp)}$ , 以及矩阵

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & 1 - 2\varepsilon \\ 1 - 2\varepsilon & 2 - \varepsilon \end{bmatrix}$$

显然有  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}^2 = \mathbf{I}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}^T = \tilde{\mathbf{R}}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}^2 = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{PRP} = \tilde{\mathbf{R}}$ ,  $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{P} = \mathbf{R}$  和  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$ 。因为  $0 < \varepsilon < 1$ , 所以  $\boldsymbol{\Sigma}$  为对称正定矩阵, 所以  $\boldsymbol{\Sigma}$  有正交分解表达式  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{V}_\sigma^T \mathbf{D}_\sigma \mathbf{V}_\sigma$ , 其中  $\mathbf{D}_\sigma$  为对角矩阵,  $\mathbf{D}_\sigma = \text{diag}\{\lambda_{\sigma,1}, \lambda_{\sigma,2}\}$  ( $0 < \lambda_{\sigma,1} < \lambda_{\sigma,2}$ ),  $\lambda_{\sigma,1}$ 、 $\lambda_{\sigma,2}$  是矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  的特征值;  $\mathbf{V}_\sigma$  为正交矩阵。令

$$\mathbf{U}_{i,1} = \mu \cdot \mathbf{V}_\sigma^T \sqrt{\mathbf{D}_\sigma} \mathbf{V}_\sigma, \quad \mathbf{U}_{i,2} = \mu \cdot \mathbf{V}_\sigma^T \mathbf{P} \sqrt{\mathbf{D}_\sigma} \mathbf{P} \mathbf{V}_\sigma \mathbf{P} \quad (i=1,2,\dots,k)$$

则有

$$\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} = \mu^2 \boldsymbol{\Sigma}, \quad \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} = \mu^2 \mathbf{P} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P}, \quad \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} = \mu^2 \mathbf{V}_\sigma^T \sqrt{\mathbf{D}_\sigma} \mathbf{V}_\sigma \mathbf{V}_\sigma^T \mathbf{P} \sqrt{\mathbf{D}_\sigma} \mathbf{P} \mathbf{V}_\sigma \mathbf{P} = \mu^2 \sqrt{\lambda_{\sigma,1} \lambda_{\sigma,2}} \mathbf{P}$$

设  $\mathbf{V}_{i,1} = \mathbf{R}$ 、 $\mathbf{V}_{i,2} = -\mathbf{PRP}$  ( $i=1,2,\dots,k$ ), 则  $\mathbf{V}_{i,1}^2 = \mathbf{R}^2 = \mathbf{I}_2$ ;  $\mathbf{V}_{i,2}^2 = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{R}}^2\mathbf{P} = \mathbf{I}_2$ , 且

$$\mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{V}_{i,2} = \mathbf{V}_{i,1}^T (\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2})$$

$$\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2} = \mu^2 \sqrt{\lambda_{\sigma,1} \lambda_{\sigma,2}} (\mathbf{P} - \mathbf{R}^2 \mathbf{P}) = \mathbf{0}$$

这样定理 7.1 情形 1 的条件满足。所以, 结合条件 (E.4) 对于任意  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 有

$$\det(\mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} + \mathbf{V}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1}^T \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1}) (c_{i,1}r^2 - 2a_{i,1}r\zeta - b_{i,1}\zeta^2)^2 \leq \mu^4 \det(\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}) \left(\frac{4}{5}\right) (r^2 - r\zeta - \zeta^2)^2$$

我们进一步证明, 对于  $\det(\mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{V}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2}) (c_{i,2}r^2 - 2a_{i,2}r\zeta - b_{i,2}\zeta^2)^2$  有同样的结论。

$$\det(\mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} + \mathbf{V}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2}^T \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2}) = \det(\mu^2 \mathbf{P} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P} + \mu^2 (-\mathbf{PRP}) \mathbf{P} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P} (-\mathbf{PRP})) = \mu^4 \det(\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R})$$

我们利用了条件  $\mathbf{PRP} = \tilde{\mathbf{R}}$  和  $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{P} = \mathbf{R}$ 。所以对于  $l=1,2$ , 皆有

$$\det(\mathbf{U}_{i,l}^T \mathbf{U}_{i,l} + \mathbf{V}_{i,l}^T \mathbf{U}_{i,l}^T \mathbf{U}_{i,l} \mathbf{V}_{i,l})(c_{i,l} r^2 - 2a_{i,l} r \zeta - b_{i,l} \zeta^2)^2 \leq \mu^4 \det(\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}) \left(\frac{4}{5}\right) (r^2 - r\zeta - \zeta^2)^2$$

另一方面, 显然有

$$\min_{0 \neq (r, \zeta) \in \Delta_{\text{RQAM}}} (r^2 - r\zeta - \zeta^2)^2 = \min_{0 \neq (r, \zeta) \in \Delta_{\text{RQAM}}} (-r^2 - r\zeta + \zeta^2)^2 = d^4$$

所以

$$\mathcal{D}_{\min} = \left( \frac{d^4}{1 + \varepsilon \rho} \right)^{N_T}$$

这就完成了定理 7.3 情形 1 的证明。其余两个情形完全类似地论证, 只是用  $\mathbf{U}_i \mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{U}_i \mathbf{P}_2$  代替相应  $\mathbf{U}_i$ 。

**附注 3:** 对于定理 7.3 所述的非奇异线性变换矩阵  $\mathbf{U}_i$ , 由假设

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}_2 = -\mathbf{P}\mathbf{V}_1\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \\ \mathbf{U}_{i,1} &= \rho \begin{bmatrix} \beta^2 \sqrt{\lambda_1} + \alpha^2 \sqrt{\lambda_2} & \alpha\beta(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}) \\ \alpha\beta(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}) & \beta^2 \sqrt{\lambda_2} + \alpha^2 \sqrt{\lambda_1} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} a & d \\ d & b \end{bmatrix} \\ \mathbf{U}_{i,2} &= \rho \begin{bmatrix} \alpha\beta(\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1}) & \beta^2 \sqrt{\lambda_2} + \alpha^2 \sqrt{\lambda_1} \\ \beta^2 \sqrt{\lambda_1} + \alpha^2 \sqrt{\lambda_2} & \alpha\beta(\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1}) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} -d & b \\ a & -d \end{bmatrix} \\ \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{V}_{i,1} &= \begin{bmatrix} a & d \\ d & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \theta + d \sin \theta & -d \cos \theta + a \sin \theta \\ d \cos \theta + b \sin \theta & -b \cos \theta + d \sin \theta \end{bmatrix} \\ \mathbf{U}_{i,2} \mathbf{V}_{i,2} &= \begin{bmatrix} -d & b \\ a & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d \cos \theta - b \sin \theta & -b \cos \theta + d \sin \theta \\ a \cos \theta + d \sin \theta & d \cos \theta - a \sin \theta \end{bmatrix} \\ \mathbf{U}_i &= \begin{bmatrix} a & d & -d & b \\ d & b & a & -d \\ a \cos \theta + d \sin \theta & -d \cos \theta + a \sin \theta & -d \cos \theta - b \sin \theta & -b \cos \theta + d \sin \theta \\ d \cos \theta + b \sin \theta & -b \cos \theta + d \sin \theta & a \cos \theta + d \sin \theta & d \cos \theta - a \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即有变换前后符号实、虚部关系为

$$p_i = ar_i + d\zeta_i - dr_{k+i} + b\bar{\zeta}_{k+i}, \quad q_i = dr_i + b\zeta_i + ar_{k+i} - d\zeta_{k+i}$$

$$p_{k+i} = (a \cos \theta + d \sin \theta)r_i - (d \cos \theta - a \sin \theta)s_i - (d \cos \theta + b \sin \theta)r_{k+i} + (-b \cos \theta + d \sin \theta)s_{k+i}$$

$$q_{k+i} = (d \cos \theta + b \sin \theta)r_i + (-b \cos \theta + d \sin \theta)s_i + (a \cos \theta + d \sin \theta)r_{k+i} + (d \cos \theta - a \sin \theta)s_{k+i}$$

注意,  $p_{k+i}$  与  $q_{k+i}$  表达式中对应符号实、虚部的系数完全相同只是次序有变化。所以变换前后的符号变量具有关系

$$z_i = jds_i^* + a\bar{s}_i + ds_{k+i} + ja\hat{s}_{k+i}^*$$

$$z_{k+i} = jd \exp(-j\theta)s_i + a \cos \theta \bar{s}_i^* + ja \sin \theta \hat{s}_i^* + d \exp(-j\theta)s_{k+i}^* - a\bar{s}_{k+i} + ja \cos \theta \hat{s}_{k+i}$$

式中,  $\hat{s}_i = br_i + ja\zeta_i$  和  $\bar{s}_i = ar_i + jb\zeta_i$ , 称为对原始符号的斜重编码 (Skew-Weight Coding)。

由此可见定理 7.3 传输方式的分集特性。

## 附录 F 定理 7.7 的证明

考虑 RQAM 类符号调制星座图, 令  $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{S} = \{p+jq: (p,q)^T = \mathbf{U}(r,\zeta)^T, r+j\zeta \in \text{RQAM}\}$

则由能量约束条件有

$$1 = \sum_{p+jq \in \mathcal{S}} (p^2 + q^2) = \sum_{r+j\zeta \in \text{RQAM}} (r,\zeta) \mathbf{U}^T \mathbf{U} (r,\zeta)^T = (u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2) \varepsilon + (u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2) \rho$$

令  $\Delta z_i = \Delta p_i + j\Delta q_i$ ,  $\Delta x_i = \Delta r_i + j\Delta \zeta_i$ , 则  $(\Delta p_i, \Delta q_i) = \mathbf{U}(\Delta r_i, \Delta \zeta_i)^T$ 。利用编码矩阵  $\mathcal{G}(z_1, z_2, \dots, z_k)$  的线性和正交性, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\min} &= \min_{i=1,2,\dots,2k} \min_{(\Delta p_i + j\Delta q_i) \in \Delta \mathcal{S}} (2\Delta p_i \cdot \Delta q_i)^{2N_T} \\ &= \min_{i=1,2,\dots,2k} \min_{(\Delta r_i + j\Delta \zeta_i) \in \Delta \text{RQAM}} (2(u_{1,1}\Delta r_i + u_{1,2}\Delta \zeta_i) \cdot (u_{2,1}\Delta r_i + u_{2,2}\Delta \zeta_i))^{2N_T} \end{aligned}$$

下面对因子  $(u_{1,1}\Delta r_i + u_{1,2}\Delta \zeta_i) \cdot (u_{2,1}\Delta r_i + u_{2,2}\Delta \zeta_i)$  应用定理 7.2 曾用过的化简方法, 且省去其中的差分因子  $\Delta$ 。因为  $\mathbf{U}$  为非奇异变换矩阵, 所以  $\det(\mathbf{U}) \neq 0$ , 因此

$$2(u_{1,1}r_i + u_{1,2}\zeta_i) \cdot (u_{2,1}r_i + u_{2,2}\zeta_i) = \sqrt{\det(\mathbf{U}^T \mathbf{U})} (cr_i^2 - 2ar_i\zeta_i - b\zeta_i^2)$$

其中系数

$$a = -\frac{u_{1,1}u_{2,2} + u_{1,2}u_{2,1}}{\sqrt{\det(\mathbf{U}^T \mathbf{U})}}; \quad b = -\frac{2u_{1,2}u_{2,2}}{\sqrt{\det(\mathbf{U}^T \mathbf{U})}}; \quad c = \frac{2u_{1,1}u_{2,1}}{\sqrt{\det(\mathbf{U}^T \mathbf{U})}}$$

显然有  $a^2 + bc = 1$ 。因此

$$\mathcal{D}_{\min} = \min_{i=1,2,\dots,k} \min_{(\Delta r_i + j\Delta \zeta_i) \in \Delta \text{RQAM}} (\det(\mathbf{U}^T \mathbf{U}) (cr_i^2 - 2ar_i\zeta_i - b\zeta_i^2)^2)^{N_T}$$

在能量约束条件下, 应有

$$\det(\mathbf{U}^T \mathbf{U}) \leq \frac{1}{(c\varepsilon - b\rho)^2 + 4\varepsilon\rho}$$

所以

$$\mathcal{D}_{\min} = \min_{i=1,2,\dots,k} \min_{(\Delta r_i + j\Delta \zeta_i) \in \Delta \text{RQAM}} \left( \frac{(cr_i^2 - 2ar_i\zeta_i - b\zeta_i^2)^2}{(c\varepsilon - b\rho)^2 + 4\varepsilon\rho} \right)^{N_T}$$

与定理 7.2 的证明方法完全相同, 可得  $\mathcal{D}_{\min}$  有上界, 即  $\mathcal{D}_{\min} \leq (d^4 / (1 + \varepsilon \cdot \rho))^{N_T}$ 。进一步, 对于一个固定的 RQAM 符号调制星座图  $\mathcal{S}$ , 定义参数

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\right), \quad \theta_2 = \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon \cdot \rho}}\right) - \theta_1, \quad \alpha = 1/\sqrt{\varepsilon}, \quad \beta = 1/\sqrt{\rho}$$

以及非奇异变换矩阵

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \alpha \cos \theta_1 & \beta \sin \theta_1 \\ -\alpha \sin \theta_2 & \beta \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

则可以使得  $\mathcal{D}_{\min}$  获得其上界, 即  $\mathcal{D}_{\min} = (d^4 / (1 + \varepsilon \cdot \rho))^{N_T}$ , 这样就完成了定理 7.7 的证明。

## 第8章 MIMO系统与正交频分复用及空时频编码传输技术

### 引言

新一代的移动通信技术不能再停留在满足“在任何时间、任何地点、与任何人的通信”的需求。而应该发扬奥林匹克的精神，以更快（*swifter*）——低复杂度的数据处理；更高（*higher*）——高速的数据传输；更强（*stronger*）——稳健的性能表现；更美（*perfect*）——称心如意的服务质量满足人们对通信的需求。要实现这一目标，只有充分地利用移动无线信道的空间分集、时间分集、频率分集特性，将信道的多径传输、时间选择性、频率选择性等这些不利因素转换为提升通信系统性能的可利因素。

第1~7章所讨论的多输入多输出系统与空时编码技术部分有效地利用了无线信道的空间分集、时间分集，即部分地将信道的多径传输、时间选择性转换成提升通信系统性能的可利因素。

对于宽带通信系统其信道基本上是频率选择信道，OFDM技术能自然地将其转化为平坦信道。因而将多输入多输出系统与空时编码和正交频分复用（OFDM）技术结合是顺理成章的。本章将讨论这种结合的原理。

本章前面各小节讨论OFDM技术的原理，论述OFDM技术如何借助于离散傅里叶变换（DFT）这一数字调制技术实现各个环节。OFDM技术将频率选择性衰减的宽带无线信道划分为若干个并行的窄带平坦衰落子信道，将原来高速传输的数据流转换成在各个子信道传输的低速数据流，子信道数的多少应满足每个子信道带宽远小于信道的相干带宽，因此在OFDM系统中可以不考虑符号间干扰（ISI）问题。OFDM信号的帧有循环前缀结构，循环前缀的长度大于信道多径传输的最大时延，从而保证有效地消除多径传输的干扰，使得在OFDM系统中无须均衡设备。

基于这些认知，若能对OFDM系统的每个子信道信号进行多输入多输出系统与空时编码传输，则不仅能充分发挥OFDM系统在消除多径传输影响、子信道间干扰、符号间干扰等各个方面的优异特性，又可使信号具有空间、时间、频率上的多重自由度，更能通过对原始数据进行空-时（ST）、空-频（SF）、时-频（TF）、空-时-频（STF）联合编码使信号充分利用无线信道在时域、频域、空域及其联合域实现最大分集效应，满足未来通信对信号更快、更高、更强、更美传输的需求。其途径就是多输入多输出系统与空时编码和正交频分复用（MIMO-STFC-OFDM）传输技术的完美结合。

为了讨论多输入多输出系统（MIMO）和空时编码（STC）和正交频分复用（OFDM）技术的结合原理，前面各个章节已经对多输入多输出系统与空时编码的原理特性进行了广

泛的讨论，读者已经有一个比较系统的认知。为能更好地理解多输入多输出系统和空时编码和 OFDM 技术的结合的必要性、合理性及其效益，有必要对 OFDM 的原理、关键问题的解决思路、所能获得的效益等给予简单的论述，以便建立一些基本的概念，对关联问题有一些基本的理解，从而为这种结合的原理、推理、分析方法的认知奠定基础。至于详尽的讨论本章参考文献附有一些较为经典的论著<sup>[1-2]</sup>。基于这样的考虑，本章从结构上分为三大块，第一部分是关于 OFDM 技术的基本概念、原理、几个关键问题和解决思路的论述；第二部分是在 OFDM 传输系统中采用多输入多输出系统（MIMO）和空时编码（STC）技术时系统性能的理论研究——系统成对差错概率分析，这是深层次揭示系统内在规律性的方法和手段；第三部分以实例说明多输入多输出系统与空时编码（STC）和 OFDM 结合的原理、关键技术、效益分析等。当然，有一些枝节问题将穿插在讨论主要问题的过程中予以阐述、分析化解。

## 8.1 正交频分复用（OFDM）技术的基本概念

本节讨论正交频分复用（OFDM）技术的基本概念<sup>[1]</sup>。在一个 OFDM 传输方案中，将可用的频谱资源划分为大量正交、重叠、窄带并行子信道进行传输。从理论上说，子载波间的间隔在理论上达到最小，因而相对于一般频分复用（FDMA）技术而言，其频谱的利用是非常紧致的（如图 8.1 所示）。OFDM 传输方案最吸引人的地方是在接收端对多径传输影响的处理。如第 1 章所述，多径传输因素对于无线通信系统来说是不可避免的。多径传输主要有两个弊端：一是频率选择性衰减；二是符号间干扰（Intersymbol Interference, ISI）。由于子信道的划分（如图 8.1 所示）使频率选择性信道转换为平坦信道，克服了第一个弊端；高速串行传输转换为低速并行传输大大降低符号传输速率，使得符号周期远远大于信道脉冲响应的支撑集，从而消除了第二个弊端——符号间干扰问题。加之采用强有力的时频交织纠错编码以及插入额外的保护间隔，进而产生更为稳健、有效、有力的抵御频率选择性衰减和消除 OFDM 符号间干扰的能力。所以对于 OFDM 传输系统而言，通常是不需要接收端均衡设备的。

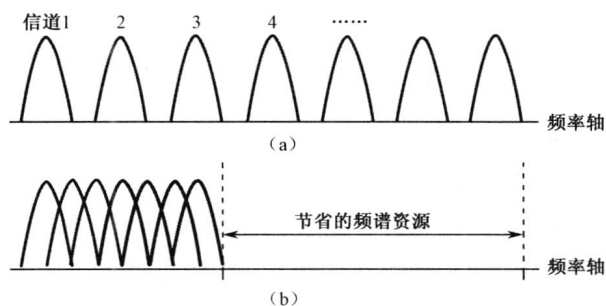


图 8.1 传统多载波技术的频谱划分和正交频分复用技术的频谱划分

但 OFDM 传输系统也有两大缺陷，一个是具有较大的信号动态范围，通常称为峰均值

比 peak-to-average (PAR) ratio)；另外一个敏感于频率差错。这也构成 OFDM 传输系统的研究主题，即峰均值比问题与同步问题。

由第 1 章的讨论，无线通信最为显著的特征是多径传输，即同一信号到达接收端有多个模板，它们分别历经不同的路径、以不同的衰落、不同的时延到达接收天线（见图 1.3），从而形成相互干扰，称为符号间干扰（ISI），此干扰使得很难从接收信号恢复出原始发送信号。对多径信道的刻画是通过信道脉冲响应实现的，利用《信号与系统》的经典理论，信道脉冲响应是当发送信号为单脉冲信号时的接收信号（见图 1.8）。如第 1 章所述，描述多径信道的关键参数是所谓的信道最大延迟  $\tau_{\max}$ 。假设系统以符号周期  $T$  传输信息符号，则对于具有最大延迟  $\tau_{\max}$  的多径信道，对于当前符号可能存在有  $\tau_{\max}/T$  个符号的干扰。如何认识这个干扰？以单载波传输为例，传输符号经脉冲形成器后通过多径信道到达接收端，经匹配滤波后输出判决。假设整个通信链路满足下面的条件：

(1) 传输速率  $R = 1/T = 8 \text{ MS/s}$ （兆符号每秒）（新一代移动通信将高达  $100 \text{ MS/s}$  甚至更高传输速率）；

(2) 信道最大延迟  $\tau_{\max} = 220 \mu\text{s}$ 。

对于单载波传输系统，这时的符号间干扰个数  $\tau_{\max}/T = 1800$ ，系统要处理如此庞大的干扰数据是不可能完成的任务。要解决这个问题最为有力的手段就是采用多载波传输系统，如图 8.1 和图 8.2 所示。该系统将原来以速率  $R$  传输的数据流复用为  $N_s$  个并行的数据流，其复用速率为  $R_m = (1/T_m) = R/N_s$ 。进而将每个数据流加载到同一频带的不同频率的载波上传输，这样接收信号是由  $N_s$  个并行的接收链路实现的。这时，对于同样的信道最大延迟  $\tau_{\max}$ ，每个子系统的符号间干扰强度为  $\tau_{\max}/T_m = \tau_{\max}/(T \cdot N_s)$ ，假设  $N_s = 8192$ ，则这时的符号间干扰强度为  $\tau_{\max}/T_m = 0.2$ ，这是一个完全可以容忍的、不需要其他额外处理设备的干扰。然而对于需要  $N_s = 8192$  个并行的接收装置而言其实现几乎是不可能的。能实现这样一个并行传输的技术就是所谓的正交频分复用（OFDM）技术。

## 8.2 正交频分复用（OFDM）技术的基本原理

本节讨论正交频分复用（OFDM）技术的基本原理<sup>[1]</sup>。

正交频分复用（OFDM）技术是多载波传输的一种，其关键是多载波之间相互正交以此提高频谱利用率。OFDM 技术将可用的频谱资源划分为许多子载波，每个子载波承载低速的数据流，与频分多址（FDMA）技术不同，这些子载波之间是无隔离且相互正交的，以此克服密集分布的子载波之间的相互干扰（Intercarriers Interference, ICI）。图 8.2 给出的是正交频分复用子载波的时域和频域曲线图。从图中可见，在时域各个子载波的频率是倍增的，而在频域各个子载波是正交的。



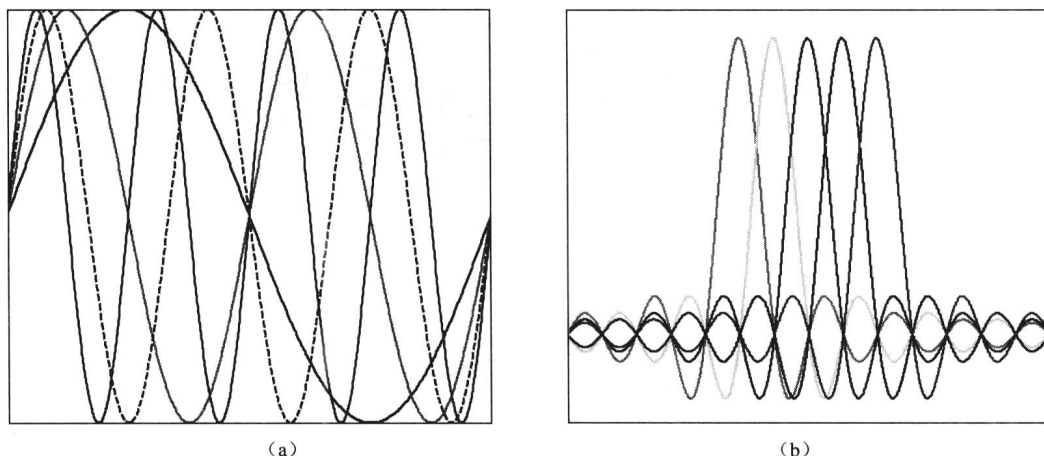


图 8.2 各个子载波的时域曲线和各个子载波的频域曲线

频分多址（FDMA）技术需要在子信道之间插入保护带以便实现子信道之间的相互隔离和相应子信道匹配滤波器的实现。典型的频分多址（FDMA）系统，大约需要将整个频带的一半用于保护带，随着信道带宽的变窄和频带的增加，这种资源浪费愈加严重，见图 8.1（a）。

正交频分复用（OFDM）技术将系统的带宽资源划分为许多窄带子信道，由于每个子信道的载波是相互正交，因而不需要为形成接收匹配滤波器而在各个子信道间加保护带，这样就避免了频分多址（FDMA）系统的额外开销，见图 8.1（b）。

子载波的正交性意味着每个子载波在一个符号周期内具有整数周期，这样每个子载波在其他载波的中心频率处恰好取到零点，因而无子载波间干扰。由于正交频分复用系统的子载波的带宽非常窄（约 1000Hz），因而具有非常低的符号速率，因而具有很强的抗多径干扰能力，也就是说系统的信道最大延迟  $\tau_{\max}$  可以有更大的取值范围，而相应的符号间干扰强度是可以容忍的。

### 8.2.1 正交频分复用（OFDM）信号的生成和表达式

OFDM 信号的生成链路是 OFDM 系统发送端链路的主要组成部分。OFDM 信号的生成可以分为这样几个步骤（图 8.3 所示为 OFDM 系统上支路链路）：

- （1）根据输入数据的调制方式选择 OFDM 信号的频带。
- （2）对输入符号做串并变换，将相应的子数据流映射到对应子信道，选择子信道的载波——子载波。
- （3）依据调制方案（BPSK、QPSK、QAM）计算子载波的幅度和相位。
- （4）利用 IFFT 运算将计算所得子载波映射到时域，同时保证各子载波间的正交性。
- （5）加窗和插入保护间隔（循环前缀）以抑制由于多路径传输产生的符号间干扰。
- （6）经数模变换和上变频送入无线传输信道。

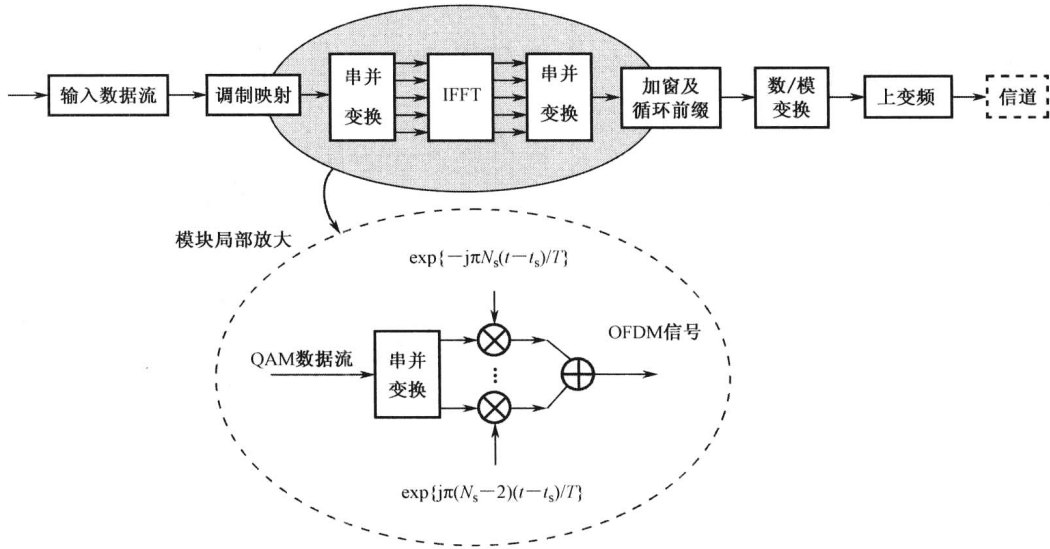


图 8.3 OPDM 系统发送端模块图和 OFDM 信号生成模块图

## 8.2.2 OFDM 信号的数学表达式

关于 OFDM 信号的数学表达式可以参考图 8.3 所示虚框内 OFDM 信号的生成原理图，依据此图定义起始于时刻  $t_s$  的 OFDM 信号的等效低通模型为

$$s(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=N_s/2, i \neq 0}^{N_s/2-1} X_{i+N_s/2} \text{rect}[(t-t_s)/T] \exp[j2\pi i(t-t_s)/T] \right\} \quad (8.1)$$

式中， $\text{rect}(\cdot)$  为单位矩形脉冲函数，用它主要是为表示信号  $s(t)$  的周期特性； $X_i$  为调制符号星座图内的点数据； $N_s$  为子载波数； $T$  为符号周期。在式 (8.1) 中，取  $t_s = 0$  并忽略矩形函数，对  $s(t)$  以  $T/N_s$  为间隔作等间隔采样同时综合掉因子  $\exp(j\pi k)$ ，得

$$s[k] = s(kT/N_s) = \sum_{l=0}^{N_s-1} X_l \exp(j2\pi lk/N_s) \quad (0 \leq k \leq N_s-1) \quad (8.2)$$

可以看出，采样数据  $s[k]$  与调制符号星座图数据  $X_i$  之间的关系为（为求得对等关系，将数据  $X_i$  写成  $X[i]$ ）

$$s[k] = \text{IDFT}(X[i]) \quad (0 \leq k \leq N_s-1) ; \quad X[i] = \text{DFT}(s[k]) \quad (0 \leq i \leq N_s-1) \quad (8.3)$$

根据以上分析可以看到，OFDM 系统的调制和解调可以分别用 IDFT 和 DFT 来代替，通过  $N_s$  点 IDFT (IFFT) 运算，把频域数据符号  $X[i]$  变换成时域数据符号  $s[k]$ ，经过射频频载波调制后，发送到无线信道中，其中每个 IDFT (IFFT) 输出的数据符号  $s[k]$  都是所有子载波信号经过叠加而生成的，在接收端，对  $s[k]$  进行  $N_s$  点 DFT (FFT) 运算，可以恢复原始数据符号  $X[i]$ 。

### 8.2.3 保护间隔与循环前缀的插入

OFDM 系统的一大优点是它能够有效地抵抗多径时延扩展，减小符号间干扰 (ISI)，把输入数据流串并变换到  $N_s$  个并行的子信道中，使得每一个调制子载波的数据符号周期可以扩大为原始数据符号周期的  $N_s$  倍，因此时延扩展与符号周期的数值比也同样降低  $N_s$  倍，符号间干扰强度同样降低  $N_s$  倍。

但是，由于子载波数很大，因而子载波频偏和时域同步偏离等因素也可能从另一方面加剧符号间干扰 (ISI)，为此 OFDM 信号采用增加保护间隔 (Guard Interval, GI) 的手段来化解这一问题。为了最大限度地消除符号间干扰，保护间隔  $\tau_g$  一般都要大于无线信道的最大时延扩展  $\tau_{\max}$ ，这样一个符号的多径分量就不会对下一个符号造成影响，从而完全消除符号间干扰 (ISI)。

加入的保护间隔可以是一段空白信号，即不传输任何信号。但这种情况下，子载波相乘在一个 OFDM 符号周期内积分不再为零 (如图 8.4 所示，子载波 2 在延迟区间内取零值，由于阴影部分只是半个周期，这样子载波 2 与子载波 1 相乘在一个符号周期内积分不为零)，也即子载波的正交性遭到破坏，从而产生子载波间干扰 (ICI)。为了解决这一问题，可以采用插入循环前缀的办法，即将 OFDM 信号的后  $\tau_g$  时间段的样值复制到 OFDM 信号的前面形成前缀 (如图 8.4 所示)。因为  $\tau_g$  大于  $\tau_{\max}$ ，从而保证时间段内也包含整数个载波周期，因而能保证子载波相乘结果在一个 OFDM 符号周期内积分为零，保证了子载波的正交性，消除载波间干扰 (ICI)。即便考虑到多路径传输，同样由于  $\tau_g$  大于  $\tau_{\max}$ ，同样可以保证多路径波在一个符号周期内的积分为零 (即确保正交性，如图 8.5 所示)。这样就可以很好理解 OFDM 信号的 IDFT (IFFT) 运算生成原理及增加保护间隔与插入循环前缀对消除符号间干扰和抑制子载波间干扰的作用。

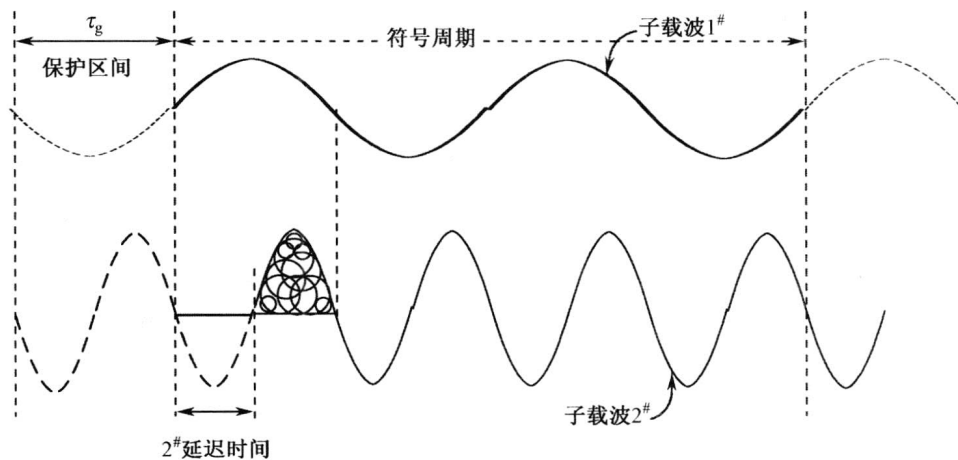


图 8.4 OFDM 的信号延迟、保护间隔和循环前缀

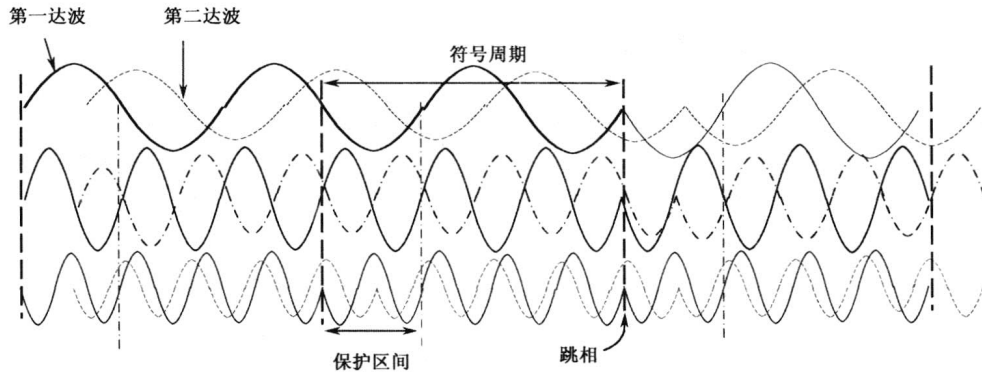


图 8.5 OFDM 的信号延迟、保护间隔和循环前缀对多径传输影响的消除示意

## 8.2.4 加窗函数对 OFDM 信号的意义

在图 8.3 所示的 OFDM 系统发送链路中，在增加循环前缀环节同时还有加窗处理。对于加窗处理的原因可以这样来理解。如图 8.5 所示，由于符号调制的因素，OFDM 信号的子载波有可能发生相位跳变，这种相位跳变使得信号功率发生泄露或带外谱下降非常缓慢，从而引起实际意义的频谱扩展。图 8.6 给出了具有 16 个子载波时 OFDM 信号的“最差衰减”功率谱密度曲线图（图中实线）。从中可以看出，衰减约为 10dB 的信号带宽大约是 3 dB 带宽的 2 倍。在图 8.6 中同时也给出了 16 个子载波时 OFDM 信号的加汉明窗处理后的功率谱密度曲线图（图中虚线）。从中可以看出，经加窗处理后的功率谱密度曲线是“非常平滑”的；衰减为 10 dB 的信号带宽相对于 3 dB 带宽略有扩展，而衰减超过 20dB 的信号带宽大约是 3dB 带宽的 2 倍。从滤波器设计角度理解加窗处理方法的实质是增加一级滤波处理，其目的是滤除带外“噪声”或“干扰”。所以经加窗处理起始于  $t_s = kT_s$  时刻的 OFDM 信号的等效低通模型为

$$s_k(t) = \text{Re} \left[ w(t - kT_s) \sum_{i=N_s/2, i \neq 0}^{N_s/2-1} X_{i+N_s(k+1/2)} \text{rect} \left[ \frac{t - kT_s}{(1+\beta)T_s} \right] \exp \left[ j2\pi \left( f_c - \frac{i+0.5}{T} \right) \frac{t - kT_s - \tau_g}{T} \right] \right]$$

经典的窗函数为升余弦函数

$$w(t) = \begin{cases} 0.5\{1 - \cos[\pi t / (\beta T_s)]\} & 0 \leq t \leq \beta T_s \\ 1 & \beta T_s \leq t \leq T_s \\ 0.5\{1 + \cos[\pi(t - T_s) / (\beta T_s)]\} & T_s \leq t \leq (1 + \beta)T_s \end{cases}$$

式中， $\beta$  为所谓的滚降因子。

通过这样的论述和分析，我们就对 OFDM 信号的生成逻辑关系图 8.3 的各个模块和 OFDM 信号的表达形式有一个比较全面的认识。在工程实践中，OFDM 信号的生成法则遵从下面的步骤：首先对调制符号星座图（如 QAM）数据流补零再计算 IFFT；然后将 IFFT 输出的最末尾  $T_{\text{prefix}}$  个采样补在 OFDM 符号的前端构成所谓的“循环前缀”；而将前端  $T_{\text{postfix}}$

个采样放置在 OFDM 符号的后端；最后，对这个 OFDM 符号乘以滚降因子为  $\beta$  的升余弦窗函数（抑制掉子载波的带外功率）作为 OFDM 信号的输出符号。此符号相对于前一符号有  $\beta T_s$  的重叠区域。图 8.7 所示为 OFDM 信号的结构图。其中， $T_s$  为符号周期， $T_{\text{FFT}}$  为 FFT 区间， $T_{\text{prefix}}$  为循环前缀周期， $T_{\text{postfix}}$  为循环后缀周期， $\beta T_s$  为升余弦滚降周期。

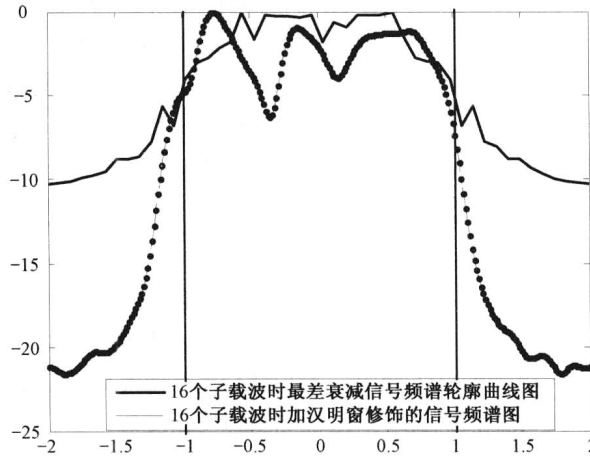


图 8.6 16 个子载波的 OFDM 信号频谱与加窗处理后 OFDM 信号频谱的比较

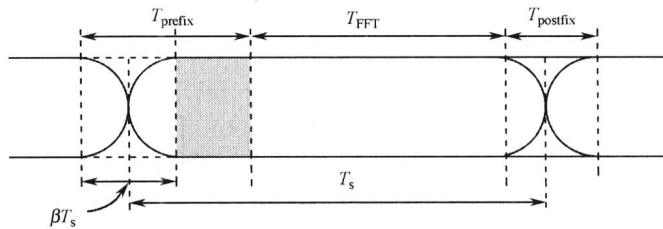


图 8.7 OFDM 信号的循环扩展及加窗

图 8.7 所示 OFDM 信号的结构对于克服多径传输的影响是很有意义的。如果多径延迟不超过图 8.7 所示的阴影区域，即所谓的保护区间，OFDM 信号都不存在符号间干扰 (ISI) 和载波间干扰 (ICI)。

### 8.3 正交频复用 (OFDM) 信号的接收与解码

前面已经讨论了 OFDM 信号如何利用 IFFT 算法来构造的问题，以及如何增加循环前缀构成保护间隔以消除子载波间的干扰和通过加窗处理使得信号的频谱在带外具有陡峭的下降特性以消除符号间干扰的方法。综合来看，OFDM 系统发送端模型结构基本成型，所涉及的问题也基本上得以解决。而 OFDM 系统接收端模型还是一个开放的问题，即使从目前看也有许多问题有待研究改进。在此讨论的 OFDM 信号的接收问题只是对应于发送端模块反向链路的一个基本解决方案或思路的展现。

### 8.3.1 OFDM 信号接收端结构分析

图 8.8 所示是接收端原理模块图。去掉图 8.8 虚线框部分，图 8.8 的各个模块与图 8.3 的各个模块是反向完全相对应的。从信道接收的高频信号经下变频，再经模数转换，“去掉”保护间隔，实施串并变换，如式 (8.3) 所示，通过 FFT 模块就完全恢复出原始的星座图调制符号数据。若不考虑加性噪声的影响，经 FFT 模块输出的数据应该还有信道衰减因子的影响，要完成解码，必须已知信道衰减因子。另外，要切实地去掉保护间隔，必须已知一帧开始与结束的时刻，这就是所谓的帧同步问题。要恰当地实施 FFT 运算，也有子载波同步的问题。诸如此类的环节可以依赖图 8.8 虚线框部分的优化估计算法模块来实现。最后需要注意的是，实现 FFT 运算与实现 IFFT 运算可以共用一个模块，因为对 FFT 运算模块的输入和输出信号取共轭，就得到相应数据的 IFFT 运算。因此，在一些参考文献中将图 8.8 和图 8.3 通过共用 FFT 模块作为并行的上、下支路<sup>[1]</sup>。这一点在实际工程如调制解调器设计中得以具体应用。图 8.9 给出了 OFDM 信号调制解调器原理图，它等价于一个 IFFT 运算模块与一个 FFT 运算模块经无线链路连接构成。

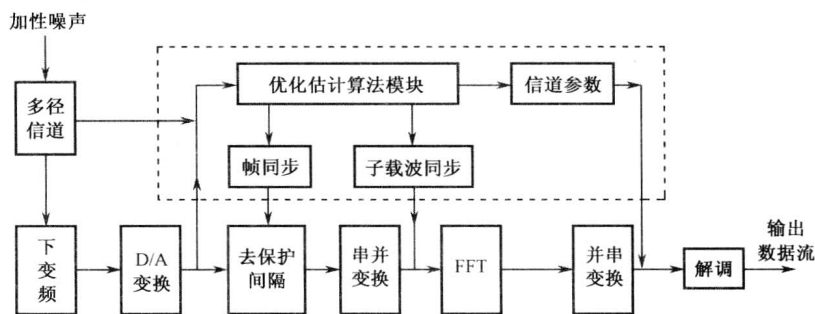


图 8.8 OFDM 系统接收端处理模块

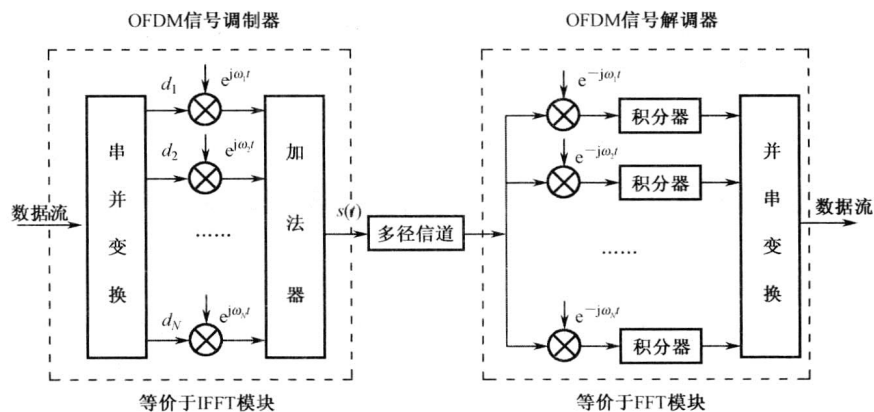


图 8.9 OFDM 信号调制解调器原理图

### 8.3.2 OFDM 信号在接收端的数学表示分析

上面对 OFDM 系统接收端的各个模块功能进行了大致的分析讨论,这种大模块的分析讨论有助于我们抓住主要矛盾,理清解决问题的主要思路。然而要深入理解问题,从实质上把握问题,必须上升到理论层次的分析研究。下面主要从数学角度讨论、分析 OFDM 信号的接收解调。假设数据流为星座图符号  $X_0, X_1, \dots, X_{N_c-1}$ , 经 OFDM 子载波调制后得

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-1} X_i \text{rect}[(t - T_{\text{win}} + T_{\text{guard}}) / T_s] \exp(j2\pi f_i t)$$

式中,  $T_s = T_{\text{FFT}} + T_{\text{guard}}$ ;  $N$  是子载波数。通过加窗和时移变换,得到在某一时段发送的 OFDM 信号为

$$s_k(t - kT) = w(t - kT) \sum_{i=0}^{N-1} X_{i,k} \text{rect}[(t - kT - T_{\text{win}} + T_{\text{guard}}) / T_s] \exp\{j2\pi(f_c + i / T_{\text{FFT}})(t - kT)\}$$

此处及下面若无特别说明一般均假设  $X_0 = 0$ , 即信号无直流分量。这样等价低通型信号为

$$s_{\text{LP},k}(t - kT) = w(t - kT) \sum_{i=0}^{N-1} X_{i,k} \text{rect}[(t - kT - T_{\text{win}} + T_{\text{guard}}) / T_s] \exp\{j2\pi i(t - kT) / T_{\text{FFT}}\}$$

设 OFDM 信号经时变多路径衰落信道传输,信道的等价低通脉冲响应函数为  $h(\tau, t)$ , 加性高斯白噪声分量为  $n(t)$ 。所以接收信号可以表示为

$$r_{\text{LP}}(t) = h(\tau, t) \otimes s_{\text{LP}}(t) + n(t) = \int_0^{\tau_{\text{max}}} h(\tau, t) s_{\text{LP}}(t - \tau) d\tau + n(t)$$

$h(\tau, t)$  在卷积极分区域外等于零,即  $h(\tau, t)$  的支撑集为  $\tau \in [0, \tau_{\text{max}}]$ , 且在一个帧周期内为静态的,即在 FFT 积分区域内  $h(\tau, t) = h(\tau)$ 。再设窗函数在 FFT 积分区域内等于 1, 即  $w(t - kT) = 1$ 。调制符号星座图内的点  $X_i$  可以通过接收信号  $r_{\text{LP}}(t)$  提取,即对应判决统计量为

$$\begin{aligned} y_{l,k} &= \frac{1}{T_{\text{FFT}}} \int_{kT}^{kT+T_{\text{FFT}}} r_{\text{LP}}(t) \exp[-j2\pi l(t - kT) / T_{\text{FFT}}] dt \\ &= \frac{1}{T_{\text{FFT}}} \int_{kT}^{kT+T_{\text{FFT}}} \left\{ \int_0^{\tau_{\text{max}}} h(\tau, t) s_{\text{LP}}(t - \tau) d\tau + n(t) \right\} \exp[-j2\pi l(t - kT) / T_{\text{FFT}}] dt \\ &= \frac{1}{T_{\text{FFT}}} \int_0^{\tau_{\text{max}}} h(\tau, t) \exp(-j2\pi i\tau / T_{\text{FFT}}) d\tau \cdot X_{l,k} \delta(i - l) + \int_{kT}^{kT+T_{\text{FFT}}} n(t) \exp[-j2\pi l(t - kT) / T_{\text{FFT}}] dt \\ &= \frac{1}{T_{\text{FFT}}} H\left(\frac{i}{T_{\text{FFT}}}\right) X_{l,k} \delta(i - l) + n' \end{aligned} \quad (8.4)$$

式中,  $\delta(i - l)$  是所谓的 delta 函数。 $H(l / T_{\text{FFT}}) / T_{\text{FFT}}$  是信道的频谱响应在第  $l$  个子载波频点的采样。如果信道参数是已知的,那么由上式可以很容易地通过判决统计量  $y_{l,k}$  估计出调制符号星座图的点  $X_{l,k}$ 。信道参数虽然是未知的,但可以通过诸如第 6 章讨论过的方法予以估计得到。虽然这种或那种估计算法总是存在误差,但这些误差都可以将其归于加性高

斯白噪声干扰  $n'$ 。但若考虑 OFDM 信号的时间同步误差和子载波频偏，则相应的问题就变得比较复杂，这时等价的低通接收信号为

$$\hat{r}_{LP}(t) = r_{LP}(t) \exp[j(2\pi\delta_f t + \theta_0)] \quad (8.5)$$

式中， $\delta_f$  为频偏； $\theta_0$  为时间同步误差引起的相位偏差。更进一步，再考虑符号采样时刻的偏差，则理想的解调周期  $t \in [kT, kT + T_{FFT}]$  蜕变为  $t \in [kT + \delta_t, kT + T_{FFT} + \delta_t]$ ，即判决统计量

$$y_{l,k} = \frac{1}{T_{FFT}} \int_{kT+\delta_t}^{kT+T_{FFT}+\delta_t} \hat{r}_{LP}(t) \exp[-j2\pi l(t - kT - \delta_t)/T_{FFT}] dt \quad (8.6)$$

将式 (8.5) 代入式 (8.6) 并结合式 (8.4) 得到

$$y_{l,k} = \frac{1}{T_{FFT}} \int_{kT+\delta_t}^{kT+T_{FFT}+\delta_t} \left[ \int_0^{\tau_{\max}} h(\tau) \left( \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} x_{i,k} e^{j2\pi \frac{i}{T_{FFT}}(t-kT-\tau)} \right) d\tau \right] e^{j(2\pi\delta_f t + \theta_0)} e^{-j2\pi \frac{l}{T_{FFT}}(t-kT-\delta_t)} dt + \frac{1}{T_{FFT}} \int_{kT+\delta_t}^{kT+T_{FFT}+\delta_t} n(t) e^{-j2\pi \frac{l}{T_{FFT}}(t-kT-\delta_t)} dt \quad (8.7)$$

在式 (8.7) 中做变量代换，令  $\zeta = t - kT - \delta_t$ ，通过交换积分次序并将其第二项简记为  $n_{l,k}$ ，得

$$y_{l,k} = e^{j\theta} \sum_{i=-N_{FFT}/2}^{N_{FFT}/2-1} X_{i,k} \frac{1}{T_{FFT}} \int_0^{\tau_{\max}} h(\tau) e^{-j2\pi \frac{i}{T_{FFT}}\tau} d\tau \left[ e^{j2\pi \frac{\zeta}{T_{FFT}}} e^{j2\pi \frac{i}{T_{FFT}}\delta_t} e^{-j2\pi \frac{\zeta}{T_{FFT}}} e^{j2\pi\delta_f\zeta} d\zeta + n_{l,k} \right] \quad (8.8)$$

式中， $\theta = \theta_0 + 2\pi\delta_f(kT + \delta_t)$ 。若记变量  $i/T_{FFT} = i \cdot \Delta f$ （其中  $\Delta f = 1/T_{FFT}$  为子载波间隔），则括号内积分为信道的频谱响应在第  $i$  个子载波频点的采样，记为  $h_{i,k} = H_k(i/T_{FFT}) = H_k(i \cdot \Delta f)$ ，式 (8.8) 可以简化为

$$y_{l,k} = e^{j\theta} \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} X_{i,k} h_{i,k} e^{j2\pi \frac{i}{T_{FFT}}\delta_t} \frac{1}{T_{FFT}} \int_0^{\tau_{\max}} e^{j2\pi\delta_f\zeta} e^{j2\pi \frac{\zeta}{T_{FFT}}} e^{-j2\pi \frac{\zeta}{T_{FFT}}} d\zeta + n_{l,k}$$

再进一步假设  $i = l$ ，则得关于调制符号星座图内的点  $X_{l,k}$  的判决统计量为

$$y_{l,k} = X_{l,k} h_{l,k} e^{j\theta} e^{j2\pi l \delta_t \Delta f} e^{j2\pi \delta_f T_{FFT}} \text{sinc}(\delta_f \cdot T_{FFT}) + n_{l,k}$$

再进一步化简为

$$y_{l,k} = X_{l,k} \text{sinc}(\delta_f \cdot T_{FFT}) e^{j\varphi_{l,k}} h_{l,k} + n_{l,k} \quad (8.9)$$

其中相位因子  $\varphi_{l,k} = \theta_0 + 2\pi\delta_f(kT_s + \delta_t + T_{FFT}/2) + 2\pi l \delta_t \Delta f$ 。

分析式 (8.9)，我们观察到有这样几个影响判决调制符号星座图内的点  $X_{l,k}$  的因素：一个是幅度衰减因子  $\text{sinc}(\delta_f \cdot T_{FFT})$ ；另一个是相位旋转因子  $\varphi_{l,k}$ 。幅度衰减因子与频偏  $\delta_f$  有关，而相位旋转因子不仅与频偏  $\delta_f$  有关，特别是与符号时隙误差  $\delta_t$  的关联关系与子载波序号  $l$  成正比关系。再来比较式 (8.4) 和式 (8.9)，我们发现通过式 (8.9) 判决统计量  $y_{l,k}$  估计出调制符号星座图的点  $X_{l,k}$  将要变得相对困难一些。因此 OFDM 信号的时间同步、子载波同步对 OFDM 信号的估计是非常关键的。其要点总结如下：

(1) 仔细分析式 (8.9)，我们看到主要有三个方面的偏差因子：一是载波频偏  $\delta_f$ ；二是符号时隙误差  $\delta_t$ ；三是载波相位偏差  $\theta_0$ 。由式 (8.9)，它们的作用是使得调制符号



星座图产生相位畸变  $\varphi_{l,k}$  与幅度畸变  $\text{sinc}(\delta_f \cdot T_{\text{FFT}})$ 。

(2) 载波频偏  $\delta_f$  的影响有两个方面：一个是对调制符号星座图的幅度畸变  $\text{sinc}(\delta_f \cdot T_{\text{FFT}})$ ，其最终直接影响接收信号的信噪比；另一个是引起相邻子载波间的相互干扰 (ICI)。

(3) 注意相位因子  $\varphi_{l,k}$  的前两项。载波频偏  $\delta_f$  和载波相位偏差  $\theta_0$  导致 FFT 输出符号的一个公共相位旋转变换。若这两个偏差因子是可以获得的，则可通过反向旋转予以补偿。特别注意这个公共相位旋转对于相邻 OFDM 符号的作用，即相位旋转因子  $\varphi_{l,k}$  中的  $(2k\pi)\delta_f T_s$  项。

(4) 虽然符号时隙 (OFDM 信号帧起始时刻) 误差  $\delta_t$  只引起 FFT 输出符号的一个公共相位旋转变换，但这个相位旋转是步进式的，即与载波频率成线性关系。它在中心频率处为零，而到频带边界处取得最大值，即旋转因子  $2\pi l \delta_t \Delta f$  与  $l$  的关系。

(5) 通常情况下  $\delta_t$  非常小 ( $\delta_t < T_{\text{guard}}$  保护时间间隔)，因而对应信道脉冲响应仍然在保护间隔内，从而不会产生符号间干扰 (ISI)。

从上面分析可以看出载波频偏  $\delta_f$  的影响是最为广泛的，而符号时隙误差  $\delta_t$  在实际工程中是很难“精确”估计的。因而同步问题一直是 OFDM 系统接收端的一个关键技术，当然也是一个研究的热点问题，目前仍然是一个开放的课题。通过上面的讨论，可以总结出同步的基本问题有三个方面：一是符号同步；一是载波同步；最后一个是采样频率同步。而就目前来说实现同步的基本算法除对 OFDM 信号的循环前缀的充分利用外，其他方法均与在第 6 章讨论过的信道估计算法类似，所以这里就不再深入讨论，希望深入研究的读者可以参考文献[2]。OFDM 系统的另外一个关键问题是所谓的“峰均值比”，它是并列于同步问题的 OFDM 系统关键技术。8.4 节将简单地叙述和分析这一问题。

下面先通过一个具体的例子<sup>[3]</sup>来进一步说明 OFDM 系统各个环节对信号处理的方式方法，帮助我们理解图 8.3 所示的 OFDM 系统发送端模块功能和图 8.8 所示的 OFDM 系统接收端模块功能，以及对上面理论分析环节的理解和掌握。

**例 8.1** 下面以一个数字视频广播系统为例，来说明 OFDM 系统各个环节对信号的变换处理以及所能够产生的对传输链路的抗干扰特性、增益特性等。

图 8.10 所示是欧洲的数字视频广播 (Digital-Video-Broadcasting, DVB) 系统标准模块图，表 8.1 所示是所给系统的技术参数。图 8.11 至图 8.14 所示是图 8.10 中各个节点的输出信号时域和频域图形。为了便于对比，将发送链路与接收链路相对点的信号波形并列放置。

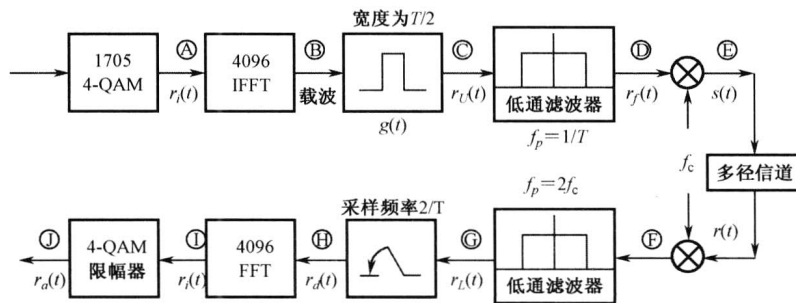


图 8.10 一个 OFDM 系统收发传输链路模拟

表 8.1 传输带宽为 8 MHz 的 2k 模式 OFDM 系统参数

参 数	2k 模式			
基带信号周期 $T/\mu\text{s}$	7/64			
载波数 $K$	1705			
载波间隔 $1/T_u/\text{Hz}$	4464			
载波 $K_{\min}$ 与 $K_{\max}(K-1)/T_u$ 之间隔/MHz	7.61			
允许保护区间长度 $\Delta/T_u$	1/4	1/8	1/16	1/32
OFDM 符号区间长度 $T_u/\mu\text{s}$	224(2048 $\times$ 7/64)			
保护区间长度 $\Delta/\mu\text{s}$	56	28	14	7
符号区间长度 $T_u = \Delta + T_u/\mu\text{s}$	280	252	238	231

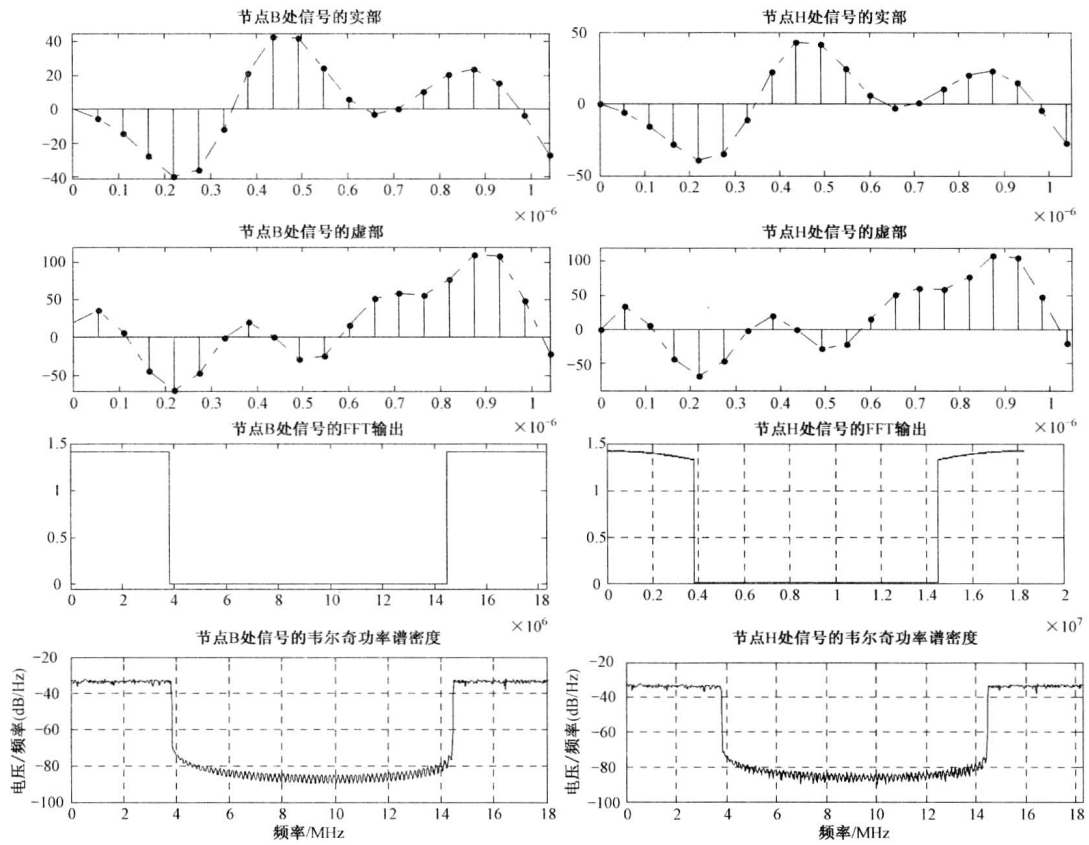


图 8.11 发送端 B 节点与接收端 H 节点的信号波形对比

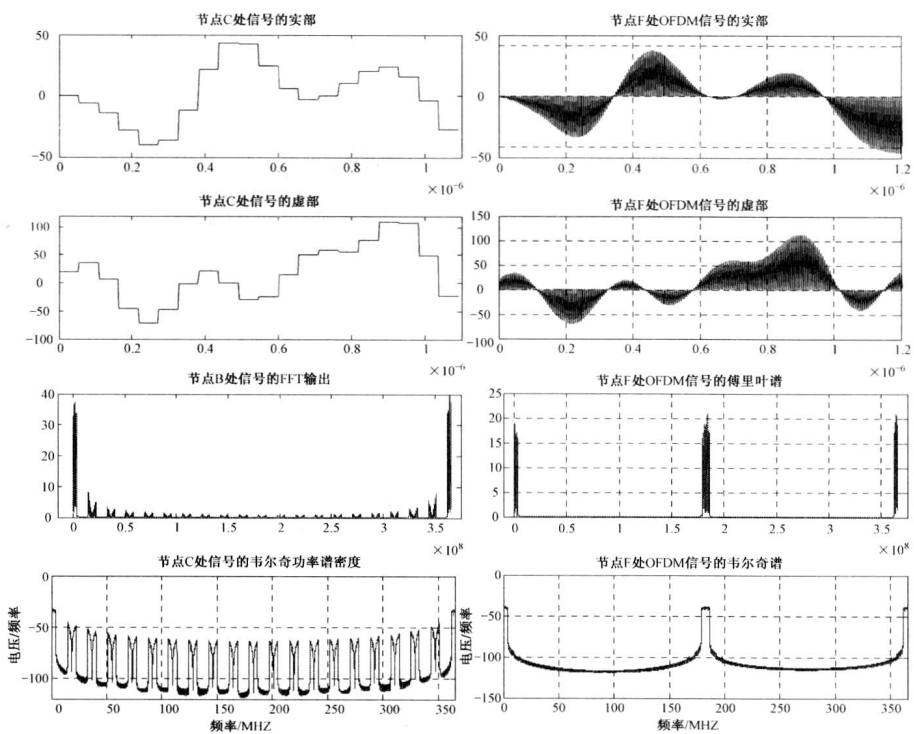


图 8.12 发送端 C 节点与接收端 F 节点的信号波形对比

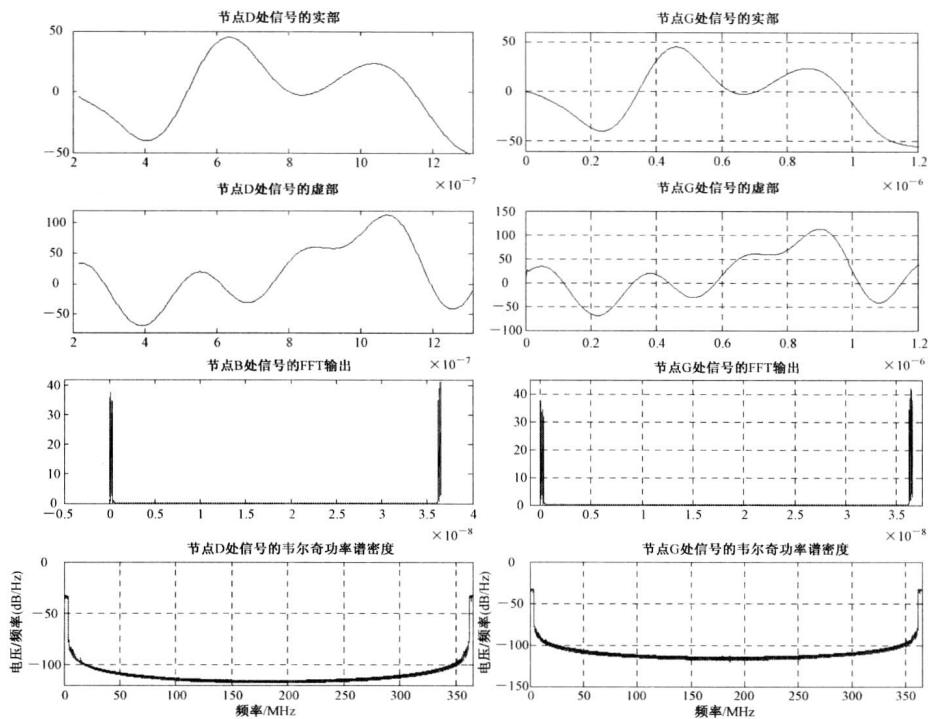


图 8.13 发送端 D 节点与接收端 G 节点的信号波形对比

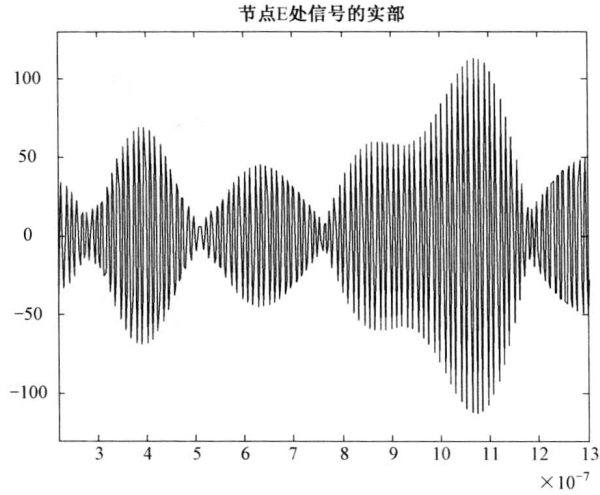


图 8.14 发送端 E 节点的信号波形曲线

对照表 8.1 和图 8.10 的上支路, 对于这个特定的 OFDM 系统, DVB-T (Transmission) 信号可以表示为

$$s(t) = \text{Re} \left\{ e^{j2\pi f_c t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{67} \sum_{k=K_{\min}}^{K_{\max}} X_{m,l,k} \psi_{m,l,k}(t) \right\} \quad (8.10)$$

式中,  $K_{\min} = 0$ ,  $K_{\max} = 1704$ , 且

$$\psi_{m,l,k}(t) = \begin{cases} e^{j2\pi k'[t - \Delta - (l+68m)T_s]} & (l+68m)T_s \leq t \leq (l+68m+1)T_s \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (8.11)$$

其中,  $k$  为载波数;  $l$  为 OFDM 符号数;  $m$  为传输的帧数;  $K$  为传输的载波数;  $T_s$  为符号周期;  $T_u$  为载波间隔的倒数;  $\Delta$  为保护区间长度;  $f_c$  为射频信号的载波频率; 记  $k' = k - (K_{\max} + K_{\min})/2$ ,  $k'$  是相对于中心频率的载波指标。

显然  $s(t)$  表达式中中括号内“部分”为关于调制符号星座图内的点  $\{X_{0,0,k}\}$  的逆离散傅里叶变换。根据表 8.1 和图 8.10, 这是一个插零 (padding zero) 数为 2391 的 (逆) 离散傅里叶变换, 从而获得时域过采样 (oversampling)  $s[i]$ 。经逆离散傅里叶变换 (IFFT) 模块输出的信号波形如图 8.11 所示, 它为节点 B 处的信号波形和频谱特性与节点 H 处的信号波形和频谱特性的对比。

为能更好地理解式 (8.10), 将其中各个数据所对应的帧、子载波、数据号做分解, 以便理解其在 OFDM 系统数据传输过程中所处位置, 进而能更好地理解 OFDM 系统的传输原理。也为本章的最后部分讨论有关多输入多输出系统与空时编码及 OFDM 传输中在接收端频域内将信道参数与传输数据的结合问题奠定基础。例如:

$X_{m,0,k}$  为第  $m$  帧中第  $k$  个载波的第 1 个数据符号;

$X_{m,1,k}$  为第  $m$  帧中第  $k$  个载波的第 2 个数据符号;

...

$X_{m,67,k}$  为第  $m$  帧中第  $k$  个载波的第 68 个数据符号。

如果仅考虑式 (8.6) 中对应于传输周期  $[0, T_s]$  内的符号, 则式 (8.10) 可以简化为

$$s(t) = \text{Re} \left\{ e^{j2\pi f_c t} \left[ \sum_{k=K_{\min}}^{K_{\max}} X_{0,0,k} e^{j2\pi k'(t-\Delta)/T_u} \right] \right\} \quad (8.12)$$

式中,  $k' = k - (K_{\max} + K_{\min})/2$ 。节点 B 处的信号经脉冲响应为  $g(t)$  宽度为  $T/2$  的带通滤波器到达节点 C。节点 C 的信号波形应为一个多电平的数字信号, 其频谱应具有周期频谱特性。

为形成连续信号波形, 使其经过一个宽度为  $T/2$  带通滤波器 (带通插值平滑), 其输出波形如图 8.12 所示。图 8.12 所示为节点 C 处的信号波形和频谱特性与节点 F 处的信号波形和频谱特性的对比。

节点 C 处的信号带宽为  $2/T - 7.61 = 18.2857 - 7.61 = 10.6757 \text{ MHz}$ , 即要求滤波器传输带宽为  $10.675 \text{ MHz}$  (注: 若用  $N = 2048$  点 IFFT, 则相应传输带宽为  $1/T = 9.143 - 7.61 = 1.533 \text{ MHz}$ , 这需要滤波器具有非常陡峭的滚降特性)。

为对其进一步平滑, 使其经过一个截止频率为  $1/T$  低通滤波器 (低通平滑)。此处用一个阶数为 13 截止频率为  $1/T$  的 Butterworth 低通滤波器来实现, 其输出波形如图 8.13 所示, 即得到 D 节点的信号波形。图 8.13 所示为 D 节点的信号波形和频谱特性与节点 G 的信号波形和频谱特性的对比。

对比 C 节点与 D 节点的波形, 即说明低通平滑的效果。最后对 D 节点的信号经双边带幅度调制 (上变频) 通过发送天线阵元传送。其信号波形如图 8.13 所示, 其信号的数学表达如式 (8.6), 也可以表示为载波的同相支路与正交支路 (双边带幅度调制) 和的形式:

$$s(t) = m_I(t) \cos(2\pi f_c t) + m_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (8.13)$$

依据这一原理, 式 (8.12) 的信号  $s(t)$  的表达式可以改写为

$$s(t) = \sum_{k=K_{\min}}^{K_{\max}} \text{Re}(X_{0,0,k}) \cos \left[ 2\pi \left( \frac{(k - 0.5(K_{\max} + K_{\min}))}{T_u} + f_c \right) t - \frac{\Delta}{T_u} \right] - \sum_{k=K_{\min}}^{K_{\max}} \text{Im}(X_{0,0,k}) \sin \left[ 2\pi \left( \frac{(k - 0.5(K_{\max} + K_{\min}))}{T_u} + f_c \right) t - \frac{\Delta}{T_u} \right] \quad (8.14)$$

从式 (8.10) 至式 (8.14) 的数学推理的讨论, 从图 8.10 所示的节点 A 到节点 D 信号波形的产生机理的阐述, 就完成了对发送信号从构成原理到数学模型一个比较完整的描述和讨论。

下一个层次就是 OFDM 接收系统的讨论。一般来说, OFDM 接收系统是比较复杂的, 或者说截止目前还没有一个像 OFDM 发送端那样较为确定性的或结论性的模型描述, 或者说许多问题还处在不断发展、改进的过程中。其基本模型如图 8.8 所示。

因为 OFDM 信号对于时间同步与频率同步的要求非常高, 因此在这些问题上有非常多的研究成果。此处给出的只是一个非常简单的模块链路, 其结构主要是与发送端相对应来说明其原理, 如图 8.10 所示的下支路模块。

因为在讨论图 8.10 所示的上支路模块时已经涉及其下支路模块,同时在图 8.11 至图 8.13 中也给出了相应上支路模块节点处的信号波形和频谱特性,因而图 8.10 所示的下支路模块功能和各节点信号波形的讨论就尤为简单。

信号经无线多路径传输到达接收端点,经下变频输出到 F 节点,其波形如图 8.12 所示。对比 F 节点与 C 节点的信号波形,从时域看,波形轮廓是“高度相似”的,但 F 节点的信号波形明显包含多径因素,也有一定的时间延迟,其频谱同样也具有周期特点。

为了与 F 节点的信号相比对,在图 8.14 中给出了发送端 E 节点处的信号波形,两个节点信号的窄带特性是完全一致的。

将 F 节点的信号经过一个截止频率为  $2f_c$  的低通滤波器,得到节点 G 的信号,其波形如图 8.13 所示。将节点 G 的信号波形与节点 D 的信号波形相对比,我们看到除时域延迟外,两个波形是完全相同的,它们的频谱特性也是完全相同的。

将节点 G 的信号经过一个采样频率为  $2/T$  的模数变换器,采样起始时刻考虑传输延迟即时域同步,采样起始时刻为  $t_0 = t_d$ 。得到节点 H 处的信号波形如图 8.11 所示。与节点 C 处的信号波形相对比,从频域看,两者有微小差异。这可能是由于同步误差引起的。

对节点 H 处的信号经 FFT 变换,再经限幅器输出,得到输出信号为节点 J 处的波形,如图 8.15 所示。从中可以看出,与 4-QAM 调制符号星座图的点匹配地非常好。

在图 8.10 中我们看到关键的处理环节是其中的 IFFT 和 FFT 模块,其他都是一些辅助环节。在模拟过程中也适当考虑到多径传输及符号同步和频偏等误差因素的影响,最后在输出端解调的接收数据与原始调制符号星座图有非常好的匹配。

从这样一个具体例子能比较完整地认识一个 OFDM 信号从生成、发送到接收各个环节的变化历程和影响因素。由于每一个步骤都有“闭形式”的表示,又有直观的图形对应,以便建立从感性到理性的认知。

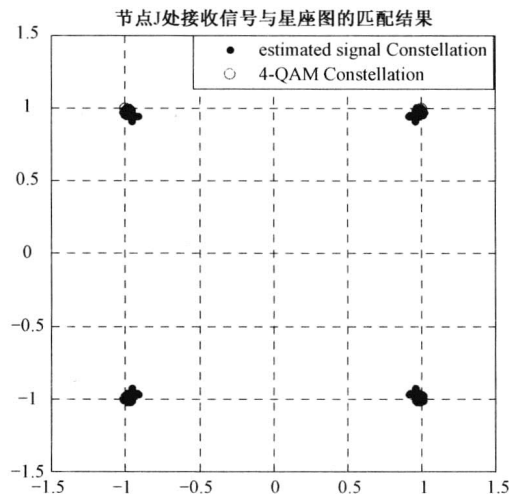


图 8.15 接收端 J 节点处输出数据与调制符号星座图的对比

## 8.4 OFDM 信号功率峰均值比 (PAPR) 问题

从上面的讨论可以看到, OFDM 系统对于高数据率传输链路有许多优势,但是它也有两个影响其性能的主要缺陷,这就是所谓的大峰均值比 (Peak to Average Power Ratio, PAPR) 问题和同步问题。大峰均值比问题的产生是由于 OFDM 子载波的相干相加引起的。如式 (8.1) 所示,当  $N$  个同相信号相加,就产生一个  $N$  倍于平均功率的峰值功率。这个峰值功率可能引起功率放大器处于饱和状态,导致信号畸变,从而产生子载波间的互调干扰和带外辐射,破坏子载波之间的正交性。解决大峰均值比问题的方法主要有三类:第一类是所谓的信号非线性“形变 (Distort)”方法<sup>[4-10]</sup>,它是通过非线性形变手段降低信号峰值幅度值,如剪切限幅法<sup>[4]</sup> (Clipping)、峰值窗函数法<sup>[5]</sup> (peak window)、峰值消除法<sup>[6-8]</sup> (Cancellation)、压扩变换法<sup>[9-10]</sup> (Companing) 等;第二类是所谓的编码类方法<sup>[8,11-20]</sup> (Coding),它利用特殊的前向纠错码集排除掉具有大峰均值比的 OFDM 符号或用具有较低峰均值比的特殊码序列构造 OFDM 信号<sup>[14-18]</sup>;第三类是基于加扰 (Scrambling) 和“选择”具有低峰均值比的 OFDM 符号的方法,如选择性映射法<sup>[19]</sup> (Selection Mapping) 和部分传输序列 (Partial Transmit Sequence) 法<sup>[20-22]</sup>。加扰的方法虽然不能完全去掉具有大峰均值比的 OFDM 符号,但可以降低具有大峰均值比的 OFDM 符号出现的概率,从而改善 OFDM 信号的特性。不论哪一类方法,通常降低大峰均值比都需付出系统性能蜕化的代价。

假设对于一个调制符号序列  $\mathbf{a}$  对应于式 (8.1) 的 OFDM 信号为  $s_a(t)$ , 定义对应包络幅度信号为  $P_a(t) = |s_a(t)|$ , 则相应包络峰值功率 (Peak Envelope Power) 定义为

$$\max P_a(t)$$

序列  $\mathbf{a}$  的包络平均功率等于其长度  $N$ 。所以,序列  $\mathbf{a}$  包络功率的峰均值比为  $\max P_a(t) / N$ ; 序列  $\mathbf{a}$  的包络功率的峰均值比也被称为峰值因子 (Peak Factor)<sup>[23]</sup>; 而序列  $\mathbf{a}$  包络功率的峰均值比的均方根被称为波峰因子 (Crest Factor)<sup>[24]</sup>。

### 8.4.1 OFDM 信号峰均值功率比的分布

为理解 OFDM 信号的峰均值比问题,考虑一个由  $N$  个子载波且具有复包络的 OFDM 信号,其表达式如式 (8.1) 所示。设  $|s(t)|^2$  为信号  $s(t)$  的瞬时功率,而  $E\{|s(t)|^2\}$  为信号  $s(t)$  的平均功率,则对应功率峰均值比 (PAPR) 定义为

$$\text{PAPR} = \frac{\max_{t \in [0, T]} |s(t)|^2}{E\{|s(t)|^2\}} \quad (8.15)$$

由中心极限定理,对于比较大的  $N$ , 信号  $s(t)$  的实部和虚部均服从零均值、方差  $\sigma^2 / 2$  的高斯分布,因而 OFDM 信号的模值  $|s(t)|$  为服从零均值、单位方差的瑞利分布。假设信号的采样是互不相关的,则每个 OFDM 信号的峰均值的累量分布补函数为

$$\Pr(\text{PAPR} > \gamma) = 1 - (1 - e^{-\gamma})^N \quad (8.16)$$

显然峰均值比与子载波数  $N$  是有直接关系的,  $N$  越大峰均值比超过阈值的概率越大。

图 8.16 所示是式 (8.16) 随子载波数  $N$  的变化曲线, 即峰均值的累量分布函数的理论曲线。显然对于同一峰均值比门限, 子载波数  $N$  大时峰均值比超越的可能性就越大。已有大量文献做了图 8.16 中模拟曲线与理论曲线的拟合对比, 在此就不再重复。下面就这三类解决大峰均值比的方法做简要论述。

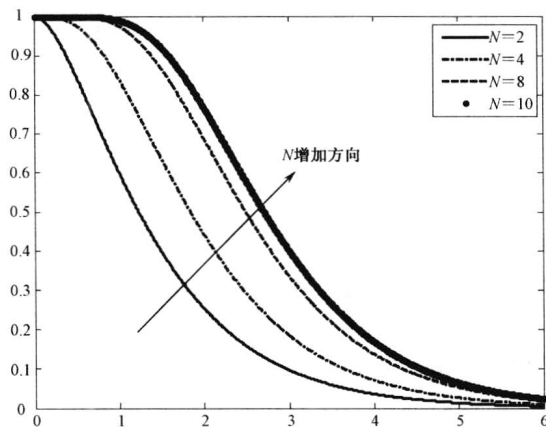


图 8.16 OFDM 信号的峰均值的补累量分布函数曲线

## 8.4.2 非线性形变类限幅法

剪切限幅法、峰值窗函数法、峰值消除法、压扩变换法等都属于非线性形变类限幅法。一般来说, 它们都对 OFDM 信号进行了非线性形变。除了可能引起传输信号的频谱特性发生畸变外, 在接收端要恢复原始信号要做相反变换, 这就需要提前的协议约定或额外传输必要的边际信息来实现。

### 1. 剪切限幅法<sup>[4]</sup>

设限幅滤波器的输入信号为  $x(t)$ , 其瞬时相位为  $\varphi(t) = \arg\{x(t)\}$ , 限幅幅度为常数  $A$ , 限幅滤波器的输出信号为  $\hat{x}(t)$ , 则有

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} Ae^{j\varphi(t)} & |x(t)| > A \\ x(t) & |x(t)| \leq A \end{cases}$$

限幅滤波器的特性也可以用如下非线性函数来描述

$$y = \begin{cases} Ae^{j\arg\{x\}} & \text{若 } |x| > A \\ x & \text{若 } |x| \leq A \end{cases}$$

其方法是采用了非线性过程, 直接在 OFDM 信号幅度峰值或附近采用非线性形操作来降低信号的 PAPR 值。该方法的缺陷或不足是非线性过程的缺点, 即会引起信号的畸变, 导致误码率有所上升。

为了降低或尽量克服限幅方法对系统传输性能的影响, 人们提出了其他一些改进的压扩映射方法, 如参考文献[9]罗列了四种压扩映射方法: 线性对称方法、线性非对称方法、



非线性对称方法、非线性非对称方法。然而纵观这些方法都好像影随着裁剪法或 $\mu$ -压扩律。下面比较详细地论述的方法为参考文献[10]所讨论的指数压扩律限幅方法。此方法的特点是其建立有一定的理论依据,且不需要传输额外的边际信息,在接收端可以通过反压扩(或扩缩运算)恢复原始信号。

由上面的论述,由中心极限定理,OFDM 信号  $s(t)$  是一个复高斯信号,所以  $s(t)$  的幅度函数  $|s(t)|$  应服从瑞利分布,即其累量分布函数可以表示为

$$F(x) = 1 - \exp(-x^2 / \sigma^2) \quad (x \geq 0)$$

另外, OFDM 信号  $s(t)$  的功率可以通过如下公式计算

$$|s(t)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_n X_k^* e^{j2\pi(n-k)t}$$

代入 OFDM 信号的峰均值比公式可得

$$\text{PAPR} = \frac{\max\{|s(t)|^2\}}{E\{|s(t)|^2\}}$$

此 PAPR 的累量分布服从式 (8.16)。为了改善其 PAPR 的概率分布特性,这里通过一个非线性函数  $h(x)$  对 OFDM 信号  $s(t)$  做压扩变换得  $y(t) = h(s(t))$ ,其目的是使信号  $y(t)$  具有较低的 PAPR,然后再转换成模拟信号送入功率放大器。

则理想的接收信号可以表示为

$$r(t) = h[s(t)] + n(t)$$

通过解压扩得

$$\tilde{r}(t) = s(t) + w(t)$$

式中,  $w(t) = h^{-1}[n(t)]$ 。假设信号  $s(t)$  的幅度的  $d$  次方具有区间  $[0, \alpha]$  上的均匀分布(这是一种非常好的 PAPR 的概率分布特性),参数  $d$  称为指数压扩的阶数。其对应的累量分布函数

$$F_d(x) = \frac{x}{\alpha} \quad (0 \leq x \leq \alpha)$$

所以信号  $s(t)$  幅度的累量分布函数为

$$F(x) = \Pr\{|s| \leq x\} = \Pr\{|s|^d \leq x^d\} = \frac{x^d}{\alpha} \quad (0 \leq x \leq \sqrt[d]{\alpha})$$

其对应逆函数为

$$F^{-1}(x) = \sqrt[d]{\alpha x} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

另外,我们要求压扩变换函数  $h(x)$  是一个严格单调递增的(从而避免其反变换的多值性),则

$$F(x) = \Pr\{|s| \leq x\} = \Pr\{h[|s|] \leq h(x)\} = F(h(x)) \quad (0 \leq x \leq h^{-1}(\sqrt[d]{\alpha}))$$

考虑到输入信号相位,压扩函数  $h(x)$  应具有形式为

$$h(x) = \text{sgn}(x) \sqrt[d]{\alpha \left[ 1 - \exp(-x^2 / \sigma^2) \right]} \quad (8.17)$$

式中,  $\alpha = (E\{|s(t)|^2\} / E\{\sqrt[d]{1 - \exp(-|s(t)|^2 / \sigma^2)}\})^{d/2}$ ;  $\sigma^2$  为信号的方差。

这个压扩变换函数  $h(x)$  的曲线图形随参数  $d$  的变化关系如图 8.17 所示。在图 8.17 中同时给出了  $\mu$ -压扩律曲线以作为对比。可以看出,其变换特性很类似于  $\mu$ -压扩律的变换特性,而当  $d \geq 2$  时压扩变换函数  $h(x)$  就有优于  $\mu$ -压扩律限幅特性。由式 (8.17),压扩变

换函数  $h(x)$  的局限性也是十分明显的, 为使压扩变换函数  $h(x)$  适用于任意的调制方式, 可以将  $h(x)$  表达式中的  $\text{sgn}(x)$  因子换成  $e^{j\arg(x)}$ 。图 8.18 中给出了经式 (8.17) 的压扩变换后 OFDM 信号  $s(t)$  的 PAPR 的概率分布特性随压扩指数  $d$  变化关系。相对于原始信号的 PAPR 的概率分布特性, 压扩变换后信号的 PAPR 的概率分布特性有非常明显的改善。

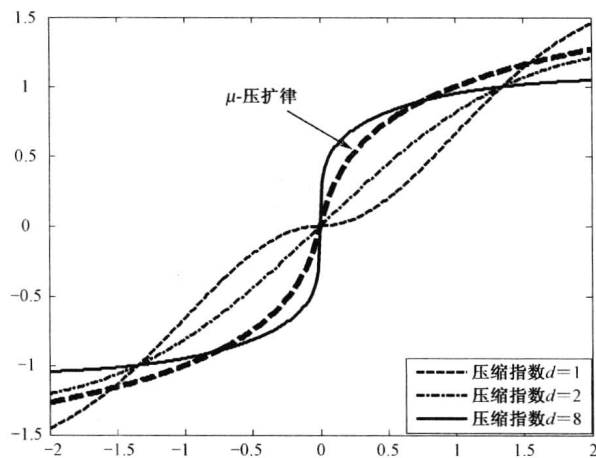


图 8.17 压缩变换函数随压缩指数变化的曲线

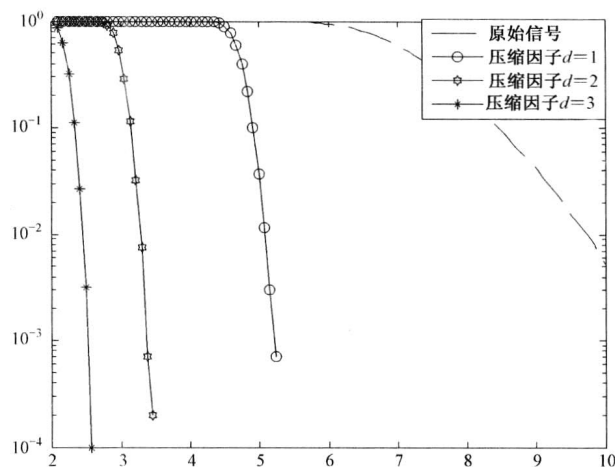


图 8.18 压缩变换后峰值均比的补累量分布函数

## 2. 峰值窗函数法

峰值窗函数法与峰值剪切法有密切的联系。实际上前面讨论过的剪切限幅技术和压扩变换限幅技术都可以解释或归属为峰值窗函数法。例如剪切限幅技术, 也可以将它解释为峰值窗函数法, 这个窗函数具有如下特性: 当  $|x| \leq A$  时窗函数值取 1; 当  $|x| > A$  时窗函数取值  $A/|x|$  ( $< 1$ )。对于压扩变换限幅技术可以类似地理解。这样对于更为广义的峰值窗函数法的建立就有一个较清晰的思路。

峰值窗函数法与剪切限幅法类似，只有当信号幅度值超过阈值时才用以修正信号，否则窗函数的幅度值应等于1。或许可以这样理解，只有当信号幅度值超过阈值时才有一个适当的窗函数与OFDM信号相互作用。窗函数与OFDM信号是时域乘积关系（因而在频域与原OFDM信号是卷积关系）。因此要求窗函数不仅要有好的频谱特性，也要在时域尽可能地窄，以避免更多信号样本值受到无谓的影响而增加比特差错率。

关于峰值窗法在此讨论两种：一种是“传统”意义的峰值窗方法；另一种是修正的峰值窗方法。将式(8.1)所给的OFDM信号表示为如下更加简洁的形式

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_k e^{j2\pi nk/N} \quad n=0,1,\dots,N-1$$

则限幅方法可以描述为，定义一个直接限幅信号  $c(n)=1-p(n)$ ，其中  $p(n)$  的定义为

$$p(n) = \begin{cases} 1 - A/|x(n)| & |x(n)| \geq A \\ 0 & |x(n)| < A \end{cases}$$

限幅器输出信号为  $\tilde{x}(n)=c(n)x(n)$ 。由于限幅器是一个非线性滤波器，因此不可避免地对传输信号产生非线性畸变，特别是信号的频带外泄露畸变。为克服这种不利影响，这里引入峰值窗“棱角磨光”函数

$$c_{pw}(n) = 1 - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a(n_i)w(n-n_i) \quad (8.18)$$

式中， $w(n)$  是一个长度为  $L$  的对称窗函数，系数序列  $\{a(n)\}$  可以通过适当的最优化准则处理使得经峰值棱角磨光滤波器  $c_{pw}(n)$  处理后的输出信号既满足对信号限幅的要求，还满足抑制带外泄露最小化等特性。这时限幅器的输出信号为  $\tilde{x}_{pw}(n)=c_{pw}(n)x(n)$ 。很自然地要求信号  $\tilde{x}_{pw}(n)$  的包络峰值不能超过阈值  $A$ ，即应有  $c_{pw}(n) \leq c(n)$  ( $\forall n$ )。实际上，熟知的任何具有较好频谱特性的窗函数如汉明、高斯、凯斯(Kaiser)窗都可以代替其中的  $w(n)$ 。

在下面的模拟实验中，采用一个长度为  $L$  的对称凯斯-贝塞尔(Kaiser-Bessel)窗函数，其时域表达式和对应的频域表达式为<sup>[25]</sup>

$$w_{\text{Kaiser}}(t) = \begin{cases} I_0(\beta\sqrt{1-(t/L)^2}) \cdot I_0^{-1}(\beta) & |t| \leq L \\ 0 & |t| > L \end{cases}$$

$$W_{\text{Kaiser}}(f) = \frac{\sin(\sqrt{(\pi L f)^2 - \beta^2})}{\sqrt{(\pi L f)^2 - \beta^2}} \quad (\forall f) \quad (8.19)$$

式中， $I_0(\cdot)$  是零阶修正的第一类贝塞尔(Bessel)函数； $\beta$  是一个调节参数。图 8.19、图 8.20 所示是 Kaiser-Bessel 窗函数  $w_{\text{Kaiser}}(n)$  与调节参数  $\beta$  的依赖关系曲线（注：依据参考文献[25]，区间(4,9)是  $\beta$  的典型取值范围）。从时域看， $\beta$  越大，窗函数  $w_{\text{Kaiser}}(n)$  越窄。

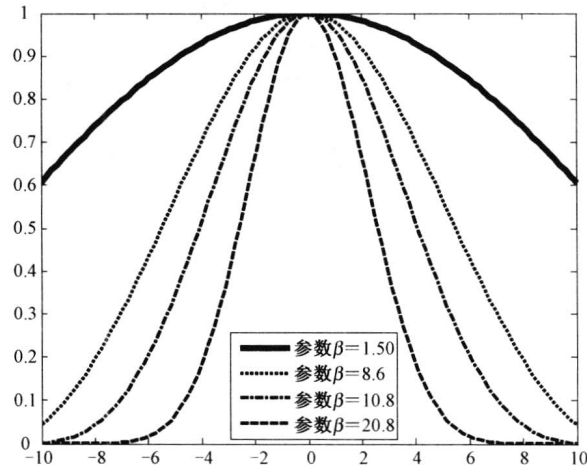


图 8.19 Kaiser 窗函数  $w(n)$  与参数  $\beta$  相关的变化曲线

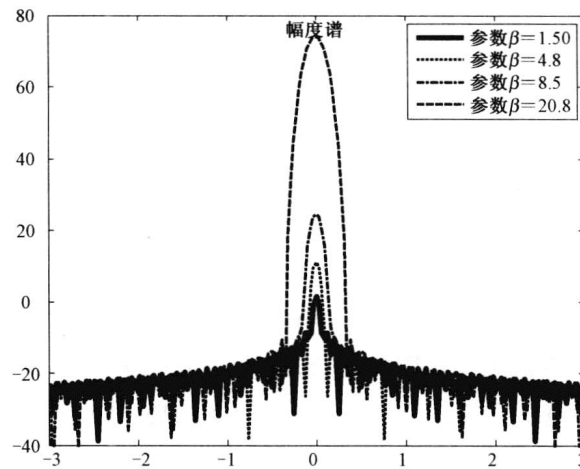


图 8.20 Kaiser 窗函数  $w(n)$  的频域特性随参数  $\beta$  的变化

对于系数序列  $\{a(n)\}$ ，采用的定义为

$$a(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p(n_m) \delta(n - n_m); \quad n_m = \arg \left\{ \max_{n_m^- \leq n \leq n_m^+} p(n) \right\} \quad (8.20)$$

式中， $n_{m-}$  和  $n_{m+}$  分别是第  $m$  个峰值脉冲的上升沿和下降沿指标参数，这也从一个方面说明第  $m$  个峰值脉冲的宽度为  $|n_{m+} - n_{m-}|$ ； $\delta(n)$  是单位脉冲信号。综合考查式 (8.18) 和式 (8.20)，可见峰值棱角磨光滤波器  $c_{pw}(n)$  实际上是所有峰值窗的一个“不重叠”相加。但是由于窗函数的拖尾和峰值可能“密集”出现，导致事实上的重叠相加。这种事实上的叠加可能使  $c_{pw}(n)$  实的值接近于零值，即产生“过度磨光”或“磨过”问题，从而增加信号带内畸变，特别是当几个峰值较“紧凑”地相继出现时，这种“磨过度”问题极易产生<sup>[26-27]</sup>，如图 8.21 所示。

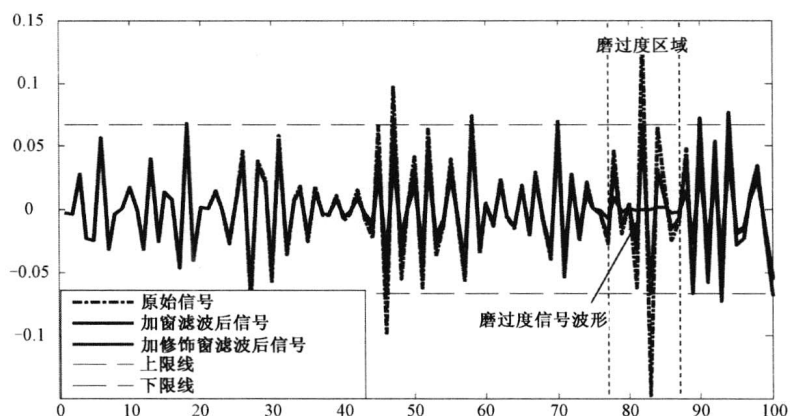


图 8.21 加窗磨光处理与修正窗处理的 OFDM 信号峰值幅度对比

为了防止磨过度问题的产生，可以通过上面产生的去峰值序列  $a(n)$  生成一个新的去峰值序列  $\tilde{a}(n)$ ，即令  $\mathbf{a} = [a(n_1), a(n_2), \dots, a(n_M)]$ ， $\tilde{\mathbf{a}} = [\tilde{a}(n_1), \tilde{a}(n_2), \dots, \tilde{a}(n_M)]$ ，则它们满足关系

$$\left. \begin{aligned} a(n_1) &= \tilde{a}(n_1) + w_h(d_{12})\tilde{a}(n_1) + \dots + w_h(d_{1M})\tilde{a}(n_M) \\ a(n_2) &= w_h(d_{21})\tilde{a}(n_1) + \tilde{a}(n_2) + \dots + w_h(d_{2M})\tilde{a}(n_M) \\ &\dots \\ a(n_M) &= w_h(d_{M1})\tilde{a}(n_1) + w_h(d_{M2})\tilde{a}(n_2) + \dots + \tilde{a}(n_M) \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

即有关系  $\mathbf{a} = \mathbf{W}_{pw} \tilde{\mathbf{a}}$ ，其中

$$\mathbf{W}_{pw} = \begin{bmatrix} 1 & w_h(d_{12}) & \dots & w_h(d_{1M}) \\ w_h(d_{21}) & 1 & \dots & w_h(d_{2M}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_h(d_{M1}) & w_h(d_{M2}) & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

参数  $d_{ij} = |n_i - n_j| = d_{ji}$  是两个峰值点的相对间距， $n_i$  为峰值点位， $w_h(n) = w(n)u(n-1)$ ，其中  $u(n)$  是单位阶跃信号，所以  $w_h(n)$  是原来窗函数  $w(n)$  的“半边”，或称为半边窗。利用半边窗的滤波去除原始窗函数的叠加效应，使修正矩阵  $\mathbf{W}_{pw}$  的作用是避免磨过度问题的产生。

因为由方程 (8.21)，原始磨光因子是修正磨光因子的正向叠加，叠加分量的权重取决于两个峰值点的相对距离。而修正磨光因子是没有这种叠加因素的。定义如下的棱角磨光函数或磨光滤波器和对应的磨光滤波变换：

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{pw}(n) &= 1 - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{a}(k)w(n-k) \\ \tilde{x}(n) &= \tilde{c}_{pw}(n)x(n) \end{aligned} \quad (8.22)$$

如图 8.21 所示，采用式 (8.19) 所给出的凯斯-贝塞尔 (Kaiser-Bessel) 窗函数作为式 (8.18) 中的窗函数，对于对应的 OFDM 信号做磨光处理后的输出信号与原始信号的对比，我们发现当有多个超越或接近峰值门限的信号幅度值出现时，对应窗函数法可能出现“磨过度”现象。经采用式 (8.21) 所给关系式对窗权重函数修饰后，“磨过度”现象得以明显改善。

### 3. 峰值消除法<sup>[6-8]</sup>

各种峰值限制形变技术的关键是降低超过给定门限的信号采样的幅度值，无论剪切限幅技术还是峰值窗技术，都是通过对原始信号的非线性形变来实现的。这种非线性形变直接的效果就是导致信号的带外功率辐射。要减少这种不利影响，最好是采用线性的峰值消除技术。最简单的线性的峰值消除技术就是从原始信号中减去幅度超过给定门限的信号采样。事实上，对于剪切限幅技术，也可以这样来理解，即限幅后的信号与原始信号之间的关系为

$$\tilde{s}(n) = s(n) - \sum_i (s(\tau_i) - A) e^{j\arg\{s(\tau_i)\}} \delta(n - \tau_i)$$

但是这种直接相减消除方法中被减信号具有较宽的带宽，因而  $\tilde{s}(t)$  相对原始信号  $s(t)$  频谱“被展宽”。为消除这种影响，将上面的信号  $\tilde{s}(t)$  经过一个脉冲响应为  $\text{sinc}(\pi nT)$  理想低通滤波器（注：一个脉冲响应为  $\text{sinc}(\pi nT)$  理想低通滤波器是具有无限时宽的，必须对它做适当处理，例如，乘以升余弦窗等方法使其具有有限时宽，此处权且认为它是具有有限时宽的），其中  $T$  使得滤波器的带宽大于或等于原始 OFDM 信号的带宽（所以  $s(n)$  经滤波后不变化），输出信号为

$$\tilde{s}_{LP}(n) = s(n) - \sum_i a_i e^{j\varphi_i} \text{sinc}(\pi T(n - \tau_i)) \quad (8.23)$$

我们将剔除信号  $\sum_i a_i e^{j\varphi_i} \text{sinc}(\pi T(n - \tau_i))$  解释为参考信号，它与原始信号具有相同的带宽。因此，峰值消除法的核心思想是找到与原始信号具有相同带宽的参考信号，将其剔除后至少能消除掉原始信号一个超越阈值的采样。这样，将式 (8.23) 与前面讨论的峰值加窗法式 (8.22) 对比，峰值消除法实质上也是一种峰值加窗法。因此，从性能上来说两种方法应该是一致的。

#### 8.4.3 编码类方法

编码类方法<sup>[11]</sup>及加扰<sup>[12-13]</sup>类降低峰均值比方法是一类具有较大灵活性的方法，然而讨论编码类降低 OFDM 信号峰均值比方法就不能不讨论 Golay 补码对 (Golay complementary Pair)<sup>[14]</sup>，因为其对应的 OFDM 信号峰均值比小于或等于 2。所以此处对 Golay 补码对做简要讨论，关于 Golay 补码对详细的构造、调制等问题可参考文献[14-16]。

**定义 8.1** 一个长度为  $N$  的序列  $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$  称为是另一个长度为  $N$  的序列  $\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$  的“补序列”，若它们的自相关函数之和满足关系式

$$\sum_{n=0}^{N-1} (x_n x_{n+k} + y_n y_{n+k}) = \begin{cases} 2N & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (8.24)$$

称  $\{x_n\}$  为  $\{y_n\}$  为 Golay 补码序列或 Golay 补码对，也称序列  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  为“互补序列”。

对式 (8.24) 两端做傅里叶变换，可得

$$|X(f)|^2 + |Y(f)|^2 = 2N$$

所以对于序列  $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ ，其功率谱的最大值应该有界的，即

$$|X(f)|^2 \leq 2N \quad (\forall f)$$

而调制符号星座图上的点应具有单位功率，所以序列  $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$  其功率谱的平均值为  $N$ ，所以  
对于补码序列  $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$  的功率峰均值比应满足  $\text{PAPR} \leq 2$ （从理论上证明了对应 OFDM 信号的  
峰均值比 PAPR 不会超过 3dB）。

互补序列有其生成方法的专门研究或讨论<sup>[14]</sup>。一个简单的生成方法是若记  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  为  
Golay 补码对，则新的 Golay 补码对为  $\mathbf{a} \leftarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ 、 $\mathbf{b} \leftarrow [\mathbf{a}, -\mathbf{b}]$ 。图 8.22 所示是利用此方法  
从  $\mathbf{a}=[1 \ 1]$ 、 $\mathbf{b}=[1 \ -1]$  为起始生成的长度为 512 的 BPSK 符号调制序列的 Golay 码的  
OFDM 信号的峰均值与同样长度 BPSK 符号调制序列的 OFDM 信号的对比。非常明显，  
Golay 码的 OFDM 信号的峰均值相对比较低。

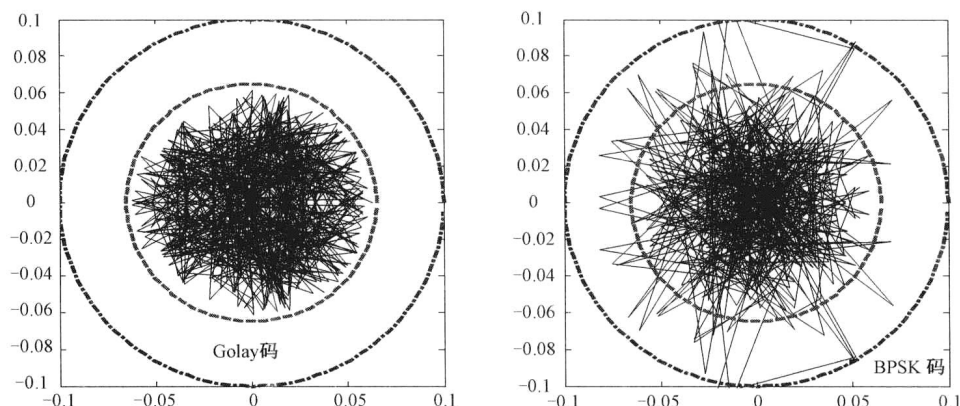


图 8.22 Golay 码与 BPSK 码的 OFDM 信号功率峰值对比

事实上，有大量的文献<sup>[14]</sup>专门讨论 Golay 码的构造问题，或满足某种调制方式，如  
QAM 符号调制序列 Golay 码的构造问题<sup>[27]</sup>。另外 Hadamard 矩阵的各列或各行也构成互补  
序列，而 Hadamard 矩阵可以从较低维数扩展到 2 的任意幂次维数。 ....

#### 8.4.4 加扰类方法

这类方法的灵活性相对更大，因此在此简单地叙述一种所谓的选择映射（Selective  
Mapping, SLM）法<sup>[21]</sup>和两种部分传输序列（Partial Transmit Sequence, PTS）法<sup>[22]</sup>，通过  
这些方法来理解此类方法的精髓所在。先讨论所谓的“直接优化”部分传输序列法<sup>[22]</sup>。假  
设所考虑的 OFDM 信号为

$$s(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi kn}$$

令  $\{X_n\}$  为星座图内的点。将  $\{X_n\}$  组合成一个数据矢量  $\mathbf{X}=[X_0, \dots, X_{N-1}]^T$ 。将数据矢量  $\mathbf{X}$  分  
成  $M$  个不相交子块， $\{\mathbf{X}_m \mid m=1, 2, \dots, M\}$ ，基于排列组合法这种分块方式可能有许多种。  
设序列  $\mathbf{A}_m=[A_{m,1}, A_{m,2}, \dots, A_{m,LN}]^T$  为  $\mathbf{X}_m$ （ $m=1, 2, \dots, M$ ）的一个加零 IFFT，即  $\mathbf{A}_m$   
（ $m=1, 2, \dots, M$ ）为 OFDM 系统传输数据。我们期望通过合理地结合这些数据实现较低的

PAPR。如有一种部分传输序列结合器的输出可以表示为

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{M,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{M,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1,LN} & A_{2,LN} & \cdots & A_{M,LN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\phi_1} \\ e^{j\phi_2} \\ \cdots \\ e^{j\phi_M} \end{bmatrix} \quad (8.25)$$

或将部分传输序列结合器的输出表示为  $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1(\boldsymbol{\Phi}) \quad \mathbf{S}_2(\boldsymbol{\Phi}) \quad \cdots \quad \mathbf{S}_{LN}(\boldsymbol{\Phi})]^T$ ，关于优化 PAPR 问题可以表示为如下的极小极大问题

$$\min_{\boldsymbol{\Phi}} \max_{1 \leq l \leq LN} |\mathbf{S}_l(\boldsymbol{\Phi})| \quad (8.26)$$

式中， $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_M)$ ， $\phi_m \in [0, 2\pi)$  ( $m=1, 2, \dots, M$ )。则  $\mathbf{S}_k(\boldsymbol{\Phi})$  可以写作

$$\mathbf{S}_k(\boldsymbol{\Phi}) = A_{1,k} e^{j\phi_1} + A_{2,k} e^{j\phi_2} + \cdots + A_{M,k} e^{j\phi_M}$$

式中， $A_{l,k}$  为幅度值。假设  $|A_{l_1,k}| > |A_{l_2,k}| > \cdots > |A_{l_M,k}|$ ，其中序数  $\{l_1, l_2, \dots, l_M\}$  是  $\{1, 2, \dots, M\}$  的一个置换。令

$$\phi_{l_i} = \begin{cases} -\angle A_{l_i,k}, & l_i \in [1, 3, 5, 7, \dots] \\ \pi - \angle A_{l_i,k}, & l_i \in [2, 4, 8, \dots] \end{cases}$$

在这些假设条件下，目标函数  $\mathbf{S}_k(\boldsymbol{\Phi})$  可以表示为

$$\mathbf{S}_k(\boldsymbol{\Phi}) = |A_{l_1,k}| - |A_{l_2,k}| + |A_{l_3,k}| - \cdots$$

显然这样就可以实现极大极小最优化问题 (8.26)。从上面的推导过程可以看出，在接收端需要已知满足优化条件 (8.26) 的相位序列  $\boldsymbol{\Phi}_{\text{opt}}$ 。所以相位序列  $\boldsymbol{\Phi}_{\text{opt}}$  是需要额外传输的边际信息，且它是随着数据矢量  $\mathbf{X}$  的不同划分而变化的。

再来讨论所谓的选择映射法。将输入数据  $X$  分为长度为  $N$  的数据块， $\mathbf{X} = [X_0, X_1, \dots, X_{N-1}]^T$ ，注意其中  $X_n$  可以是一个数组。再令  $\mathbf{B}^{(m)} = [b_{m,0}, b_{m,1}, \dots, b_{m,N-1}]^T$ ， $m=1, 2, \dots, M$ ，其中  $b_{m,i}$  ( $i=0, 1, \dots, N-1$ ) 为旋转因子，例如  $b_{m,i}$  的取值集合可以为  $[+1, -1, +j, -j]$ ，则对于  $\mathbf{B}^{(m)}$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ) 来说，当因子  $b_{m,i}$  的取值集合确定时  $M$  的值是确定的，即当因子  $b_{m,i}$  的取值集合确定时其长度为  $N$  的排列组合数是一定的。若在当前假设下  $M=4^N$ ，置

$$\mathbf{X}^{(m)} = [X_{m,0}, X_{m,1}, \dots, X_{m,N-1}]^T, \quad X_{m,i} = X_i \cdot b_{m,i} \quad (i=0, 1, \dots, N-1)$$

这样对于一个特定划分的数据块  $\mathbf{X} = [X_0, X_1, \dots, X_{N-1}]^T$ ，由于旋转因子  $\mathbf{B}^{(m)}$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ) 而衍生出  $M$  个数据块。对每一个数据块做 IFFT 运算就得到  $M$  个时域数据块

$$x^{(m)}(n) = \text{IFFT}[X_{m,k}] = \text{IFFT}[X_m(k)] \quad (n=0, 1, \dots, N-1)$$

或写作  $x^{(m)}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_m(k) e^{j2\pi nk/N}$  ( $X_m(k) = X_k \cdot b_{m,k}$ ， $n=0, 1, \dots, N-1$ )。对每一组数据计算其 PAPR，得  $\text{PAPR}_m$  ( $m=1, 2, \dots, M$ )，求优化问题

$$m_{\text{opt}} = \arg \min_{1 \leq m \leq M} \text{PAPR}_m$$

则  $\{x^{(m_{\text{opt}})}(n)\}$  为 OFDM 系统所要传输的数据。这就是所谓的“选择映射法”。显然该算法需要传输边际信息  $\mathbf{B}^{(m_{\text{opt}})}$ ，实际上只需传输标号  $m_{\text{opt}}$ ，因此从传输角度其边际数据量是很少的，但在发送端相对于前面讨论的部分传输序列的“直接法”而言搜索计算量是很大的。图 8.23 所示是经选择映射处理后的 OFDM 信号的峰值功率与原始 OFDM 信号的峰值功率



的对比图，可见选择映射处理能有效降低 OFDM 信号的峰值功率。

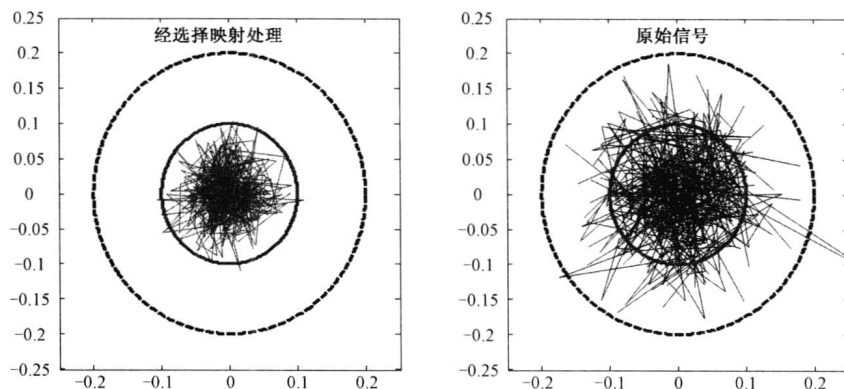


图 8.23 选择映射处理后的 OFDM 信号峰值功率与原始信号的对比

选择映射法的缺点是在发送端需完成巨大的搜索计算量，为了降低这种计算量，人们提出了另外一类着重在序列的分割（segment）方面的部分传输序列法<sup>[29]</sup>。它们大致有相邻分割（adjacent）、伪随机分割（pseudo-random）和交织分割（interleaved）三种。其基本思想是：

- (1) 相邻分割：把  $N/J$  个相邻的子载波分配在 1 个部分传输序列内的分割方法。
- (2) 伪随机分割：通过随机系选取的方法，每个子载波被随机地分配到可能的  $J$  个部分传输序列内。
- (3) 交织分割：把相距间隔为  $J$  的子载波分配在 1 个部分传输序列内。

上述三种方法各有特点，但是都遵循如下原则：每个子载波只能出现在 1 个部分传输序列内，而且  $J$  个部分传输序列中所包含的子载波个数相同。通过简单的分析计算，它们均可以大幅度地降低搜索计算量。

图 8.24 所示是几种部分传输序列法的峰均值功率概率分布补函数曲线。显然性能最好的方法是伪随机分割法，其次是相邻分割法，最后是交织分割法。但是，无论哪种方法相对于原始信号，性能均有较大提升。

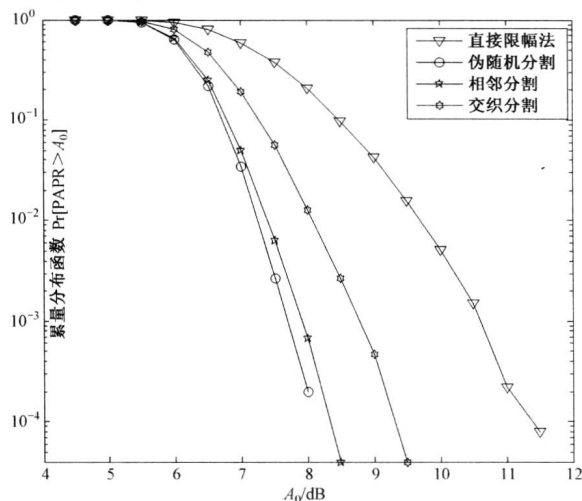


图 8.24 几种部分传输序列法的峰均值功率概率分布补函数曲线

我们将 OFDM 系统的优点总结为：

(1) 发送端实现复杂度低，有经典的快速算法 FFT。

(2) 频带利用率高。由于并行子信道是相互重叠的，利用子信道间的正交性保证无信道间干扰 (ICI)。

(3) 由于 OFDM 系统帧循环前缀结构，OFDM 系统无多径传输影响。

(4) 由于 OFDM 系统窄带子信道划分特点，所以 OFDM 系统无符号间干扰 (ISI)。

(5) 综合上面 (2) 至 (4)，OFDM 系统可省掉均衡器。

(6) 因为窄带子信道传输特性，OFDM 系统对大多数脉冲干扰是稳健的。

(7) 由于 OFDM 系统信道的窄带剖分并行传输特点，OFDM 系统提供了极大的资源配置灵活性，例如，可以在每个子信道上合理分配数据传输速率和功率等。

此处对 OFDM 系统的讨论只能是非常基础、入门的，希望深入了解的读者可以通过阅读本节的参考文献以及它们所罗列的文献。此外，关于 OFDM 系统的同步问题，其解决方案类同于第 6 章信道的估计问题，因此这里就不再进行较仔细的讨论分析。

## 8.5 MIMO-STFC-OFDM 系统成对差错概率分析

由第 1 章和前面各小节的叙述我们知道，影响移动终端通信质量的关键因素是由多径传播引起的信号衰落和同一蜂窝或邻近蜂窝其他用户的多址干扰。分集效应的特点是利用多径传播可以给接收端提供同一数据信息的多个模板，对这些信号模板采用合适的合并检测算法可以显著地改善接收信号的信噪比，以达到将信号多径传输引起信号衰落的不利因素转化成有利因素以抵抗其他干扰用户的目的。从物理层面可以提供三种分集方式，它们分别是空域分集、时域分集、频域分集。对于空域分集，通过接收分集或发送分集两个途径来实现。前面各个章节所讨论的空时编码技术是实现空—时域分集的一种便捷方法<sup>[37]</sup>。下面讨论实现空—时—频域分集的原理和途径。

前面各个章节主要是讨论在窄带信道中基于单个载波传输系统如何实现空—时分集的原理和方法。现在，将前面讨论的结果扩展到宽带、频率选择性、多载波传输信道的情形。在窄带信道的假设下，可以认为信道是平坦的或非频率选择性的，而对于宽带信道它通常是频率选择性衰落的。关于信道的时间选择性衰落问题，仍假设信道为快衰落的。至于信道的数学模型，前面基本上采用的是具有确定性衰落的理想信道，而在下面由于考虑到信道的多径传输特性，假设信道是一个具有确定性衰落的有限长单位脉冲响应滤波器。对于多载波传输采用正交频分复用 (OFDM) 的传输技术。

由第 1 章的讨论我们知道，对于在发送端和接收端配置阵列天线的 MIMO 系统，等价于在发送端与接收端建立起多个具有“相互独立”传输特性而同时传输“同一数据样本”的管道。通过采用适当的合并技术，将这些独立管道中的数据“合理相加”，就能实现接收信号信噪比的实质改善，因而能够完成所传输数据的可靠性检测。这些就是空间分集的“精髓”。基于这样一些理解，梳理一下在当前的假设条件下，系统能够提供给我们哪一些资源，然后通过理论分析与研究，探讨出合理利用这些资源的方法和技术。

### 8.5.1 系统模型及其分集特性

设发送端和接收端分别配置有  $N_T$  个发送天线阵元与  $N_R$  个接收天线阵元的阵列天线系统。系统采用子载波数为  $N_c$  的正交频分复用调制技术。信道为具有延迟长度为  $L$  的有限长单位脉冲响应系统。我们认为这些是系统和传输信道所能够提供的资源。如果合理地利用这些资源，将能达到怎样的分集效果呢？用前面对于若干个不相关信道的“独立管道”的解释，这里分析讨论应用这些资源能够实现的系统独立管道数，作为系统能够提供传输信号空间、时间和频率自由度的度量。本小节的分析和讨论方法较多地参考了文献[30-31]。

结合前面各章的讨论和本章前面各节的分析，我们知道多输入多输出系统最多（在不考虑传输速率或复用情况下）能够提供系统收、发阵元乘积的空间分集阶数，即空间分集阶数为  $N_T \cdot N_R$ ；而正交频分复用调制技术也能够提供子载波数量级“独立一并行”的信道，即  $N_c$  个独立信道；所以，多输入多输出系统与正交频分复用调制技术结合在理想情形下应该能提供  $N_T \cdot N_R \cdot N_c$  个独立信道。将其中的频分复用因子  $N_c$  理解为频率域所提供的分集阶数（这时往往意味着不考虑系统解码输出延迟问题）。因为每个发送天线阵元都采用子载波数为  $N_c$  的正交频分复用调制技术传输，这样可以将每一个发送天线阵元想象为具有  $N_c$  个“虚拟”天线阵元的系统，或将原始发送阵列天线想象为具有  $N_T \cdot N_c$  个“虚拟”天线阵元的系统。所以在接收端，可以得到同一数据的  $N_R \cdot (N_T \cdot N_c)$  个独立模板（若在  $N_c$  个独立信道的每一个上承载不同的信号，则仅能得到每一个信号的  $N_T \cdot N_R$  各模板）。进一步，对于具有  $N_T$  个天线阵元的发送天线和  $N_R$  个接收天线阵元的阵列天线系统，由于信道历经  $L$  个延迟线，所以对同一数据从空间看它历经  $N_T \cdot N_R$  个独立“管道”；从时间方面看它又历经  $L$  次独立“传输”或“重传”。因此，我们能够获得的全速率传输空一时一频“理想”分集阶数为  $(N_T \cdot N_R)$ 。要实现这个理想的空一时一频分集，必须在接收端对这  $L$  次独立传输完成独立相干相加。在实际工程实现中，可能需要考虑对信号这样一些模板的合理利用以及系统传输速率、解码复杂度、系统输出延迟等诸多因素，综合地利用这些资源来完成信息的高速、实时、稳健传输。

延续前面的设定，发送端和接收端分别配置有  $N_T$  个发送天线阵元与  $N_R$  个接收天线阵元的阵列天线系统。信道为具有延迟长度为  $L$  的有限长单位脉冲响应系统，其延迟系数  $H_l$  ( $l=0,1,\dots,L-1$ ) 是维数为  $N_R \times N_T$  的服从均值为  $\boldsymbol{\mu}_l$ 、方差为  $\sigma_H^2$  的高斯分布的随机矩阵（若  $\boldsymbol{\mu}_l = \mathbf{0}$ ，称信道为瑞利型；若  $\boldsymbol{\mu}_l \neq \mathbf{0}$ ，称信道为莱斯型。在频域（经傅里叶变换）信道矩阵可以表示为

$$\mathbf{H}(e^{j2\pi\theta}) = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{H}_l e^{-j2\pi l\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (8.27)$$

进一步，假设发送端和接收端均配置均匀线阵。以发送端均匀线性阵列天线为例，各个阵元之间间隔记为  $\Delta = d/\lambda$ ，其中  $d$  为各个阵元之间的绝对间隔， $\lambda = c/f_c$  是以  $f_c$  为中心频率的窄带信号的波长。由于每一个发送天线阵元传输的信号到达接收天线阵元时都经历了反射、散射、衍射等复杂的传输环境的变换，从而形成一个“信号簇”到达接收阵列天线阵元。我们将这个“信号簇”简化为具有平均波达方向和相应方差的若干个具有随机传输路径的信号。假设对于接收阵列天线来说，当前时刻其任何可能的照射到它的信号簇以平

均波达方向角  $\bar{\theta}_k$ ，方差  $\hat{\theta}_k \in \mathcal{N}(0, \sigma_{\theta_k})$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ) 完成传输，则实际波达方向角为  $\theta_k = \bar{\theta}_k + \hat{\theta}_k$ ， $\theta_k \in \mathcal{N}(\bar{\theta}_k, \sigma_{\theta_k})$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ) 的高斯随机变量。

由于发送端阵列天线各个阵元之间可以有适当的距离间隔，所以假设矩阵  $\mathbf{H}_l$  ( $l=0, 1, \dots, L-1$ ) 的各列之间是互不相关的；然而由于接收端阵列天线各个阵元之间很难做到充分的距离间隔，所以假设矩阵  $\mathbf{H}_l$  ( $l=0, 1, \dots, L-1$ ) 的各行之间是（弱）相关的。对于不同的延迟时刻所对应的信道矩阵  $\mathbf{H}_l$  和  $\mathbf{H}_\tau$  ( $\tau, l=0, 1, \dots, L-1$ ) 我们认为它们是完全独立的。假设信道矩阵  $\mathbf{H}_l$  的第  $k$  个行矢量为  $\mathbf{h}_k^{(l)} = [h_{k,1}^{(l)}, h_{k,2}^{(l)}, \dots, h_{k,N_T}^{(l)}]$ ，信道矩阵  $\mathbf{H}_\tau$  的第  $\kappa$  个行矢量为  $\mathbf{h}_\kappa^{(\tau)} = [h_{\kappa,1}^{(\tau)}, h_{\kappa,2}^{(\tau)}, \dots, h_{\kappa,N_T}^{(\tau)}]$ ，则

$$E\{\mathbf{h}_k^{(l)T} (\mathbf{h}_\kappa^{(\tau)})^*\} = \mathbf{R}_{k,\kappa}^{(l)} \odot \delta(l-\tau) \quad (8.28)$$

式中，符号  $\odot$  表示 Hadamard 积或称为“元素对乘积”。式 (8.28) 表明，信道矩阵  $\mathbf{H}_\tau$  不同行矢量的相关矩阵  $\mathbf{R}_{k,\kappa}^{(l)}$  与其列序数无关，而仅与行序数有关。与  $\delta(\cdot)$  函数 Hadamard 积的意义在于不同延迟时刻所对应的信道矩阵  $\mathbf{H}_l$  的不相关性。因此在讨论过程中在不引起混淆的情形下可以略去延迟序数，记信道矩阵  $\mathbf{H}_l$  的第  $k$  个行矢量为  $\mathbf{h}_k = [h_{k,1}, h_{k,2}, \dots, h_{k,N_T}]$ ，所以不同接收天线所形成的  $N_T \times N_T$  维信道衰减系数间的相关矩阵可以简单表示为

$$E\{(\mathbf{h}_k)^T (\mathbf{h}_\kappa)^*\} \triangleq \mathbf{R}_{k,\kappa}^{(l)} \quad (8.29)$$

此相关矩阵除与延迟序数  $l$  有关外仅与接收天线序数有关。进一步讨论对于信道矩阵  $\mathbf{H}_l$  中任意两个元素的相关特性，假设在当前时刻仅有一个“信号簇”照射到接收阵列天线上，其波达方向角为  $\theta_0 = \bar{\theta}_0 + \hat{\theta}_0$ ， $\hat{\theta}_0 \in \mathcal{N}(0, \sigma_{\theta_0})$ ，则对于  $\mathbf{H}_l$  中任意两个元素  $h_{m,\mu}$  和  $h_{n,\eta}$  ( $m, n=1, 2, \dots, N_R$ ， $\mu, \eta=1, 2, \dots, N_T$ )，定义参数

$$\mathbf{r}_{m,n} = E\{h_{m,\mu} h_{n,\eta}^*\} = |\beta|^2 \rho(\Delta_{m,n}, \bar{\theta}_0, \sigma_{\theta_0})$$

式中，函数  $\rho(\cdot, \cdot, \cdot)$  表示对于相应参数的相关系数，即对于间距为  $\Delta_{m,n}$  倍波长的两个接收阵元，当它们接收到以波达方向平均角度为  $\bar{\theta}_0$  和相应的角度弥散范围为  $\sigma_{\theta_0}$  的“信号簇”时的相关系数； $|\beta|$  为信道的衰减（增益）特性参数。所以在相应延迟时刻  $l$ ，当有多个“信号簇”照射到接收阵列天线时两个信道间的相关系数  $\mathbf{r}_{k,\kappa}^{(l)}$  ( $k, \kappa=1, 2, \dots, N_R$ ) 可以写作

$$\mathbf{r}_{k,\kappa}^{(l)} = |\beta_l|^2 \sum_i \rho_l(\Delta_{k,\kappa}, \bar{\theta}_i, \sigma_{\theta_i}) \quad (8.30)$$

式中， $\Delta_{k,\kappa}$  为第  $k$  个阵元与第  $\kappa$  个阵元相对于信号波长的间距。若在式 (8.30) 中，仅有一个信号簇且以非常小的角度扩散，即  $\sigma_{\theta_0}$  远远小于 1，则间距为  $\Delta_{k,\kappa}$  倍波长的接收阵元之间信道的相关系数  $\rho_l(\Delta_{k,\kappa}, \bar{\theta}_0, \sigma_{\theta_0})$  可以近似为

$$\rho_l(\Delta_{k,\kappa}, \bar{\theta}_0, \sigma_{\theta_0}) \approx e^{-j2\pi\Delta_{k,\kappa} \cos \bar{\theta}_0} e^{-2\pi(\Delta_{k,\kappa} \sin \bar{\theta}_0 \sigma_{\theta_0})^2} \approx e^{-j2\pi\Delta_{k,\kappa} \cos \bar{\theta}_0}$$

应该强调的是，该表达式不仅适用于小角度扩散传输环境，同样适用于无扩散（不相关空域衰落）情形，也就是当  $\sigma_{\theta_0} = 0$  的情形。这时发送端信源相当于一个点“源”，接收信号相关矩阵  $\mathbf{R}^{(l)}$  蜕化为秩为 1，与先前的假设相对应，这时有  $\mathbf{R}^{(l)} = |\beta_l|^2 \mathbf{a}(\bar{\theta}_0) \mathbf{a}^H(\bar{\theta}_0)$ ，其中  $\mathbf{a}(\theta)$  表示接收阵列天线的阵列流形（array manifold）矢量。将其简记为  $\mathbf{R}^{(l)}$  或  $\mathbf{R}_l$ ，此式表示在这一时刻仅有一个点信号源照射到接收阵列天线系统。若接收阵列天线系统为均匀

线阵，则  $\mathbf{a}(\theta)$  为均匀线阵的阵列流形矢量，则其表达式为

$$\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{j2\pi\Delta\cos\theta}, \dots, e^{j2\pi(N_R-1)\Delta\cos\theta}]^T$$

因此信道矩阵  $\mathbf{H}_l$  的相关矩阵  $\mathbf{R}_l$  的秩不仅与接收阵列天线的阵元间距有关，也与传输信道的角度色散特性有关。基于上面这些认知和设定，信道矩阵  $\mathbf{H}_l$  的相关矩阵定义为

$$\mathbf{R}_l = E\{\text{vec}(\mathbf{H}_l^T)[\text{vec}(\mathbf{H}_l^T)]^H\}$$

因为相关矩阵为半正定的，所以可以将维数为  $N_R N_T \times N_R N_T$  的相关矩阵  $\mathbf{R}_l$  分解为  $\mathbf{R}_l = \mathbf{R}_l^{1/2} \mathbf{R}_l^{H/2}$ 。这样就可以利用相关矩阵  $\mathbf{R}_l^{1/2}$  对传输信道做白化处理，即有维数为  $N_R \times N_T$  信道系数矩阵  $\mathbf{H}_{w,l}$ ，其各个元素服从独立同分布复循环高斯随机变量  $\mathcal{CN}(0,1)$ ，使得

$$\text{vec}(\mathbf{H}_l^T) = \mathbf{R}_l^{1/2} \text{vec}(\mathbf{H}_{w,l}^T), \quad \text{vec}(\mathbf{H}_{w,l}^T) = \mathbf{R}_l^{-1/2} \text{vec}(\mathbf{H}_l^T)$$

在上式中可视情况需要取  $\mathbf{R}_l^{1/2}$  的广义逆来实现传输信道的白化。

### 8.5.2 基于 OFDM 调制的发送端阵列天线系统与空—频编码

经过第 4~6 章的讨论分析，从第 4 章空时编码所能够获得的空间分集增益，到第 5 章的空时格型编码的分集增益加编码增益。再到第 6 章从编码、分集增益到复用增益的研究，使我们对空时编码技术有层层深入的认知。为了深刻理解和深入分析空—时—频编码原理和效益，下面基于对空—时编码的认识对空—时—频编码原理进行分析研究。作为第一步，首先讨论多输入多输出系统与正交频分复用调制技术结合的问题。我们认为，最简单、最直接的结合方法是每一个发送天线阵元送出的皆为正交频分复用调制信号，即 OFDM 信号，如图 8.25 所示，即从信源输出的数据流经 OFDM 调制器变换后送入阵列天线系统发送。

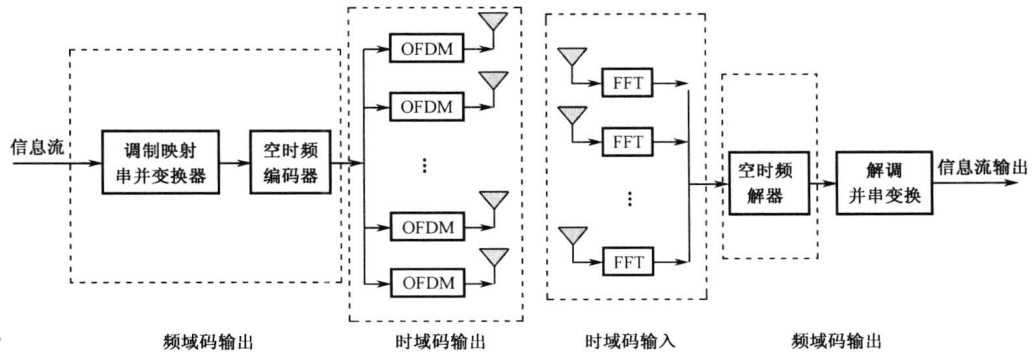


图 8.25 MIMO&OFDM 发送端与接收端结构示意图

如前面各小节所述，其中 OFDM 系统先对数据流进行串并变换，再做  $N_c$  点的 IFFT 运算和增加循环前缀（长度为  $L_{CP}$ ）等，这样 OFDM 数据包的长度约为  $N = N_c + L_{CP}$ 。假设在接收端是准确同步的，即经过下变频，精确地去掉循环前缀，再经 FFT 运算得到接收数据矢量。故不妨设 OFDM 调制器输出数据长度为  $N$ ，即将发送数据组装成频域矢量

$$\mathbf{c}_k = [c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \dots, c_{N_T}^{(k)}]^T$$

式中， $c_i^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) 表示从发送天线的第  $i$  个阵元和第  $k$  个子载波上发送的符号。

所以频域内接收数据矢量为

$$\mathbf{r}_k = \sqrt{E_s} \mathbf{H}(e^{j2\pi k/N}) \mathbf{c}_k + \mathbf{n}_k, k=0,1,\dots,N-1 \quad (8.31)$$

式中,  $\mathbf{n}_k$  为加性零均值、方差为  $\sigma_n^2$  的复循环高斯白噪声, 即满足  $E\{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_l^H\} = \sigma_n^2 \mathbf{I}_{N_R} \delta(k-l)$ , 其中  $\mathbf{I}_{N_R}$  为  $N_R$  维的单位矩阵。进一步假设数据符号  $c_k^{(i)}$  为单位能量的复星座图内的点。所以, 从发送端看空一频编码矩阵为  $N_T \times N$  维矩阵

$$\mathbf{C} = [\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{N-1}], \mathbf{C} \in \mathbf{C}^{N_T \times N} \quad (8.32)$$

式 (8.32) 所示的二维数据其横轴表示 (载波) 频率 (频域); 纵轴表示发送阵列天线阵元数 (空域); 图 8.25 所示从信息流到编码矩阵  $\mathbf{C}$  通过时域串并变换且包含如第 4 章所述的空时编码特征, 则式 (8.32) 是一个所谓的空—时—频编码矩阵。假设比特数据流经空—时—频编码器处理后输出数据为  $N_T \times N$  维的数据块, 或一个多输入多输出空域发送数据为  $N_T \times 1$  维矢量, 而一个多输入多输出 OFDM 数据包含有  $N$  个这样的矢量。假设频率选择性衰减信道  $\mathbf{H}_l$  ( $l=0,1,\dots,L-1$ ) 至少在 OFDM 一个数据包时隙内是保持不变的或称为准静态的, 假设接收端具有信道的完整信息, 则最大似然解码算法的输出矢量为  $\hat{\mathbf{c}}_k, k=0,1,\dots,N-1$ , 则有

$$\hat{\mathbf{c}}_k = \arg \min_{\mathbf{C}} \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \mathbf{r}_k - \sqrt{E_s} \mathbf{H}(e^{j2\pi k/N}) \mathbf{c}_k \right\|^2 \quad (8.33)$$

式 (8.33) 的最小化是在空—频编码矩阵  $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{N-1}]$  和结合星座图空间构成的“超立方体”内搜索完成的<sup>[30]</sup>。假设信道增益矩阵  $\mathbf{H}_l$  ( $l=0,1,\dots,L-1$ ) 写成行矢量的形式为

$$\mathbf{H}_l = \left[ (\mathbf{h}_1^{(l)})^T, (\mathbf{h}_2^{(l)})^T, \dots, (\mathbf{h}_{N_R}^{(l)})^T \right]^T \in \mathbf{C}^{N_R \times N_T}$$

式中, 第  $i$  ( $i=1,2,\dots,N_R$ ) 个行矢量为  $\mathbf{h}_i^{(l)} = [h_{i,1}^{(l)}, h_{i,2}^{(l)}, \dots, h_{i,N_T}^{(l)}]$ ; 若令  $\mathbf{W}_N = \exp\{-j2\pi/N\}$ , 则在式 (8.31) 和 (8.33) 中可以记

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}(\mathbf{W}_N^{-k})(\mathbf{c}_k - \tilde{\mathbf{c}}_k) = \mathbf{H}(\mathbf{W}_N^{-k})\Delta\mathbf{c}_k \quad (k=0,1,\dots,N-1) \quad (8.34)$$

构造矢量  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_N^T]^T \in \mathbf{C}^{N_R N \times 1}$ 。则结合式 (8.27) 与式 (8.31) 可得  $N_R N$  维矢量  $\mathbf{Y}$  与信道增益参数矩阵  $\mathbf{H}_l$  服从同样的复高斯随机分布。其均值为  $\bar{\mathbf{Y}} = E(\mathbf{Y})$ , 写成分量形式为  $\bar{\mathbf{Y}} = [\bar{y}_1^T, \bar{y}_2^T, \dots, \bar{y}_N^T]^T$ , 其中  $\bar{y}_k = \bar{\mathbf{H}}(e^{j2\pi k/N_c})(\mathbf{c}_k - \tilde{\mathbf{c}}_k)$ , 由式 (8.27) 得  $\bar{\mathbf{H}}(e^{j2\pi k/N_c}) = \sum_{l=0}^{L-1} E(\mathbf{H}_l) e^{-j2\pi l\theta}$ 。

显然对应于瑞利信道  $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}$ ; 而对应于莱斯信道  $\bar{\mathbf{Y}} \neq \mathbf{0}$ 。

### 8.5.3 成对差错概率分析

式 (8.33) 所表示的算法的性能是由其对应的成对差错概率决定的。本节在频率选择性信道假设下, 以式 (8.33) 所表示的统计判决准则为依据来分析接收端的成对差错概率。设  $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{N_c}]$  和  $\tilde{\mathbf{C}} = [\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_{N_c}]$  是两个不同的  $N_T \times N$  维空频码, 则在发送码为  $\mathbf{C}$  的情况下接收机将其错判为  $\tilde{\mathbf{C}}$  的概率为<sup>[32]</sup>

$$\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}} | \{\mathbf{H}(e^{j2\pi k/N})\}) = \mathcal{Q}\left(\sqrt{E_s} \cdot d^2(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}} | \{\mathbf{H}(e^{j2\pi k/N})\}) / 2\sigma_n^2}\right)$$

式中,  $d^2(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}} | \{\mathbf{H}(e^{j2\pi k/N})\}) = \sum_{k=1}^N \|\mathbf{H}(e^{j2\pi k/N})(\mathbf{c}_k - \tilde{\mathbf{c}}_k)\|^2$  表示码字  $\mathbf{C}$  和  $\tilde{\mathbf{C}}$  在信道参数矩阵  $\{\mathbf{H}(e^{j2\pi k/N})\}$  投影空间的距离。由式 (8.34) 有  $d^2(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}} | \{\mathbf{H}(e^{j2\pi k/N})\}) = \|\mathbf{Y}\|^2$ 。利用  $Q(x)$  的 Chernoff 界 (参阅第 3 章), 可以得到条件成对差错概率的一个比较紧致的上界为

$$\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}} | \{\mathbf{H}(e^{j2\pi k/N})\}) \leq e^{-E_s \|\mathbf{Y}\|^2 / 4\sigma_n^2} \quad (8.35)$$

记传输信噪比因子为  $\gamma = E_s / 4\sigma_n^2$ 。所以成对差错概率为条件成对差错概率关于信道参数期望, 即

$$\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = E\left(\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}} | \{\mathbf{H}(e^{j2\pi k/N})\})\right) \quad (8.36)$$

假设  $\mathbf{H}_l$  ( $l=1, 2, \dots, L$ ) 为复高斯随机矩阵, 所以由式 (8.27), 矩阵  $\mathbf{H}(e^{j2\pi k/N})$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) 为复高斯随机矩阵。对应于信道矢量  $\mathbf{Y}$  和  $\bar{\mathbf{Y}}$  的假设, 若对于  $\forall l \in \mathcal{L} \triangleq \{1, 2, \dots, L\}$ ,  $\bar{\mathbf{H}}_l = E(\mathbf{H}_l) = 0$  则称  $\mathbf{H}_l$  为瑞利信道; 否则称  $\mathbf{H}_l$  为莱斯信道, 即瑞利信道为莱斯信道的特殊情形。由式 (8.35) 和式 (8.36), 我们看到成对差错概率的表达式与接收信号矢量  $\mathbf{Y}$  的范数有直接关系, 而且式 (8.36) 中求期望值也仅与矢量  $\mathbf{Y}$  有关。下面考察接收信号矢量  $\mathbf{Y}$  的结构, 由式 (8.34) 矢量  $\mathbf{y}_k$  的定义, 得

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \dots \\ \mathbf{y}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(W_N^0)\Delta\mathbf{c}_0 \\ \mathbf{H}(W_N^{-1})\Delta\mathbf{c}_1 \\ \dots \\ \mathbf{H}(W_N^{-(N-1)})\Delta\mathbf{c}_{N-1} \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{L-1} \begin{bmatrix} W_N^{0-l}\mathbf{H}_l\Delta\mathbf{c}_0 \\ W_N^{1-l}\mathbf{H}_l\Delta\mathbf{c}_1 \\ \dots \\ W_N^{(N-1)-l}\mathbf{H}_l\Delta\mathbf{c}_{N-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{N_R N \times 1}$$

对接收信号矢量  $\mathbf{Y}$  做置换变换, 使其与第  $i$  ( $i=1, 2, \dots, N_R$ ) 个行矢量  $\mathbf{h}_i^{(l)}$  有关的元素以发送码元  $\mathbf{c}_k$  ( $k=0, 1, \dots, N-1$ ) 的次序排列, 且仍然记为  $\mathbf{Y}$ , 例如仅与行矢量  $\mathbf{h}_i^{(l)}$  ( $i=1, 2, \dots, N_R$ ) 有关联关系的元素记为

$$\mathbf{y}_i = \sum_{l=0}^{L-1} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_i^{(l)} e^{j2\pi 0l/N} \Delta\mathbf{c}_0 \\ \dots \\ \mathbf{h}_i^{(l)} e^{j2\pi(N-1)l/N} \Delta\mathbf{c}_{N-1} \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{L-1} \begin{bmatrix} e^{j2\pi 0l/N} (\mathbf{h}_i^{(l)} \Delta\mathbf{c}_0) \\ \dots \\ e^{j2\pi(N-1)l/N} (\mathbf{h}_i^{(l)} \Delta\mathbf{c}_{N-1}) \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{L-1} \begin{bmatrix} e^{j2\pi 0l/N} [\Delta\mathbf{c}_0^T (\mathbf{h}_i^{(l)})^T] \\ \dots \\ e^{j2\pi(N-1)l/N} [\Delta\mathbf{c}_{N-1}^T (\mathbf{h}_i^{(l)})^T] \end{bmatrix}$$

记对角矩阵  $\mathbf{D} = \text{diag}\{e^{j2\pi 0/N}, \dots, e^{j2\pi(N-1)/N}\}$ , 则有

$$\mathbf{y}_i = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{D}^l \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{c}_0^T \\ \dots \\ \Delta\mathbf{c}_{N-1}^T \end{bmatrix} (\mathbf{h}_i^{(l)})^T = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{D}^l \Delta\mathbf{C}^T (\mathbf{h}_i^{(l)})^T \quad (i=1, 2, \dots, N_R)$$

所以接收信号矢量  $\mathbf{Y}$  可以写作

$$\mathbf{Y} = \sum_{l=0}^{L-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^l \Delta\mathbf{C}^T \mathbf{h}_1^{(l)T} \\ \dots \\ \mathbf{D}^l \Delta\mathbf{C}^T \mathbf{h}_{N_R}^{(l)T} \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{L-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^l \Delta\mathbf{C}^T & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D}^l \Delta\mathbf{C}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^{(l)T} \\ \dots \\ \mathbf{h}_{N_R}^{(l)T} \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{L-1} [\mathbf{I}_{N_R} \otimes (\mathbf{D}^l \Delta\mathbf{C}^T)] \text{vec}(\mathbf{H}_l^T)$$

依据此计算矢量  $\mathbf{Y}$  的范数, 所以有

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^H \mathbf{Y} &= \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} \text{vec}(\mathbf{H}_i^T)^H [\mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta\mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-i})] [\mathbf{I}_{N_R} \otimes (\mathbf{D}^l \Delta\mathbf{C}^T)] \text{vec}(\mathbf{H}_l^T) \\ &= \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} \text{vec}(\mathbf{H}_i^T)^H [\mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta\mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-i}) (\mathbf{D}^l \Delta\mathbf{C}^T)] \text{vec}(\mathbf{H}_l^T) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} \text{vec}(\mathbf{H}_i^T)^H [\mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-i+l} \Delta \mathbf{C}^T)] \text{vec}(\mathbf{H}_l^T) \quad (8.37)$$

为了获得矢量  $\mathbf{Y}$  的范数的更为紧凑的表达式, 令传输信道矩阵对应的“信道随机矢量”为  $\mathbf{z}$ , 即

$$\mathbf{z} = [\text{vec}(\mathbf{H}_0^T)^T \quad \text{vec}(\mathbf{H}_1^T)^T \quad \cdots \quad \text{vec}(\mathbf{H}_{L-1}^T)^T]^T \quad (8.38)$$

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^0 \Delta \mathbf{C}^T) & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^1 \Delta \mathbf{C}^T) & \cdots & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{L-1} \Delta \mathbf{C}^T) \\ \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-1} \Delta \mathbf{C}^T) & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^0 \Delta \mathbf{C}^T) & \cdots & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{L-2} \Delta \mathbf{C}^T) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-(L-1)} \Delta \mathbf{C}^T) & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-(L-2)} \Delta \mathbf{C}^T) & \cdots & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^0 \Delta \mathbf{C}^T) \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

则矢量  $\mathbf{Y}$  的范数可以表示为  $\mathbf{Y}^H \mathbf{Y} = \|\mathbf{Y}\|^2 = \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z}$ 。所以式 (8.35) 所示的条件成对差错概率的表达式为

$$\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}} | \mathbf{H}) = \exp(-\mathbf{z}^H (\gamma \mathbf{A}) \mathbf{z})$$

式 (8.36) 所示的成对差错概率的表达式为

$$\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = E_{\mathbf{z}} \left( \exp(-\mathbf{z}^H (\gamma \mathbf{A}) \mathbf{z}) \right) \quad (8.40)$$

式中,  $E_{\mathbf{z}}(\cdot)$  表明期望仅与信道参数矢量  $\mathbf{z}$  有关。显然式 (8.39) 所示的矩阵  $\mathbf{A}$  包含了空时码、正交频分复用调制、宽带频率选择性信道有限长单位脉冲响应传输特征等信息, 因此称此  $\mathbf{A}$  为“空—时—频—信道复用”码矩阵。

进一步, 由对信道参数  $\mathbf{H}_l$  的假设可得  $\mathbf{z}: \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , 其中  $E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu}$  为信道均值或称为直达波信号分量; 矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  为信道协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma} = E[(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^H] = E[\mathbf{z}\mathbf{z}^H] - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^H$ , 它反映信道相对于均值的弥散程度特性。显然有

$$\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{C}^{L \cdot N_T \cdot N_R}; \quad \boldsymbol{\Sigma} \in \mathbf{C}^{L \cdot N_T \cdot N_R \times L \cdot N_T \cdot N_R}; \quad \mathbf{A} \in \mathbf{C}^{L \cdot N_T \cdot N_R \times L \cdot N_T \cdot N_R}$$

对信道协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  做特征分解, 令  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^H$ , 其中  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1(\boldsymbol{\Sigma}), \lambda_2(\boldsymbol{\Sigma}), \dots, \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}(\boldsymbol{\Sigma}), 0, \dots, 0\}$  为  $\boldsymbol{\Sigma}$  的特征值对角矩阵, 其各元素满足关系式  $\lambda_1(\boldsymbol{\Sigma}) \geq \lambda_2(\boldsymbol{\Sigma}) \geq \dots \geq \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}(\boldsymbol{\Sigma}) > 0$ , 即  $\boldsymbol{\Sigma}$  的特征值递减排序;  $\mathbf{U}$  为  $\boldsymbol{\Sigma}$  的特征矢量矩阵,  $\mathbf{U} \in \mathbf{C}^{L \cdot N_T \cdot N_R \times L \cdot N_T \cdot N_R}$  为酉矩阵, 且满足  $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{I}$ 。

对于莱斯型信道  $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ , 利用正交分解理论应有  $\mathbf{b} = \mathbf{U}^H \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ , 称  $\mathbf{b}$  为直达波信号在信道特征空间的投影矢量, 它只是一个过渡均值矢量, 因为我们主要关注的是  $\boldsymbol{\mu}$  的长度, 因  $\mathbf{U}$  为酉矩阵, 所以有关系式  $\|\mathbf{b}\| = \|\boldsymbol{\mu}\|$ 。

为了求得成对差错概率的最终表达式 (8.40), 在  $\mathbf{z}: \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  的假设下, 先确定信道随机矢量  $\mathbf{z}$  的概率分布密度函数。

**命题 8.1**<sup>[33]</sup> 关于信道随机矢量  $\mathbf{z}$  的概率分布密度函数, 基于两种不同假设情形。

(1) 在矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  满秩的假设下, 随机矢量  $\mathbf{z}$  的概率分布密度函数为

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\det(\pi\boldsymbol{\Sigma})} \exp(-(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^H \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}))$$



(2) 在矩阵  $\Sigma$  缺秩的假设下, 随机矢量  $\mathbf{z}$  的概率分布密度函数为

$$f_{\Sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\text{pdet}(\pi\Sigma)} \exp\left(-(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^H \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

式中,  $\text{pdet}(\pi\Sigma) = \prod_{i=1}^{r(\Sigma)} \lambda_i$ ,  $\Sigma^{-1} = \mathbf{U} \text{diag}\{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_{r(\Sigma)}^{-1}, 0, \dots, 0\} \mathbf{U}^H$ 。

关于成对差错概率有下面结论。

**命题 8.2** (1) 在矩阵  $\Sigma$  满秩的假设下, 成对差错概率有如下表达式

$$\textcircled{1} \text{ 当信道为瑞利型时, 即 } E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \text{ 有 } \Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = \frac{1}{\det(\mathbf{I} + \Sigma\mathbf{A})}$$

$$\textcircled{2} \text{ 当信道为莱斯型时, 即 } E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}, \text{ 则有}$$

$$\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = \frac{\exp\left(-\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A}(\mathbf{I} + \Sigma\mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\mu}\right)}{\det(\mathbf{I} + \Sigma\mathbf{A})} \quad (8.41)$$

(2) 在矩阵  $\Sigma$  缺秩的假设下, 成对差错概率有如下表达式

$$\textcircled{1} \text{ 当信道为瑞利型时, 即 } E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \text{ 有}$$

$$\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = \frac{1}{\det(\tilde{\mathbf{I}} + \Sigma\mathbf{A})} \quad (8.42)$$

$$\textcircled{2} \text{ 当信道为莱斯型时, 即 } E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}, \text{ 则有}$$

$$\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = \frac{\exp\left(-\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A}(\mathbf{I} + \Sigma\mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\mu}\right)}{\det(\tilde{\mathbf{I}} + \Sigma\mathbf{A})} \quad (8.43)$$

式中, 矩阵  $\tilde{\mathbf{I}} = \text{diag}\{\underbrace{1, \dots, 1}_{r(\Sigma)}, 0, \dots, 0\}$ 。该定理的证明在附录 G 中。

这里先分析空一时一频一信道复用矩阵  $\mathbf{A}$  的一些特性。

下面就经式 (8.39) 所示的 OFDM 调制的码字相关矩阵  $\mathbf{A}$  和式 (8.38) 所示信道参数  $\mathbf{z}$  的协方差矩阵  $\Sigma$  的一些特殊结构来进一步分析成对差错概率的表达式。假设对于集合  $\{l: l = 0, \pm 1, \dots, \pm(L-1)\}$  的  $l$  均有  $\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T = \mathbf{I}_{N_T} \cdot \delta(l)$ , 则 OFDM 调制的码字相关矩阵  $\mathbf{A}$  有表达式

$$\mathbf{A} = \gamma_0 \mathbf{I}_{N_T} \otimes \mathbf{I}_{N_R} \otimes \mathbf{I}_L \quad (8.44)$$

式中, 参数  $\gamma_0$  包含了 OFDM 调制的可能增益、调制符号星座图中的符号能量等因素。事实上, 式 (8.44) 的成立条件并非很苛刻, 设  $\mathbf{C}_f$  为原始空时码矩阵, 其元素为调制符号星座图内的点; 设  $\mathbf{F}$  为  $N \times N$  维的 DFT 变换矩阵, 则有  $\mathbf{C}_f = \mathbf{C}\mathbf{F}$ 。有如下命题:

**命题 8.3** 对于集合  $\{l: l = 0, \pm 1, \dots, \pm(L-1)\}$  的所有  $l$ , 有关系式  $\mathbf{F}\mathbf{D}^l \mathbf{F}^{-T} = \boldsymbol{\pi}_l$ 。其中,  $\boldsymbol{\pi}_l$  为置换矩阵。即若设  $\mathbf{I}_N$  为  $N \times N$  维单位矩阵, 记  $\mathbf{I}_N = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N)$ ,  $\mathbf{e}_k$  为  $\mathbf{I}_N$  的第  $k$  个列矢量, 则  $\boldsymbol{\pi}_l = (\mathbf{e}_{N-l+1}, \mathbf{e}_{N-l+2}, \dots, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{N-l})$ 。

**命题 8.4** 对于集合  $\{l: l = 0, \pm 1, \dots, \pm(L-1)\}$  所有  $l$ , 有关系式:

$$\mathbf{C}^* \mathbf{D}^l \mathbf{C}^T = \mathbf{C}_f^* \mathbf{F}^{-*} \mathbf{D}^l \mathbf{F}^{-T} \mathbf{C}_f^T = \mathbf{C}_f^* \mathbf{F} \mathbf{D}^l \mathbf{F}^{-T} \mathbf{C}_f^T = \mathbf{C}_f^* \boldsymbol{\pi}_l \mathbf{C}_f^T$$

所以, 若原始编码矩阵  $\mathbf{C}_f$  是行正交的, 且行矢量是循环移位自共轭正交的、而互共轭正交性是循环移位保持的, 则式 (8.44) 成立。我们将式 (8.44) 中的参数  $\gamma_0$  归并于传输信

噪比参数中且仍记为  $\gamma$ 。

**定理 8.1** 当频域空时码具有行循环移位正交特性时, 成对差错概率有下面两种情形:

(1) 矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  为满秩的, 即  $r(\boldsymbol{\Sigma}) = \text{rank}(\boldsymbol{\Sigma}) = N_R \cdot N_T \cdot L$ , 这时有

① 当信道为瑞利型时, 即

$$E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \quad \Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = \prod_{i=1}^{N_R \cdot N_T \cdot L} \frac{1}{1 + \gamma \lambda_i(\boldsymbol{\Sigma})} \leq \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{N_R \cdot N_T \cdot L}(\boldsymbol{\Sigma})} \right]^{N_R \cdot N_T \cdot L} \quad (8.45)$$

② 当信道为莱斯型时, 即  $E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ , 构造矢量  $\mathbf{b} = \mathbf{U}^H \boldsymbol{\mu}$ ,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 。则有

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) &= \prod_{i=1}^{L \cdot N_T \cdot N_R} \frac{1}{1 + \gamma \lambda_i(\boldsymbol{\Sigma})} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma |b_i|^2}{1 + \gamma \lambda_i(\boldsymbol{\Sigma})}\right) \\ &\leq \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{L \cdot N_T \cdot N_R}(\boldsymbol{\Sigma})} \right]^{L \cdot N_T \cdot N_R} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma \|\mathbf{b}\|^2}{1 + \gamma \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Sigma})}\right) \\ &= \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{L \cdot N_T \cdot N_R}(\boldsymbol{\Sigma})} \right]^{L \cdot N_T \cdot N_R} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma \|\boldsymbol{\mu}\|^2}{1 + \gamma \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Sigma})}\right) \end{aligned} \quad (8.46)$$

(2) 矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  为缺秩的, 即  $r(\boldsymbol{\Sigma}) = \text{rank}(\boldsymbol{\Sigma}) < N_R \cdot N_T \cdot L$ , 成对差错概率有下面结论:

① 当信道为瑞利型时, 即

$$E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \quad \Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = \prod_{i=1}^{r(\boldsymbol{\Sigma})} \frac{1}{1 + \gamma \lambda_i(\boldsymbol{\Sigma})} \leq \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}(\boldsymbol{\Sigma})} \right]^{r(\boldsymbol{\Sigma})} \quad (8.47)$$

② 当信道为莱斯型时, 即  $E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ , 有

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) &= \prod_{i=1}^{r(\boldsymbol{\Sigma})} \frac{1}{1 + \gamma \lambda_i(\boldsymbol{\Sigma})} \cdot \prod_{b_i \neq 0} \exp\left(-\frac{\gamma |b_i|^2}{1 + \gamma \lambda_i(\boldsymbol{\Sigma})}\right) \\ &\leq \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}(\boldsymbol{\Sigma})} \right]^{r(\boldsymbol{\Sigma})} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma \|\mathbf{b}\|^2}{1 + \gamma \lambda_1(\boldsymbol{\Sigma})}\right) \\ &= \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}(\boldsymbol{\Sigma})} \right]^{r(\boldsymbol{\Sigma})} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma \|\boldsymbol{\mu}\|^2}{1 + \gamma \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Sigma})}\right) \end{aligned} \quad (8.48)$$

该定理的证明在附录 H 中。

由上面的表达式, 关于成对差错概率我们可以总结出其如下几个特点:

(1) 对于瑞利型信道, 从式 (8.45) 可以看出, 当  $r(\boldsymbol{\Sigma})$  达到其最大值  $r(\boldsymbol{\Sigma}) = \text{rank}(\boldsymbol{\Sigma}) = N_R \cdot N_T \cdot L$  时, 成对差错概率以  $N_R \cdot N_T \cdot L$  为指数减少, 即系统达到其最大空—时分集增益, 此处应该特别注意信道延迟指数  $L$  对成对差错概率减少的正向作用; 而信噪比参数和矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  的最小特征值表示了系统传输的编码增益。很显然, 当  $\mathbf{A} = \lambda_\sigma \mathbf{I}_{N_R \cdot N_T \cdot L}$  时信道是各向同性的, 即信道达到其最大弥散度, 这时由式 (8.41) 可见系统也达到其最佳性能。即使对于  $\boldsymbol{\Sigma}$  是缺秩的情形, 当  $\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Sigma}) = \lambda_1(\boldsymbol{\Sigma}) = \dots = \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}(\boldsymbol{\Sigma}) = \lambda_{\min}(\boldsymbol{\Sigma})$  时, 由式 (8.47) 所示系统的传输性能同样是“最佳”的。

(2) 对于莱斯型信道, 由式 (8.46) 和式 (8.48), 可以得到成对差错概率除了与有与

瑞利型信道相同的因子外，还有一个直达波影响因子，即成对差错概率除了与系统空时频分集因子  $r(\boldsymbol{\Sigma})$  有关外还与直达波增益因子  $\|\boldsymbol{\mu}\|^2$  有关。直达波影响因子  $\|\boldsymbol{\mu}\|^2$  对降低成对差错概率是有利的。而且这种影响总体只与  $\boldsymbol{\Sigma}$  谱特征和  $\boldsymbol{\mu}$  矢量的长度有关，同样当  $\boldsymbol{\Sigma}$  的各个特征值相等时，即当信道为各向同性时，信道的传输特性是最佳的，同时信道均值  $\boldsymbol{\mu}$  的长度在信号传输总功率满足定值约束且不损失  $\gamma$  的资源的情形下最长时，是最有利于信号传输的。

(3) 再由式 (8.46) 和式 (8.48) 我们可以看出，矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  的秩  $r(\boldsymbol{\Sigma})$  仍然是成对差错概率曲线的斜率，而指数衰减因子只是成对差错概率曲线的截距。因此，空时频分集指数仍是  $r(\boldsymbol{\Sigma})$ 。

(4) 综合 (2) 和 (3)， $\|\boldsymbol{\mu}\|$  与成对差错概率曲线的截距有关； $r(\boldsymbol{\Sigma})$  与成对差错概率曲线的斜率有关；当  $\|\boldsymbol{\mu}\|$  增大时信号功率将集中在均值附近，其弥散度下降， $r(\boldsymbol{\Sigma})$  减少。所以  $\|\boldsymbol{\mu}\|$  的增大是不利于信号传输的。

上面所有结果均是在  $\boldsymbol{A} = \gamma_0 \boldsymbol{I}_{N_T} \otimes \boldsymbol{I}_{N_R} \otimes \boldsymbol{I}_L$  的假设下得到的。这个假设相当于空一时一频编码矩阵从发送端到接收端其功率谱是均匀且各向同性的，或者说空一时一频码滤波器是全通的。然而通常由于各种条件限制，空一时一频码滤波器其响应特性一般是局部性的，即有关系式  $\Delta \boldsymbol{C}^* \boldsymbol{D}' \Delta \boldsymbol{C}^T \neq \boldsymbol{I}_{N_T} \cdot \delta(l)$ 。但矩阵  $\boldsymbol{A}$  为 Hermitian 矩阵总是成立的，所以运算  $\sqrt{\boldsymbol{A}}$  有意义。做变量代换，令  $\tilde{\boldsymbol{z}} = \sqrt{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{z}$ ，这样当  $\boldsymbol{z} : \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  时， $\tilde{\boldsymbol{z}} : \mathcal{CN}(\sqrt{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\mu}, \sqrt{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\Sigma}\sqrt{\boldsymbol{A}}^H)$ ，记为  $\tilde{\boldsymbol{z}} : \mathcal{CN}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})$ ，即  $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \sqrt{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\mu}$ ， $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \sqrt{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\Sigma}\sqrt{\boldsymbol{A}}^H$ ，且有  $\|\tilde{\boldsymbol{\mu}}\|^2 = \boldsymbol{\mu}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{\mu} = \|\boldsymbol{\mu}\|_{\boldsymbol{A}}^2$ ，其中  $\|\boldsymbol{\mu}\|_{\boldsymbol{A}}^2$  表示矢量  $\boldsymbol{\mu}$  在  $\boldsymbol{A}$  的投影空间内的长度，对  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$  可以类似理解。所以，成对差错概率可以表示为

$$\Pr(\boldsymbol{C} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{C}}) = E \left[ \exp(-\tilde{\boldsymbol{z}}^H \tilde{\boldsymbol{z}}) \right] = \frac{\exp(-\tilde{\boldsymbol{\mu}}^H (\boldsymbol{I} + \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}})}{\det(\boldsymbol{I} + \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})} \quad (8.49)$$

利用这个表达式再结合定理 8.1 的讨论结果，完全可以得到空一时一频编码矩阵  $\boldsymbol{A}$  对整个传输过程的影响。至于这个影响的具体度量将在下面详尽分析。

#### 8.5.4 空时频编码矩阵对成对差错概率的影响分析

从定理 8.1 我们看到，用式 (8.44) ~ 式 (8.48) 表述的成对差错概率的分析计算结果主要依赖于信道协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  的特征谱以及其均值  $\boldsymbol{\mu}$  的长度。由式 (8.49)，空时频编码矩阵  $\boldsymbol{A}$  对系统成对差错概率的影响在信道协方差矩阵和信道均值上都有体现，在此的任务就是要比较精细地分析出空时频编码矩阵  $\boldsymbol{A}$  对系统成对差错概率的影响程度与其特征谱的关系。为此先叙述如下惯性定理，对于一个共轭对称矩阵  $\boldsymbol{B}$ ，称矩阵  $\boldsymbol{B}$  的零特征值个数  $q$ 、非零特征值个数  $p$  构成的矢量  $(q, p)$  为矩阵  $\boldsymbol{B}$  的惯性。

**命题 8.5** (惯性定理) <sup>[33-34]</sup> 设  $\boldsymbol{B}$  与  $\boldsymbol{S}$  均为  $M \times M$  维的矩阵，即  $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{S} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ ，其中  $\boldsymbol{B}$  为共轭对称的， $\boldsymbol{S}$  为非奇异的，则矩阵  $\boldsymbol{B}$  与  $\boldsymbol{SBS}^H$  有相同的惯性。

所以当空时频编码矩阵  $\boldsymbol{A}$  为满秩时，矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  与  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$  有相同的秩，变化的仅是特征值的大小。因而，基于式 (8.49) 的讨论与定理 8.1 的结果对比不会涉及空时频分集特性的根本

改变。再叙述如下属于 Ostrowski 的命题。

**命题 8.6** (Ostrowski) <sup>[33-34]</sup> 设  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{S}$  均为  $M \times M$  维的复矩阵, 即  $\mathbf{B}, \mathbf{S} \in \mathbf{C}^{M \times M}$ ; 其中  $\mathbf{B}$  为共轭对称的,  $\mathbf{S}$  为非奇异的。假设将  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{S}\mathbf{S}^H$  的特征值均以递增次序排列, 即

$$\lambda_{\max}(\mathbf{B}) = \lambda_1(\mathbf{B}) \geq \lambda_2(\mathbf{B}) \geq \dots \geq \lambda_M(\mathbf{B}) = \lambda_{\min}(\mathbf{B}) \quad (\text{由假设应有 } \lambda_{\min}(\mathbf{B}) \geq 0)$$

$$\lambda_{\max}(\mathbf{S}\mathbf{S}^H) = \lambda_1(\mathbf{S}\mathbf{S}^H) \geq \lambda_2(\mathbf{S}\mathbf{S}^H) \geq \dots \geq \lambda_M(\mathbf{S}\mathbf{S}^H) = \lambda_{\min}(\mathbf{S}\mathbf{S}^H) \quad (\text{由假设应有 } \lambda_{\min}(\mathbf{S}\mathbf{S}^H) > 0)$$

则对于每个  $m \in \mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$ , 存在一个正实数  $\alpha_m$ , 使得下面关系式成立

$$\lambda_{\max}(\mathbf{S}\mathbf{S}^H) \geq \alpha_m \geq \lambda_{\min}(\mathbf{S}\mathbf{S}^H) > 0; \quad \lambda_m(\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^H) = \alpha_m \lambda_m(\mathbf{B}) \quad (8.50)$$

这两个命题是关于矩阵  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{S}\mathbf{S}^H$  的最大最小特征值的相对分布情况, 它们对于分析接收信号矢量的协方差矩阵的最大最小特征值的分布是有用的。例如, Ostrowski 命题可以确保下面定理成立。

**定理 8.2** 当频域空一时编码矩阵  $\mathbf{A}$  为满秩时, 存在一组正实数  $\{\alpha_m\}_{m \in \mathcal{M}}$ ,  $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, r(\mathbf{\Sigma})\}$ ,  $\forall \alpha_m$  ( $m \in \mathcal{M}$ ), 均有关系式  $\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \geq \alpha_m \geq \lambda_{\min}(\mathbf{A})$ ; 而对应成对差错概率表达式有下面两种情形:

(1) 矩阵  $\mathbf{\Sigma}$  为满秩的, 即  $r(\mathbf{\Sigma}) = \text{rank}(\mathbf{\Sigma}) = N_R \cdot N_T \cdot L$ , 这时有

① 当信道为瑞利型时, 即  $E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ , 有

$$\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = \prod_{i=1}^{N_R \cdot N_T \cdot L} \frac{1}{1 + \gamma \alpha_i \lambda_i(\mathbf{\Sigma})} \leq \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{\min}(\mathbf{A}) \lambda_{N_R \cdot N_T \cdot L}(\mathbf{\Sigma})} \right]^{N_R \cdot N_T \cdot L} \quad (8.51)$$

② 当信道为莱斯型时, 即  $E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ , 构造矢量  $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{U}^H \sqrt{\mathbf{A}} \boldsymbol{\mu}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}} \neq \mathbf{0}$ 。则有

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) &= \prod_{i=1}^{L \cdot N_T \cdot N_R} \frac{1}{1 + \gamma \alpha_i \lambda_i(\mathbf{\Sigma})} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma |\tilde{b}_i|^2}{1 + \gamma \alpha_i \lambda_i(\mathbf{\Sigma})}\right) \\ &\leq \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{\min}(\mathbf{A}) \lambda_{L \cdot N_T \cdot N_R}(\mathbf{\Sigma})} \right]^{L \cdot N_T \cdot N_R} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma \|\tilde{\mathbf{b}}\|^2}{1 + \gamma \lambda_{\max}(\mathbf{A}) \lambda_{\max}(\mathbf{\Sigma})}\right) \\ &= \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{\min}(\mathbf{A}) \lambda_{L \cdot N_T \cdot N_R}(\mathbf{\Sigma})} \right]^{L \cdot N_T \cdot N_R} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{A}}^2}{1 + \gamma \lambda_{\max}(\mathbf{A}) \lambda_{\max}(\mathbf{\Sigma})}\right) \end{aligned} \quad (8.52)$$

(2) 矩阵  $\mathbf{\Sigma}$  为缺秩的, 即  $r(\mathbf{\Sigma}) = \text{rank}(\mathbf{\Sigma}) < N_R \cdot N_T \cdot L$ , 关于成对差错概率有下面的结论

① 当信道为瑞利型时, 即

$$E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \quad \Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = \prod_{i=1}^{r(\mathbf{\Sigma})} \frac{1}{1 + \gamma \alpha_i \lambda_i(\mathbf{\Sigma})} \leq \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{\min}(\mathbf{A}) \lambda_{r(\mathbf{\Sigma})}(\mathbf{\Sigma})} \right]^{r(\mathbf{\Sigma})} \quad (8.53)$$

② 当信道为莱斯型时, 即  $E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ , 有

$$\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = \prod_{i=1}^{r(\mathbf{\Sigma})} \frac{1}{1 + \gamma \alpha_i \lambda_i(\mathbf{\Sigma})} \cdot \prod_{b_i \neq 0} \exp\left(-\frac{\gamma |\tilde{b}_i|^2}{1 + \gamma \alpha_i \lambda_i(\mathbf{\Sigma})}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{\min}(\mathbf{A}) \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}(\boldsymbol{\Sigma})} \right]^{r(\boldsymbol{\Sigma})} \cdot \exp \left( - \frac{\gamma \|\tilde{\mathbf{b}}\|^2}{1 + \gamma \lambda_{\max}(\mathbf{A}) \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Sigma})} \right) \\
&= \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{\min}(\mathbf{A}) \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}(\boldsymbol{\Sigma})} \right]^{r(\boldsymbol{\Sigma})} \cdot \exp \left( - \frac{\gamma \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{A}}^2}{1 + \gamma \lambda_{\max}(\mathbf{A}) \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Sigma})} \right) \quad (8.54)
\end{aligned}$$

比较式 (8.45) 与式 (8.51)、式 (8.46) 与式 (8.52)、式 (8.47) 与式 (8.53)、式 (8.48) 与式 (8.54)，我们可以看出，空一时一频编码矩阵  $\mathbf{A}$  在满秩的假设下对成对差错概率的影响具体体现在系统编码增益的改变。事实上信道协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  的秩  $r(\boldsymbol{\Sigma})$  表示了传输信道能够提供的独立传输管道的个数，而对应特征值的大小表示对应传输管道的衰减特性或传输增益。同样可得当  $\mathbf{A} = \lambda_{\sigma} \mathbf{I}_{N_{\text{R}} \cdot N_{\text{T}} \cdot L}$ 、 $\mathbf{A} = \gamma_0 \mathbf{I}_{N_{\text{R}} \cdot N_{\text{T}} \cdot L}$  时，即空时频信道达到其最大弥散度——全向均匀弥散，空一时一频编码矩阵  $\mathbf{A}$  满足全通、各向均匀特性，这时由式 (8.51) 和式 (8.52) 可见系统也达到其最佳性能。即使对于  $\boldsymbol{\Sigma}$  是缺秩的情形，当  $\lambda_{\min}(\mathbf{A}) = \lambda_{\max}(\mathbf{A})$ 、 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Sigma}) = \lambda_{\min}(\boldsymbol{\Sigma})$  时，由式 (8.53) 与式 (8.54) 可见系统在空一时一频编码矩阵  $\mathbf{A}$  满足全通、各向均匀特性；信道协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  在蜕化空间满足“全向”均匀弥散特性时的传输性能同样是“最佳”的。结合定理 8.1 和 8.2 可以得出，设计空一时一频编码矩阵  $\mathbf{A}$  满足全通、各向均匀特性是多输入多输出系统的空时编码与 OFDM 调制技术结合实现传输的第一目标要求。

### 8.5.5 接收数据矢量协方差分析

从上面的分析结果可以看出，系统传输性能主要影响因子是信道协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  的谱特性，而空一时一频编码矩阵  $\mathbf{A}$  对系统传输性能的影响也是通过其对信道投影变换进而改变协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  的谱特性来实现的。另外，这两种因素都包含在接收信号矢量  $\mathbf{Y}$  中，即信道与空一时一频编码矩阵  $\mathbf{A}$  对系统传输性能的影响都包含在  $\mathbf{Y}$  的协方差矩阵的谱特性中。下面通过分析  $\mathbf{Y}$  的协方差矩阵  $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}} = \mathcal{E}\{(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})^{\text{H}}\}$  来进一步理解空一时一频编码和信道特性对传输的影响。沿用上面的记号和讨论结果，接收信号矢量  $\mathbf{Y}$  可以写为如下形式

$$\mathbf{Y} = \sum_{l=0}^{L-1} [\mathbf{I}_{N_{\text{R}}} \otimes (\mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^{\text{T}})] \text{vec}(\mathbf{H}_l^{\text{T}}) = [\mathbf{I}_{N_{\text{R}}} \otimes (\Delta \mathbf{C}^{\text{T}}, \mathbf{D} \Delta \mathbf{C}^{\text{T}}, \dots, \mathbf{D}^{L-1} \Delta \mathbf{C}^{\text{T}})] \mathbf{z}$$

其均值为

$$\bar{\mathbf{Y}} = [\mathbf{I}_{N_{\text{R}}} \otimes (\Delta \mathbf{C}^{\text{T}}, \mathbf{D} \Delta \mathbf{C}^{\text{T}}, \dots, \mathbf{D}^{L-1} \Delta \mathbf{C}^{\text{T}})] \boldsymbol{\mu}$$

由于  $\mathbf{Y} \in \mathbf{C}^{N_{\text{R}} \cdot N \times 1}$ ，所以其协方差矩阵  $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}} \in \mathbf{C}^{N_{\text{R}} \cdot N \times N_{\text{R}} \cdot N}$ ，而  $(\Delta \mathbf{C}^{\text{T}}, \mathbf{D} \Delta \mathbf{C}^{\text{T}}, \dots, \mathbf{D}^{L-1} \Delta \mathbf{C}^{\text{T}}) \in \mathbf{C}^{N \times N_{\text{T}} \cdot L}$ 。

另外，由于 OFDM 的子信道数是一个可以自主的参数，所以一般都假设  $N > L \cdot N_{\text{T}}$ ，因此矩阵  $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}$  通常为缺秩的，将  $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}$  的秩记为  $r(\mathbf{C}_{\mathbf{Y}})$ 。由于均值参数  $\bar{\mathbf{Y}}$  改变的仅是  $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}$  的具体数值，而不会从根本上改变其结构或谱特性，故在分析  $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}$  的谱特性时略去它，即不失一般性，仅讨论  $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}} = E\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^{\text{H}}\}$  的情形。

由第 3 章的分析我们知道，式 (8.36) 的上界完全是由  $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}$  的非零特征值确定的。为进一步分析协方差矩阵  $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}$  的结构进而估计或计算  $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}$  的秩和非零特征值，以此得到空一时一频

编码格式  $\mathbf{C}$  的分集增益。由式 (8.37) 矩阵  $\mathbf{C}_Y$  有下面的表达式 (其证明在附录 G)，先由矢量  $\mathbf{Y}$  的表达式可得

$$\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} [\mathbf{I}_{N_R} \otimes (\mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T)] \text{vec}(\mathbf{H}_i^T) \text{vec}(\mathbf{H}_i^T)^H [\mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{*l})] \quad (8.55)$$

再由假设不同延迟时刻的信道是不相关的，且所有关联关系皆体现在从接收端观察信道，所以由式 (8.37) 得

$$\mathbf{C}_Y = E\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H\} = \sum_{l=0}^{L-1} (\mathbf{I}_{N_R} \otimes \mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,1}^{(l)} & \cdots & \mathbf{R}_{1,N_R}^{(l)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{R}_{N_R,1}^{(l)} & \cdots & \mathbf{R}_{N_R,N_R}^{(l)} \end{bmatrix} (\mathbf{I}_{N_R} \otimes \Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{*l}) \quad (8.56)$$

如前所述， $\Delta \mathbf{C} = [\Delta \mathbf{c}_0, \Delta \mathbf{c}_1, \dots, \Delta \mathbf{c}_{N-1}]$  为  $N_T \times N$  维码字差矩阵。令

$$\mathbf{R}_{t,r}^{(l)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,1}^{(l)} & \cdots & \mathbf{R}_{1,N_R}^{(l)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{R}_{N_R,1}^{(l)} & \cdots & \mathbf{R}_{N_R,N_R}^{(l)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{t,r}^{(l)} \in \mathbf{C}^{N_T N_R \times N_T N_R}$$

式中，分块矩阵  $\mathbf{R}_{m,n}^{(l)}$  表示接收天线系统的第  $m$  个接收阵元在  $l$  延迟时刻与第  $n$  个接收阵元形成的空域信道之间的关联系数，则  $\mathbf{R}_{t,r}^{(l)}$  表示发送端阵列天线与接收端阵列天线之间的总信道特性矩阵。对于给定的发送天线系统和对应的传输信道，如通过波束形成或其他技术使接收端天线阵元与发送端阵列天线之间形成的信道是互不相关的，即使  $\mathbf{R}_{t,r}^{(l)}$  中各个分块矩阵满足关系式， $\mathbf{R}_{m,n}^{(l)} = \mathbf{R}_{m,n}^{(l)} \odot \delta(m-n)$  即  $\mathbf{R}_{t,r}^{(l)}$  为一块对角矩阵。这样就有

$$\mathbf{C}_Y = E\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H\} = \sum_{l=0}^{L-1} (\mathbf{I}_{N_R} \otimes \mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T) \text{Bdiag}\{\mathbf{R}_{t,r}^{(l)}\} (\mathbf{I}_{N_R} \otimes \Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{*l}) \quad (8.57)$$

式中， $\text{Bdiag}\{\mathbf{R}_{t,r}^{(l)}\}$  表示矩阵  $\mathbf{R}_{t,r}^{(l)}$  为块对角阵，即  $\text{Bdiag}\{\mathbf{R}_{t,r}^{(l)}\} = \text{diag}\{\mathbf{R}_{1,1}^{(l)}, \mathbf{R}_{2,2}^{(l)}, \dots, \mathbf{R}_{N_R,N_R}^{(l)}\}$ 。进一步假设传输信道对于每一个接收阵元来说是等价的，即信道矩阵  $\mathbf{H}_l$  ( $l=0,1,\dots,L-1$ ) 的各个行矢量间互不相关而各行矢量自相关特性相同，即有  $E\{(\mathbf{h}_k^{(l)})^T (\mathbf{h}_\kappa^{(l)})^*\} = \mathbf{R}^{(l)} \odot \delta(k-\kappa)$ ，则  $N \cdot N_R$  维矢量  $\mathbf{Y}$  的协方差矩阵可以写作

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_Y &= E\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H\} = \sum_{l=0}^{L-1} (\mathbf{I}_{N_R} \otimes \mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T) \text{diag}\{\mathbf{R}^{(l)}, \mathbf{R}^{(l)}, \dots, \mathbf{R}^{(l)}\} (\mathbf{I}_{N_R} \otimes \Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{*l}) \\ &= \mathbf{I}_{N_R} \otimes \sum_{l=0}^{L-1} (\mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{(l)} \Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{*l}) \end{aligned} \quad (8.58)$$

对式 (8.58) 有一个直观的解释，对于接收阵列天线各个阵元，它们在当前时刻看到的是相同的“信号集群” ( $\mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{(l)} \Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{*l}$ )，因此信号自然获得了  $N_R$  阶的“(空域)接收分集”。因子  $\mathbf{R}^{(l)}$  是信道传输特性对所传输码字的“影响因子”。但是这种看似“很好”的情形其实隐含着很不利的因素，因为当传输特性  $\mathbf{R}^{(l)}$  蜕化时，因子 ( $\mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{(l)} \Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{*l}$ ) 必然是蜕化的，从而直接导致协方差矩阵  $\mathbf{C}_Y$  是蜕化的。而当  $\mathbf{R}^{(l)}$  非蜕化时，信号的发送分集特性则完全取决于编码矩阵  $\mathbf{C}$  的结构特征。因子 ( $\mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{(l)} \Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{*l}$ ) 中的对角变换矩阵  $\mathbf{D}^l$  表明频率域分集或称为“载波影响因子”。式 (8.58) 关于信道延迟参数长度的求和则表明对发送码字的相应“重传”次数，在重传过程中对角变换矩阵  $\mathbf{D}^l$  使信号通过时域叠加获

得频域分集。

基于这个认知，对式 (8.57) 也有一个直观的解释，这时对于接收阵列天线的各个阵元而言，它们在当前时刻看到的是不同的“信号集群”。例如，对于第  $m$  个接收阵元而言，它看到的信号集群为  $(\mathbf{D}'\Delta\mathbf{C}^T\mathbf{R}_{m,m}^{(l)}\Delta\mathbf{C}^*\mathbf{D}^{\prime l})$ ，这个信号集群与当前时刻发送阵列天线系统到第  $m$  个接收阵元形成的“管道特性” $\mathbf{R}_{m,m}^{(l)}$  有关，显然信号也获得了  $N_R$  阶的（空域）接收分集。由于管道特性  $\mathbf{R}_{m,m}^{(l)}$  ( $m=1,2,\dots,N_R$ ) 对于不同的  $m$  是不相同的，因而它们同时处于蜕化情形的概率是非常小的，因此协方差矩阵  $\mathbf{C}_Y$  为蜕化的可能性也是非常小的。

基于上面这样一些认知，对式 (8.56) 也有一个相应的直观解释。由于信道协方差矩阵  $\mathbf{R}_{i,r}^{(l)}$  是对发送阵列天线与接收阵列天线间形成的信道特性的描述，发送端与接收端阵列天线系统本是完全独立的，只是因为信号在它们之间的自然环境中传输形成的“管道”将两者链接在一起。因为纯粹从发送与接收来说，系统能够提供的最大空域分集阶数为  $N_R \cdot N_T$ ，矩阵  $\mathbf{R}_{i,r}^{(l)}$  包含了发送天线系统、接收天线系统和信号传输管道的所有特征。由于可以假设接收天线系统具有完整的信道信息，因而接收天线系统可以充分利用这些信息，使其处于最佳状态，即达到最大分集效应。但是也要充分考虑到信道传输特性往往是不以人们的意志为转移的，它具有天然或固有的特性。但是由于接收天线系统具有一定的自主或主动性，因而可以将发送端天线特性信息与接收端天线特性信息做到相应程度的分离。即假设信道协方差矩阵  $\mathbf{R}_{i,r}^{(l)}$  可以分解为  $\mathbf{R}_{i,r}^{(l)} = \mathbf{R}_r^{(l)} \otimes \mathbf{R}_i^{(l)}$ ， $\mathbf{R}_i^{(l)} \in \mathbf{C}^{N_T \times N_T}$ ， $\mathbf{R}_r^{(l)} \in \mathbf{C}^{N_R \times N_R}$ ，其中  $\mathbf{R}_r^{(l)}$  与  $\mathbf{R}_i^{(l)}$  分别为在接收端与发送端对信道特性的认知，则式 (8.56) 可以表示为

$$\mathbf{C}_Y = E\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H\} = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{R}_r^{(l)} \otimes (\mathbf{D}'\Delta\mathbf{C}^T\mathbf{R}_i^{(l)}\Delta\mathbf{C}^*\mathbf{D}^{\prime l}) \quad (8.59)$$

根据式 (8.59) 的结构，同样利用命题 8.3 (Ostrowski)，可以得到接收信号矢量的协方差矩阵  $\mathbf{C}_Y$  的特征值完全由  $\mathbf{R}_r^{(l)}$  和  $\mathbf{R}_i^{(l)}$  ( $l=0,1,\dots,L-1$ ) 的特征值确定。

矩阵  $(\mathbf{D}'\Delta\mathbf{C}^T\mathbf{R}_i^{(l)}\Delta\mathbf{C}^*\mathbf{D}^{\prime l})$  包含了发送端编码方案、发送端天线系统和发送端传输信道特性等全部信息因子；而  $\mathbf{R}_r^{(l)}$  包含了接收端天线系统和接收端信道特性等全部信息因子；式 (8.59) 表明这两种因素是可以相互分离的。另外，因为  $\mathbf{R}_r^{(l)}$ 、 $\mathbf{R}_i^{(l)}$  ( $l=0,1,\dots,L-1$ ) 均为半正定 Hermitian 矩阵，所以可以令  $\mathbf{R}_r^{(l)} = \mathbf{B}_l\mathbf{B}_l^H$ ， $\mathbf{R}_i^{(l)} = \mathbf{A}_l\mathbf{A}_l^H$ ，其中  $\mathbf{B}_l = \sqrt{\mathbf{R}_r^{(l)}}$ ， $\mathbf{A}_l = \sqrt{\mathbf{R}_i^{(l)}}$  分别是  $\mathbf{R}_r^{(l)}$  和  $\mathbf{R}_i^{(l)}$  的平方根矩阵。将这些矩阵记号代入协方差矩阵  $\mathbf{C}_Y$  中，得

$$\mathbf{C}_Y = E\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H\} = \sum_{l=0}^{L-1} [\mathbf{B}_l\mathbf{B}_l^H \otimes (\mathbf{D}'\Delta\mathbf{C}^T\mathbf{A}_l\mathbf{A}_l^H\Delta\mathbf{C}^*\mathbf{D}^{\prime l})] \quad (8.60)$$

令  $\mathbf{G}_{\Delta C} = [\mathbf{B}_0 \otimes \mathbf{D}^0\Delta\mathbf{C}^T\mathbf{A}_0, \dots, \mathbf{B}_{L-1} \otimes \mathbf{D}^{L-1}\Delta\mathbf{C}^T\mathbf{A}_{L-1}]$ ， $\mathbf{G}_{\Delta C} \in \mathbf{C}^{N_R N \times N_T N_R L}$ 。显然矩阵  $\mathbf{G}_{\Delta C}$  包含了空—时—频编码矩阵、发送端信道特性、正交频分复用调制变换、信道延迟传输特性和接收端信道特性等全部信息。我们称之为“多径延迟信道—正交调制变换—空—时—频”编码矩阵，或简称为“信道调制变换编码”矩阵。借助于矩阵  $\mathbf{G}_{\Delta C}$ ，式 (8.60) 可以写作

$$\mathbf{C}_Y = \mathbf{G}_{\Delta C} \mathbf{G}_{\Delta C}^H$$

这样随机矢量  $\mathbf{Y}$  的协方差矩阵  $\mathbf{C}_Y$  的秩和非零特征值完全取决于投影编码矩阵  $\mathbf{G}_{\Delta C}$  的秩和非零特征值。信道调制变换编码矩阵  $\mathbf{G}_{\Delta C}$  的秩满足关系  $\max r(\mathbf{G}_{\Delta C}) = \min\{N_R N, N_R N_T L\}$  (其中  $r(\cdot)$  表示秩函数), 这个参数揭示了“信道调制变换编码”矩阵的空—时—频分集特性。

若接收阵列天线各阵元是相互独立的, 且每一个接收天线阵元与发送阵列天线及其之间的环境特征是完全一致的(接收阵列天线外部环境是均匀分布、各向同性的), 则  $\mathbf{R}_r^{(l)} = \alpha \mathbf{I}_{N_R}$ , 式(8.59)变为式(8.58)。若进一步对于发送阵列天线采用相同的假设, 即  $\mathbf{R}_t^{(l)} = \mathbf{I}_{N_T}$ , 则有

$$\mathbf{C}_Y = \alpha \mathbf{I}_{N_R} \otimes \sum_{l=0}^{L-1} (\mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T \Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{*l}) \quad (8.61)$$

这时从发送端到接收端的介质是各向同性的, 传输特性完全取决于空时频编码矩阵  $\mathbf{C}$  的空时频分集和编码增益特性以及与正交频分复用调制  $\mathbf{D}^l$  的调制特性。为此定义空时频编码和正交频分复用调制矩阵  $\mathcal{F}_{\Delta C}$ , 即

$$\mathcal{F}_{\Delta C} = [\mathbf{D}^0 \Delta \mathbf{C}^T, \mathbf{D}^1 \Delta \mathbf{C}^T, \dots, \mathbf{D}^{L-1} \Delta \mathbf{C}^T], \quad \mathcal{F}_{\Delta C} \in \mathbf{C}^{N \times N_T L}$$

对应  $\mathcal{F}_{\Delta C}$  的相关矩阵为  $\mathbf{C}_{\mathcal{F}_{\Delta C}} = \sum_{l=0}^{L-1} (\mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T \Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{*l})$ ,  $\mathbf{C}_{\mathcal{F}_{\Delta C}} \in \mathbf{C}^{N \times N}$ , 显然有  $\mathbf{C}_Y = \alpha \mathbf{I}_{N_R} \otimes \mathbf{C}_{\mathcal{F}_{\Delta C}}$  [59]。这时随机矢量  $\mathbf{Y}$  的协方差矩阵  $\mathbf{C}_Y$  的秩和非零特征值完全取决于空时频编码及正交频分复用调制矩阵  $\mathcal{F}_{\Delta C}$  的秩和它的非零特征值。这种情形对于实现空时频编码传输也是最优的, 因为一切影响传输的特性都包含在空时频编码矩阵  $\mathbf{C}$  中, 因而一切影响传输的因素都是“可控”的。比较式(8.61)与定理 8.1 所得结论, 前者将所有可变因素归结于空时频编码矩阵  $\mathbf{C}$ , 而后者将其归结于空时频信道矢量  $\mathbf{z}$ 。

## 8.6 空—时—频分集增益的实现

基于前面的认知我们知道, 要使所发送的信号获得空—时—频分集, 必须通过合适的空、时、频编码, 获得同一符号在“空间”、“时间”、“频率”相互独立的模板。第 4 章、第 5 章所述的方法都可以获得同一符号在“空间”和“时间”上相互独立的模板, 因而能实现信号的空—时分集。若将第 4 章、第 5 章所述的编码方法得到的编码序列直接调制到 OFDM 子载波上, 则得到正交频分复用调制的空—时分集, 这样就能直接获得空—时分集增益和正交频分复用调制增益, 这就是空—时 OFDM 编码。也可以借鉴时域抽取 FFT 算法与频域抽取 FFT 算法的原理, 将第 4 章、第 5 章所述的空时编码的方法转化成空—频编码, 再将空—频编码序列调制到 OFDM 子载波上, 则得到正交频分复用调制的空—频分集, 这样就能直接获得空—频分集增益和正交频分复用调制增益, 这就是空—频 OFDM 编码。要同时获得空—时—频分集增益和正交频分复用调制增益, 必须实现同一符号在“空域”、“时域”、“频域”三维空间内相互独立的模板。再将具有这种特性的符号序列调制到 OFDM 子载波上, 以期同时获得空—时—频编码增益与正交频分复用调制增益, 这就是空—时—频 OFDM 编码。空—时编码、空—频编码、空—时—频编码原理可以用图 8.26 来解释。在图 8.26 中,  $s_0$  是某个从星座图调制器输出的符号,  $f(s_0)$ 、 $g(s_0)$  是包括符号  $s_0$





个长度为  $T$  的符号流  $c_1[k]$  和  $c_2[k]$ 。我们不用通常的矩阵乘法，而是采用频率选择性信道下的 FIR 滤波器表示来简化这种符号流。用  $z^{-1}$  表示延迟算子，则来自第  $m$  个发射天线阵元到接收天线阵元的信道脉冲响应可以写作

$$H_m(z^{-1}) = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{h}_m[l] z^{-l} \quad (8.62)$$

式中， $\mathbf{h}_m[l]$  表示这个矢量的第  $m$  个元素。

Lindskog-Paulraj 传输方案的工作原理为：在  $T$  个符号持续时间的第一个节点，数据流  $x_1(k)$  和  $x_2(k)$  分别在发射天线的第一和第二个阵元发射。相应时刻的接收信号  $y_1(k)$  可以表示为

$$y_1(k) = \sqrt{\frac{E_s}{2}} [H_1(W^{-k}) H_2(W^{-k})] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + n_1(k) \quad (8.63)$$

紧接着是  $L$  个符号持续时间的保护间隔，以避免与第二个时间节点传输的符号产生码间干扰。在  $T$  个符号持续时间的第二个节点，发送数据流  $x_1(k)$  和  $x_2(k)$  时间反演和共轭变换形式，即数据流  $x_1^*(N-k+1)$  和  $-x_2^*(N-k+1)$  分别在发射天线的第一和第二个阵元发射（注意此方案与经典 Alamouti 传输方案的相似性）。相应时刻的接收信号  $y_2(k)$  可以表示为

$$y_2(k) = \sqrt{\frac{E_s}{2}} [H_1(W^{-k}) H_2(W^{-k})] \begin{bmatrix} -x_2^*(N-k+1) \\ x_1^*(N-k+1) \end{bmatrix} + n_2(k) \quad (8.64)$$

结合式 (8.63) 和式 (8.64)，我们这样来理解 Lindskog-Paulraj 空—频编码传输方案，从频域看在第一个时间节点，第一个天线阵元和第二个天线阵元分别发送数据流

$$\mathbf{X}_1 = [x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(N)] \text{ 和 } \mathbf{X}_2 = [x_2(1), x_2(2), \dots, x_2(N)] \quad (8.65a)$$

在第二个时间节点，第一个天线阵元和第二个天线阵元分别发送数据流

$$-\tilde{\mathbf{X}}_2^* = [-x_2^*(N), -x_2^*(N-1), \dots, -x_2^*(2), -x_2^*(1)] \text{ 和 } \tilde{\mathbf{X}}_1^* = [x_1^*(N), x_1^*(N-1), \dots, x_1^*(2), x_1^*(1)] \quad (8.65b)$$

将 Lindskog-Paulraj 空—频编码传输方案写成 Alamouti 传输方式为

$$\mathcal{G}_{2,LP}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(k) & \mathbf{X}_2(k) \\ -\tilde{\mathbf{X}}_2^*(k) & \tilde{\mathbf{X}}_1^*(k) \end{bmatrix}$$

对矩阵  $\mathcal{G}_{2,LP}(k)$  来说，根据 Alamouti 传输方案其具有空—时分集效应；而矩阵  $\mathcal{G}_{2,LP}(k)$  的  $k$  方向为频率轴，从式 (8.65a) 和式 (8.65b) 可见，如对式 (8.65b) 数据点  $x_1(k)$ ，它历经不同载波频率传输，由于这“唯一”模板或归于不同时间节点或归于不同载波频率且只能归于其一，当下归于频率因而具有频率分集 Lindskog-Paulraj 传输方案为“空—频编码”。所以，Lindskog-Paulraj 空—频编码传输方案具有空—频分集效应。

对数据流  $y_2(k)$  做时间反演和共轭变换可得

$$y_2^*(N-k+1) = \sqrt{\frac{E_s}{2}} [H_2^*(W^{-(N-k+1)}) - H_1^*(W^{-(N-k+1)})] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + n_2(k) \quad (8.66)$$

由于对加性噪声  $n_2[k]$  的时间反演和共轭变换不改变其统计特性，故仍表示为  $n_2(k)$ 。由式 (8.65a)、式 (8.65b) 和式 (8.66) 可见，对数据流  $y_2(k)$  的时间反演和共轭变换转

化为对信道参数的时间反演和共轭变换。我们知道， $H_i^*(W^{-k})$  和  $H_i^*(W^{-(T-k+1)})$  分别对应于信道在不同频率点的采样，若  $k$  与  $T-k+1$  差距越大，则  $H_i^*(W^{-k})$  和  $H_i^*(W^{-(T-k+1)})$  的相关性越小，以此保证对同一符号传输的相互独立性。

结合  $y_1(k)$  和  $y_2^*(T-k+1)$ ，可以得到

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2^*(N-k+1) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{E_s}{2}} \begin{bmatrix} H_1(W^{-k}) & H_2(W^{-k}) \\ H_2^*(W^{-(N-k+1)}) & -H_1^*(W^{-(T-k+1)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \end{bmatrix} \quad (8.67)$$

将式 (8.67) 中的信道参数表示为

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \begin{bmatrix} H_1(W^{-k}) & H_2(W^{-k}) \\ H_2^*(W^{-(N-k+1)}) & -H_1^*(W^{-(T-k+1)}) \end{bmatrix}$$

称其为信道参数匹配滤波器矩阵。则容易验证矩阵  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  为非正交的，即满足关系式

$$\mathbf{H}_{\text{eff}}^H \mathbf{H}_{\text{eff}} = \begin{bmatrix} a^2 & c \\ c^* & b^2 \end{bmatrix}$$

其中参数

$$\begin{aligned} a^2 &= |H_1(W^{-k})|^2 + |H_2(W^{-(N-k+1)})|^2 \\ b^2 &= |H_1(W^{-(N-k+1)})|^2 + |H_2(W^{-k})|^2 \\ c &= H_1^*(W^{-k})H_2(W^{-k}) - H_1^*(W^{-(N-k+1)})H_2(W^{-(N-k+1)}) \end{aligned}$$

经匹配于信道参数的滤波器滤波得到的观测数据为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \end{bmatrix} &= \mathbf{H}_{\text{eff}}^H \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2^*(N-k+1) \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{E_s}{2}} \mathbf{H}_{\text{eff}}^H \begin{bmatrix} H_1(W^{-k}) & H_2(W^{-k}) \\ H_2^*(W^{-(N-k+1)}) & -H_1^*(W^{-(T-k+1)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \mathbf{H}_{\text{eff}}^H \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{E_s}{2}} \begin{bmatrix} a^2 & c \\ c^* & b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \mathbf{H}_{\text{eff}}^H \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.68)$$

这样从式 (8.68) 最终得到的是两个符号流的最大似然独立解码。其性能曲线如图 8.27 所示。在计算机模拟中采用频率选择性 cost207 信道典型城市区域 (Typical Urban) 模型 (见第 1 章关于 cost207 信道模型的讨论)。其中多径数有 6 和 12 两种情形，OFDM 调制子载波数有 16 和 256，对应图 8.27 有四条曲线。从图中可以明显地看出 Lindskog-Paulraj 空-频传输方案的性能随信道的多径数的增加性能更好，也随着 OFDM 调制子载波数的增加而明显地趋好。

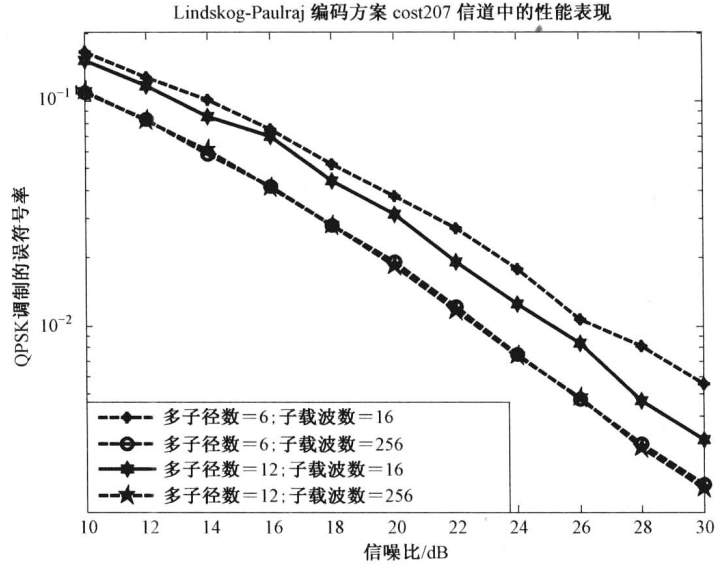


图 8.27 Lindskog-Paulraj 传输方案在 cost207 信道的性能

## 2. Park-Kim-Baik 空一时一频传输方案<sup>[56]</sup>

Sang-Soon Park、Han-Kyong Kim 和 Heung-Ki Baik 在参考文献[56]中提出了一种“简单的”空一时一频传输方案，这个方案具有最大频率分集增益。下面对该空一时一频编码方案予以讨论阐述。

假设将输入的比特流调制为符号  $x(m)$ ，即  $x(m)$  是以  $T_s$  为符号周期的串行数据符号。令  $\mathbf{x}_k(n) = \mathbf{x}(nN+k)$  ( $k=0,1,\dots,N-1$ )。经串并变换得到数据矢量  $\mathbf{X}(n) = [x_0(n), x_1(n), \dots, x_{N-1}(n)]^T$ 。若将矢量  $\mathbf{X}$  做如下实虚部分解  $\mathbf{X} = \mathbf{A} + \mathbf{jB}$ ，其中  $\mathbf{A} = \text{Re}\{\mathbf{X}\}$ ， $\mathbf{B} = \text{Im}\{\mathbf{X}\}$ 。定义矩阵  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  如下：

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

构造矢量

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_M &= \frac{1}{\sqrt{2^M}} \left( \underbrace{\Phi_1 \otimes \dots \otimes \Phi_1}_M \otimes \mathbf{I}_{N/K} \right) \mathbf{A} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{2^M}} \left( \underbrace{\Phi_2 \otimes \dots \otimes \Phi_2}_M \otimes \mathbf{I}_{N/K} \right) \mathbf{B} \\ &= \mathbf{C}_M \mathbf{A} + \mathbf{jD}_M \mathbf{B} \end{aligned} \quad (8.69)$$

当  $K=2^M=N$  时，我们称之为“满空一时一频（交织）编码”。这时有

$$\mathbf{C}_M = \frac{1}{\sqrt{2^M}} \left( \underbrace{\Phi_1 \otimes \dots \otimes \Phi_1}_M \right); \quad \mathbf{D}_M = \frac{1}{\sqrt{2^M}} \left( \underbrace{\Phi_2 \otimes \dots \otimes \Phi_2}_M \right)$$

容易证明在通常情形下矩阵  $\mathbf{C}_M$  和  $\mathbf{D}_M$  是自正交的，所以称式 (8.69) 为正交预编码。事实上， $\mathbf{E}_M$  是对星座符号矢量  $\mathbf{X}$  的正交预编码和交织变换编码。

将  $\mathbf{E}_M$  的元素调制到子载波数为  $N$  的 OFDM 波形上，由于  $\mathbf{E}_M$  的每个元素包含了矢量  $\mathbf{X}$  的“所有元素”，即矢量  $\mathbf{X}$  的每一个元素历经了 OFDM 的所有的子载波。这样就实现了频率分集。最后数据矢量  $\mathbf{E}_M$  再经空一时编码（如 Alamouti 编码）发送，从而实现了空一时一频编码。同时，最终得到的是两个符号流的最大似然独立解码。

由式 (8.69)，Park-Kim-Baik 编码的关键是通过矩阵  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  构造正交矩阵  $\mathbf{C}_M$  和  $\mathbf{D}_M$ ，再实现空一时一频编码。事实上，也可以构造不同的 Hardamard 来代替正交矩阵  $\mathbf{C}_M$  和  $\mathbf{D}_M$  实现同样的效果。

假设已经生成长度为  $N$  的两个  $\mathbf{E}$  序列，将它们调制到子载波数为  $N$  的 OFDM 波形上，并令第  $k$  个子载波上发送的信号为

$$\mathbf{G}_{2,\text{PKB}}[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{1,N}[k] & \mathbf{E}_{2,N}[k] \\ -\mathbf{E}_{2,N}^*[k] & \mathbf{E}_{1,N}^*[k] \end{bmatrix} \quad (8.70)$$

将式 (8.70) 所示的 Alamouti 传输方案通过天线阵元数为 2 的发送天线发送，仍然设接收天线阵元为 1，则接收信号分别为

$$\left. \begin{aligned} y_1[k] &= \sqrt{\frac{E_s}{2}} [H_1(W^{-k}) H_2(W^{-k})] \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{1,N}[k] \\ \mathbf{E}_{2,N}[k] \end{bmatrix} + n_1[k] \\ y_2[k] &= \sqrt{\frac{E_s}{2}} [H_1(W^{-k}) H_2(W^{-k})] \begin{bmatrix} -\mathbf{E}_{2,N}^*[k] \\ \mathbf{E}_{1,N}^*[k] \end{bmatrix} + n_2[k] \end{aligned} \right\} \quad (8.71)$$

将联立方程 (8.71) 写成矢量形式

$$\mathbf{y}[k] = \begin{bmatrix} y_1[k] \\ y_2^*[k] \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{E_s}{2}} \begin{bmatrix} H_1(W^{-k}) & H_2(W^{-k}) \\ H_2^*(W^{-k}) & -H_1^*(W^{-k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{1,N}[k] \\ \mathbf{E}_{2,N}[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1[k] \\ n_2^*[k] \end{bmatrix}$$

式中，信道系数矩阵为正交阵，令

$$\mathbf{H}[k] = \begin{bmatrix} H_1(W^{-k}) & H_2(W^{-k}) \\ H_2^*(W^{-k}) & -H_1^*(W^{-k}) \end{bmatrix}$$

则有结果

$$\hat{\mathbf{E}}[k] = \mathbf{H}^H[k] \mathbf{y}[k] \quad (8.72)$$

这样就可以得到符号  $\mathbf{X}$  的估计值  $\hat{\mathbf{X}}$ ，即

$$\hat{\mathbf{X}} = \text{Re}\{\hat{\mathbf{E}}\} \cdot \mathbf{C}_N + \text{j} \cdot \text{Im}\{\hat{\mathbf{E}}\} \cdot \mathbf{D}_N \quad (8.73)$$

从式 (8.70) ~ 式 (8.73)，可以这样来理解 Park-Kim-Baik 空一时一频传输方案，设有两个频域序列：

$$\mathbf{X}_1 = [x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(N)] \text{ 和 } \mathbf{X}_2 = [x_2(1), x_2(2), \dots, x_2(N)]$$

经式 (8.69) 的变换，得到  $\mathbf{E}_1[k]$  和  $\mathbf{E}_2[k]$ ，由它们构造 Alamouti 传输矩阵 (8.70)，经信道传输再经信道匹配滤波得到判决统计矢量式 (8.72)，经反“空一时一频（交织）编码”变换 (8.73)，得  $\mathbf{X}_1$  和  $\mathbf{X}_2$ 。

Park-Kim-Baik 空一时一频传输方案的性能如图 8.28 所示。其模拟条件与 Lindskog-Paulraj 传输方案的性能曲线图 8.27 一致。

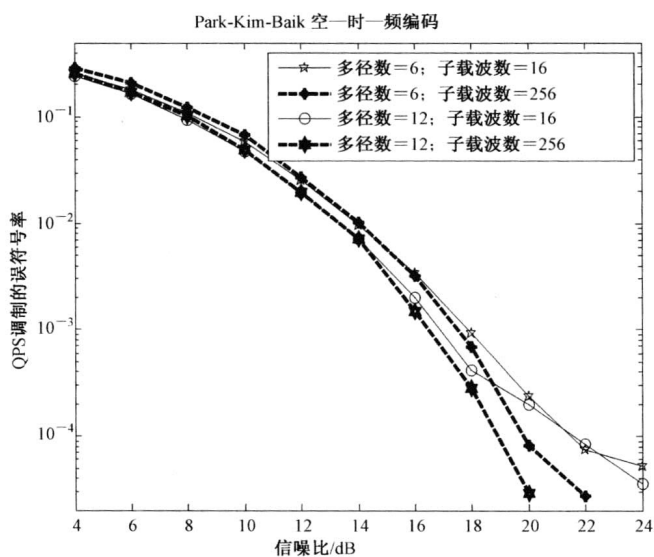


图 8.28 Park-Kim-Baik 传输方案在 cost207 信道的性能

比较图 8.27 与图 8.28 可以看出, Park-Kim-Baik 空-时-频传输方案的性能曲线没有像 Lindskog-Paulraj 传输方案那样随着子载波数的增加两组曲线明显地分开。说明 Lindskog-Paulraj 传输方案中对传输数据流的时间反演和共轭变换的作用是很好的。

图 8.29 仿真的是频率选择性 cost207 信道典型城市区域模型其多径数为 12, OFDM 调制子载波数为 256, 关于式 (8.69) 对  $k=16$  和  $k=256$  时 Park-Kim-Baik 空-时-频传输方案的性能曲线, 明显地“满空-时-频(交织)编码”时性能是最佳的, 即 Park-Kim-Baik 空-时-频传输方案以式 (8.69) 的变换的复杂度换来性能的改善。从图 8.29 可以看出, 当在相对较高信噪比时, 这个收益是相当地显著, 如约在信噪比为 10 dB, 能获得约 6 dB 的收益。

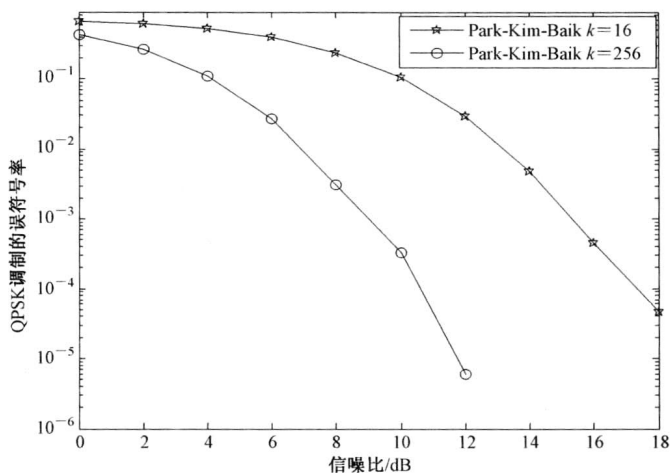


图 8.29 Park-Kim-Baik 传输方案关于不同  $k$  参数的性能

### 3. 一个修正的 Lee-Williams 空一时一频传输方案<sup>[36,41]</sup>

Lee-Williams 在参考文献[36]和[41]分别讨论了 OFDM 系统中的空一时编码方案和空一频编码方案，我们将其思想要点结合，提出如下所谓的 OFDM 系统中的空一时一频编码方案。我们称之为“修正的 Lee-Williams 空一时一频传输方案”，或者是一个结合 Lee-Williams 空一时 OFDM 传输方案<sup>[36]</sup>与 Lee-Williams 空一频 OFDM 传输方案<sup>[41]</sup>而构成的一个空一时一频 OFDM 传输方案。

用符号序列  $\mathbf{x}_k(n)$  ( $k=0,1,\dots,N-1$ ) 构造矢量  $\mathbf{X}_1(n)$  和  $\mathbf{X}_2(n)$  如下

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_1(n) &= [\mathbf{x}_0(n), -\mathbf{x}_1^*(n), \dots, \mathbf{x}_{N-2}(n), -\mathbf{x}_{N-1}^*(n)]^T \\ \mathbf{X}_2(n) &= [\mathbf{x}_1(n), \mathbf{x}_0^*(n), \dots, \mathbf{x}_{N-1}(n), \mathbf{x}_{N-2}^*(n)]^T \end{aligned} \right\} \quad (8.74)$$

并将它们调制到子载波数为  $N$  的 OFDM 波形上。设给定时隙数为 2，发射天线阵元数为 2。仿照式 (8.70) 构造 Alamouti 编码矩阵

$$\mathcal{G}_{2,1W}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(n) & \mathbf{X}_2(n) \\ -\mathbf{X}_2^*(n) & \mathbf{X}_1^*(n) \end{bmatrix} \quad (8.75)$$

由式 (8.74) 关于  $\mathbf{X}_1(n)$  和  $\mathbf{X}_2(n)$  的定义可得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_1^*(n) &= [\mathbf{x}_0^*(n), -\mathbf{x}_1(n), \dots, \mathbf{x}_{N-2}^*(n), -\mathbf{x}_{N-1}(n)]^T \\ -\mathbf{X}_2^*(n) &= [-\mathbf{x}_1^*(n), -\mathbf{x}_0(n), \dots, -\mathbf{x}_{N-1}^*(n), -\mathbf{x}_{N-2}(n)]^T \end{aligned} \right\} \quad (8.76)$$

将式 (8.74) 和式 (8.76) 所表示的符号序列调制到 OFDM 各个子载波上再加上循环前缀经指定天线阵元发送到无线信道。为了方便地将这个传输方案推广到 4 个甚至具有更多天线阵元的发射天线情形，这里采用下面的记号和表达方式。

假设第  $2k$  和第  $2k+1$  ( $k=0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$ ) 个子载波上的空一时一频信号<sup>[36,41]</sup>为

$$\mathbf{S}_{1,2k} = \begin{bmatrix} s_{2k} \\ -s_{2k+1}^* \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}_{1,2k+1} = \begin{bmatrix} s_{2k+1} \\ s_{2k}^* \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}_{2,2k} = \begin{bmatrix} -s_{2k+1}^* \\ -s_{2k} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}_{2,2k+1} = \begin{bmatrix} s_{2k}^* \\ -s_{2k+1} \end{bmatrix} \quad (8.77)$$

设对应信道参数为

$$\mathcal{H}_{i,2k} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{i,2k} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{i,2k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_i(e^{j2\pi(2k)/N}) & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_i(e^{j2\pi(2k+1)/N}) \end{bmatrix} \quad (i=1,2) \quad (8.78)$$

则接收信号矢量为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{1,2k} &= \mathcal{H}_{1,2k} \mathbf{S}_{1,2k} + \mathcal{H}_{2,2k} \mathbf{S}_{2,2k} + \mathbf{W}_{1,2k} \\ \mathbf{r}_{2,2k} &= \mathcal{H}_{1,k} \mathbf{S}_{1,2k+1} + \mathcal{H}_{2,2k} \mathbf{S}_{2,2k+1} + \mathbf{W}_{2,2k} \end{aligned} \right\} \quad (8.79)$$

将信号分量和信道参数分量代入其中可以得到接收信号矢量表达式为

$$\mathbf{r}_{1,2k} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(e^{j2\pi(2k)/N})s_{2k} - \mathbf{H}_2(e^{j2\pi(2k)/N})s_{2k+1}^* \\ -\mathbf{H}_2(e^{j2\pi(2k+1)/N})s_{2k} - \mathbf{H}_1(e^{j2\pi(2k+1)/N})s_{2k+1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{1,1} \\ \mathbf{W}_{1,2} \end{bmatrix} \quad (8.80)$$

而  $\mathbf{r}_{2,2k}$  也有类似表达式。将式 (8.80) 中的  $\mathbf{r}_{1,k}$  与  $\mathbf{r}_{2,k}$  的分量交换并重新组合得

$$\tilde{\mathbf{r}}_{1,2k} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(e^{j2\pi(2k)/N}) & -\mathbf{H}_2(e^{j2\pi(2k)/N}) \\ \mathbf{H}_2^*(e^{j2\pi(2k)/N}) & \mathbf{H}_1^*(e^{j2\pi(2k)/N}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{2k} \\ s_{2k+1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{1,1} \\ \mathbf{W}_{2,1}^* \end{bmatrix} \quad (8.81)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_{2,2k} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_2(e^{j2\pi(2k+1)/N}) & -\mathbf{H}_1(e^{j2\pi(2k+1)/N}) \\ \mathbf{H}_1^*(e^{j2\pi(2k+1)/N}) & -\mathbf{H}_2^*(e^{j2\pi(2k+1)/N}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{2k} \\ s_{2k+1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{1,2} \\ \mathbf{W}_{2,2}^* \end{bmatrix} \quad (8.82)$$

这样经过交换并重新组合得到式 (8.81) 的  $\tilde{\mathbf{r}}_{1,2k}$  和式 (8.82) 的  $\tilde{\mathbf{r}}_{2,2k}$ ，其最大收益是对应的信道参数矩阵为正交的。这样就很容易直接得到  $s_{2k}$  的最大似然估计值，再通过共轭变换就可以得到  $s_{2k+1}$  的最大似然估计值。

图 8.30 给出了修正的 Lee-Williams 空一时一频传输方案的误符号率模拟曲线。其模拟条件与 Lindskog-Paulraj 传输方案的性能曲线图 8.27 一致，只是调制符号星座图采用了 16QAM。从图 8.30 可以看出，修正的 Lee-Williams 空一时一频传输方案对信道的多径数和 OFDM 的子载波数均不敏感，图 8.30 中的四条曲线粘合在一起。

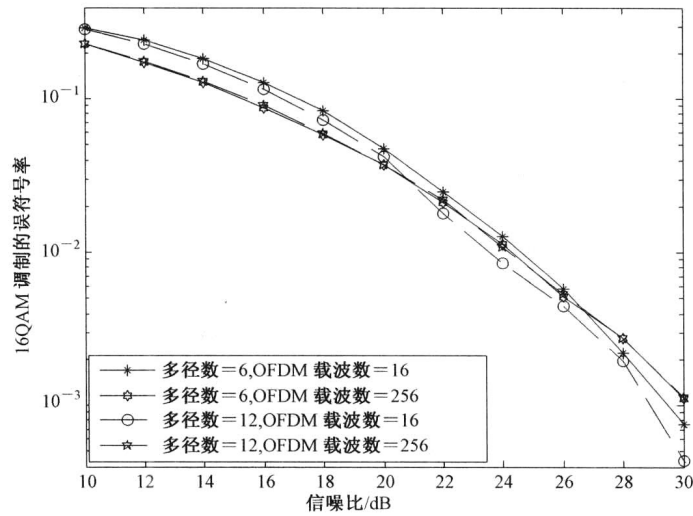


图 8.30 Lee-Williams 空时频传输方案的性能

另一个值得注意的问题是，观察与修正的 Lee-Williams 空一时一频传输方案有关的式 (8.74)、与 Lindskog-Paulraj 空一时一频编码传输方案有关的式 (8.65)、与 Park-Kim-Baik 空一时一频传输方案有关的式 (8.70)，我们可以看出，对于相同的 OFDM 调制子载波数  $N$ ，Lindskog-Paulraj 空一时一频编码传输方案与 Park-Kim-Baik 空一时一频传输方案有相同的符号速率，而修正的 Lee-Williams 空一时一频传输方案的传输符号速率只是它们的一半。因此，前面两个算法在计算机模拟中调制符号星座图为 QPSK，而修正的 Lee-Williams 空一时一频传输方案的调制符号星座图采用了 16QAM。在前面所有其他假设不变的前提下，这三个传输方案的频谱有效性是一致的。因而相互比较是可行的。

#### 4. 将修正的 Lee-Williams 空一时一频传输方案推广到 4 个发送天线阵元的情形<sup>[57]</sup>

设空一时一频编码信号矢量具有特征  $\mathbf{S}_{(\text{time,space,frequency})}$ 。对于一个具有 4 个发送天线阵元的系统，对应的空一时一频编码信号矢量为



$$\mathbf{S}_{(\text{time,space})} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{(\text{time,space},1)} \\ \mathbf{S}_{(\text{time,space},2)} \\ \dots \\ \mathbf{S}_{(\text{time,space},N/4)} \end{bmatrix} \quad (8.83)$$

设给定时隙数为 2，发射天线阵元数为 4，即有空一时信号矢量  $\mathbf{S}_{(1,1)}$ ， $\mathbf{S}_{(2,1)}$ ； $\mathbf{S}_{(1,2)}$ ， $\mathbf{S}_{(2,2)}$ ； $\mathbf{S}_{(1,3)}$ ， $\mathbf{S}_{(2,3)}$ ； $\mathbf{S}_{(1,4)}$ ， $\mathbf{S}_{(2,4)}$ 。它们都具有式 (8.65) 那样的结构。在频域观察可得其  $\mathbf{S}_{(\text{time,space})}$  的结构为（在此处采用的是完全不同于参考文献[57]的编码方案和解码算法）

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{(1,1,k)} &= \begin{bmatrix} +S_{4k} \\ -S_{4k+1}^* \\ +S_{4k+1} \\ -S_{4k}^* \end{bmatrix}, & \mathbf{S}_{(1,2,k)} &= \begin{bmatrix} +S_{4k+1} \\ +S_{4k}^* \\ +S_{4k} \\ +S_{4k+1}^* \end{bmatrix}, & \mathbf{S}_{(1,3,k)} &= \begin{bmatrix} +S_{4k+2} \\ -S_{4k+3}^* \\ S_{4k+3} \\ -S_{4k+2}^* \end{bmatrix}, & \mathbf{S}_{(1,4,k)} &= \begin{bmatrix} +S_{4k+3} \\ +S_{4k+2}^* \\ +S_{4k+2} \\ +S_{4k+3}^* \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}_{(2,1,k)} &= \begin{bmatrix} -S_{4k+2}^* \\ +S_{4k+3} \\ -S_{4k+3}^* \\ +S_{4k+2} \end{bmatrix}, & \mathbf{S}_{(2,2,k)} &= \begin{bmatrix} -S_{4k+3}^* \\ -S_{4k+2} \\ S_{4k+3}^* \\ S_{4k+3} \end{bmatrix}, & \mathbf{S}_{(2,3,k)} &= \begin{bmatrix} +S_{4k}^* \\ -S_{4k+1} \\ +S_{4k+1}^* \\ -S_{4k} \end{bmatrix}, & \mathbf{S}_{(2,4,k)} &= \begin{bmatrix} +S_{4k+1}^* \\ +S_{4k} \\ +S_{4k}^* \\ +S_{4k+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.84)$$

即空时频编码矩阵为

$$\mathbf{G}_4 = \begin{bmatrix} +S_{4k} & +S_{4k+1} & +S_{4k+2} & +S_{4k+3} \\ -S_{4k+1}^* & +S_{4k}^* & -S_{4k+3}^* & +S_{4k+2}^* \\ +S_{4k+1} & +S_{4k} & +S_{4k+3} & +S_{4k+2} \\ -S_{4k}^* & +S_{4k+1}^* & -S_{4k+2}^* & +S_{4k+3}^* \\ -S_{4k+2}^* & -S_{4k+3}^* & +S_{4k}^* & +S_{4k+1}^* \\ +S_{4k+3} & -S_{4k+2} & -S_{4k+1} & +S_{4k} \\ -S_{4k+3}^* & -S_{4k+2}^* & +S_{4k+1}^* & +S_{4k}^* \\ +S_{4k+2} & -S_{4k+3} & -S_{4k} & +S_{4k+1} \end{bmatrix} \quad (8.85)$$

容易验证，编码矩阵  $\mathbf{G}_4$  是列正交的，所以得到一个空一时一频列正交编码矩阵 (8.85)。

**最优解码算法：**时隙 1、2，子载波频率序号  $4k+n$  ( $n=0,1,2,3$ ) 对应的接收信号分别为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{1,k} &= \mathbf{H}_{1,k} \mathbf{S}_{(1,1,k)} + \mathbf{H}_{2,k} \mathbf{S}_{(1,2,k)} + \mathbf{H}_{3,k} \mathbf{S}_{(1,3,k)} + \mathbf{H}_{4,k} \mathbf{S}_{(1,4,k)} + \mathbf{w}_{1,k} \\ \mathbf{r}_{2,k} &= \mathbf{H}_{1,k} \mathbf{S}_{(2,1,k)} + \mathbf{H}_{2,k} \mathbf{S}_{(2,2,k)} + \mathbf{H}_{3,k} \mathbf{S}_{(2,3,k)} + \mathbf{H}_{4,k} \mathbf{S}_{(2,4,k)} + \mathbf{w}_{2,k} \end{aligned} \right\} \quad (8.86)$$

$\mathbf{H}_i = \text{diag}\{\text{DFT}_{N/4}[\alpha_i]\}$ ，其中记号  $\text{DFT}_M[\cdot]$  为关于对应序列的  $M$  点的 DFT 变换。在当前情形，有

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} H_i(e^{j2\pi(4k)/M}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_i(e^{j2\pi(4k+1)/M}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_i(e^{j2\pi(4k+2)/M}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_i(e^{j2\pi(4k+3)/M}) \end{bmatrix}$$

为了简化表达式，记分量  $H_i(e^{j2\pi(4k+n)/M}) \triangleq H_{i,4k+n}$ ，其中  $M = N/4$ 。将式 (8.84) 代入式 (8.86)

可得

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1,k} &= \begin{bmatrix} r_{1,4k} \\ r_{1,4k+1} \\ r_{1,4k+2} \\ r_{1,4k+3} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{1,k} \begin{bmatrix} +S_{4k} \\ -S_{4k+1}^* \\ +S_{4k+1} \\ -S_{4k}^* \end{bmatrix} + \mathbf{H}_{2,k} \begin{bmatrix} +S_{4k+1} \\ +S_{4k}^* \\ +S_{4k} \\ +S_{4k+1}^* \end{bmatrix} + \mathbf{H}_{3,k} \begin{bmatrix} +S_{4k+2} \\ -S_{4k+3}^* \\ S_{4k+3} \\ -S_{4k+2}^* \end{bmatrix} + \mathbf{H}_{4,k} \begin{bmatrix} +S_{4k+3} \\ +S_{4k+2}^* \\ +S_{4k+2} \\ +S_{4k+3}^* \end{bmatrix} + \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{r}_{2,k} &= \begin{bmatrix} r_{2,4k} \\ r_{2,4k+1} \\ r_{2,4k+2} \\ r_{2,4k+3} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{1,k} \begin{bmatrix} -S_{4k+2}^* \\ +S_{4k+3} \\ -S_{4k+3}^* \\ +S_{4k+2} \end{bmatrix} + \mathbf{H}_{2,k} \begin{bmatrix} -S_{4k+3}^* \\ -S_{4k+2} \\ S_{4k+3} \\ S_{4k+3} \end{bmatrix} + \mathbf{H}_{3,k} \begin{bmatrix} +S_{4k}^* \\ -S_{4k+1} \\ +S_{4k+1}^* \\ -S_{4k} \end{bmatrix} + \mathbf{H}_{4,k} \begin{bmatrix} +S_{4k+1}^* \\ +S_{4k} \\ +S_{4k}^* \\ +S_{4k+1} \end{bmatrix} + \mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

将  $\mathbf{r}_{1,k}, \mathbf{r}_{2,k}$  的各分量经共轭变换和重新编号组合可以得到关于符号变量  $s_{4k+i}$  ( $i=0,1,2,3$ ) 的如下方程:

$$\begin{bmatrix} r_{1,4k} \\ r_{1,4k+1}^* \\ r_{1,4k+2} \\ r_{1,4k+3}^* \\ r_{2,4k+3} \\ r_{2,4k+2}^* \\ r_{2,4k+1} \\ r_{2,4k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,4k} & \mathbf{H}_{2,4k} & \mathbf{H}_{3,4k} & \mathbf{H}_{4,4k} \\ \mathbf{H}_{2,4k+1}^* & -\mathbf{H}_{1,4k+1}^* & \mathbf{H}_{4,4k+1}^* & -\mathbf{H}_{3,4k+1}^* \\ \mathbf{H}_{2,4k+2} & \mathbf{H}_{1,4k+2} & \mathbf{H}_{4,4k+2} & \mathbf{H}_{3,4k+2} \\ -\mathbf{H}_{1,4k+3}^* & \mathbf{H}_{2,4k+3}^* & -\mathbf{H}_{3,4k+3}^* & \mathbf{H}_{4,4k+3}^* \\ -\mathbf{H}_{3,4k+3} & \mathbf{H}_{4,4k+3} & \mathbf{H}_{1,4k+3} & -\mathbf{H}_{2,4k+3} \\ \mathbf{H}_{4,4k+2}^* & \mathbf{H}_{3,4k+2}^* & -\mathbf{H}_{2,4k+2}^* & -\mathbf{H}_{1,4k+2}^* \\ \mathbf{H}_{4,4k+1} & -\mathbf{H}_{3,4k+1} & -\mathbf{H}_{2,4k+1} & \mathbf{H}_{1,4k+1} \\ \mathbf{H}_{3,4k}^* & \mathbf{H}_{4,4k}^* & -\mathbf{H}_{1,4k}^* & -\mathbf{H}_{2,4k}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{4k} \\ s_{4k+1} \\ s_{4k+2} \\ s_{4k+3} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\mu} \quad (8.87)$$

式中, 分量  $\boldsymbol{\mu}$  为相应的加性噪声分量。进一步, 记式 (8.87) 中信道系数矩阵为

$$\mathcal{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,4k} & \mathbf{H}_{2,4k} & \mathbf{H}_{3,4k} & \mathbf{H}_{4,4k} \\ \mathbf{H}_{2,4k+1}^* & -\mathbf{H}_{1,4k+1}^* & \mathbf{H}_{4,4k+1}^* & -\mathbf{H}_{3,4k+1}^* \\ \mathbf{H}_{2,4k+2} & \mathbf{H}_{1,4k+2} & \mathbf{H}_{4,4k+2} & \mathbf{H}_{3,4k+2} \\ -\mathbf{H}_{1,4k+3}^* & \mathbf{H}_{2,4k+3}^* & -\mathbf{H}_{3,4k+3}^* & \mathbf{H}_{4,4k+3}^* \\ -\mathbf{H}_{3,4k+3} & \mathbf{H}_{4,4k+3} & \mathbf{H}_{1,4k+3} & -\mathbf{H}_{2,4k+3} \\ \mathbf{H}_{4,4k+2}^* & \mathbf{H}_{3,4k+2}^* & -\mathbf{H}_{2,4k+2}^* & -\mathbf{H}_{1,4k+2}^* \\ \mathbf{H}_{4,4k+1} & -\mathbf{H}_{3,4k+1} & -\mathbf{H}_{2,4k+1} & \mathbf{H}_{1,4k+1} \\ \mathbf{H}_{3,4k}^* & \mathbf{H}_{4,4k}^* & -\mathbf{H}_{1,4k}^* & -\mathbf{H}_{2,4k}^* \end{bmatrix} \quad (8.88)$$

矩阵  $\mathcal{H}_k$  一般不满足列正交的条件。当信道系数  $H_i(e^{j2\pi(4k+n)/M}) \triangleq H_{i,4k+n}$  与参数  $n$  无关时, 即在平坦衰落信道时, 式 (8.88) 的信道系数矩阵  $\mathcal{H}_k$  是列正交的。即当仅考虑平坦衰落信道时, 可以实现通过对符号的正交空-时-频编码而转化为相应的信道频域参数的正交编码。当信道系数矩阵  $\mathcal{H}_k$  为列正交时, 对应最大似然解码为“单符号”复杂度算法。当考虑频率选择性信道时, 信道系数矩阵  $\mathcal{H}_k$  不满足列正交时, 用  $\mathcal{H}_k^H$  左乘以方程式 (8.69), 使符号参数  $s_{4k+i}$  ( $i=0,1,2,3$ ) 的系数矩阵降维成  $4 \times 4$ , 采用迫零 (Zero-Force) 或 QR 分解的干扰逐次剔除算法解出符号参数  $s_{4k+i}$  ( $i=0,1,2,3$ )。

在模拟中采用的是 QR 分解的干扰逐次剔除算法。对于此处的编码方案，也在 cost207 典型城市区域模型下比较过迫零 (Zero-Force) 与 QR 分解的干扰逐次剔除这两种算法，它们基本上没有什么明显的区别。

最后应该指出的是，此处的空一时一频传输方案与修正的 Lee-Williams 空一时一频传输方案有相同的符号速率。因此在计算机模拟中采用了 16QAM 调制符号星座图。

图 8.31 中有六条曲线，它们分别代表上面所述的空一时一频编码方法，即所谓的“新”方法；另一个是参考文献[57]所述的方法在频率选择性信道下的性能，即所谓的“老”方法；还有一个是对参考文献[57]所述的方法在解码过程中对信道参数做共轭与交织变换，即所谓的“老”方法的信道交织法。此处所述的编码方案在 cost207 城市典型区域信道传输中有明显的优势。但是此处所述的编码方案在 OFDM 子载波数较大时的性能不如 OFDM 子载波数较小时，我们理解当 OFDM 子载波数较大时对于同一带宽的信道而言信道采样间隔将变小，同一信道相邻的两个采样相关性增强，从而导致矩阵 (8.88) 中的各个列矢量之间的相关性增强，进而导致式 (8.87) 有关的最大似然解码算法的性能下降。

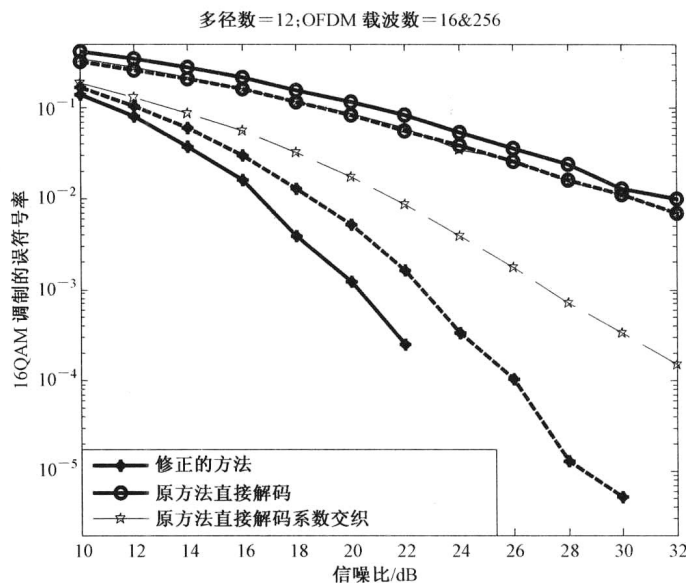


图 8.31 直接法与交织法的性能对比

图 8.32 (a) 所示是 OFDM 子载波数为 16 时，四种编码算法误符号率的比较。这时曲线有点小波动，原因是 OFDM 子载波数小时，归结为实验次数小。图 8.32 (b) 所示是 OFDM 子载波数为 256 时，四种编码算法误符号率的比较。这两幅图形基本可以说明上面四种编码算法的性能优异对比。

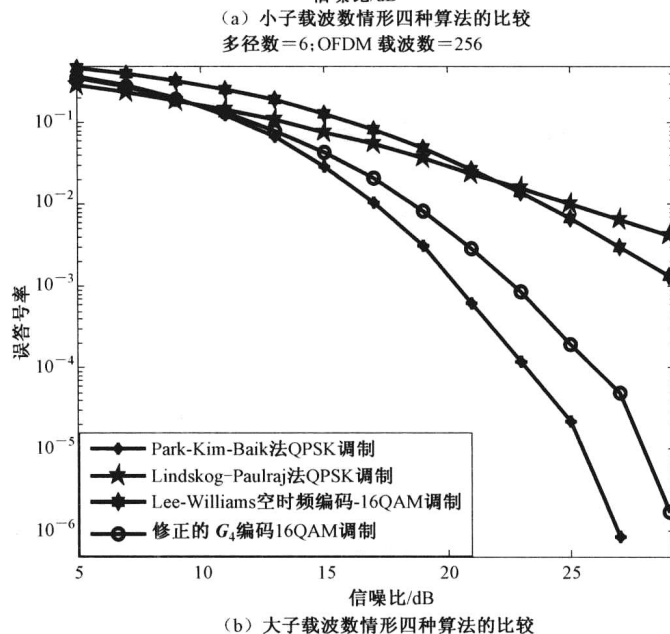
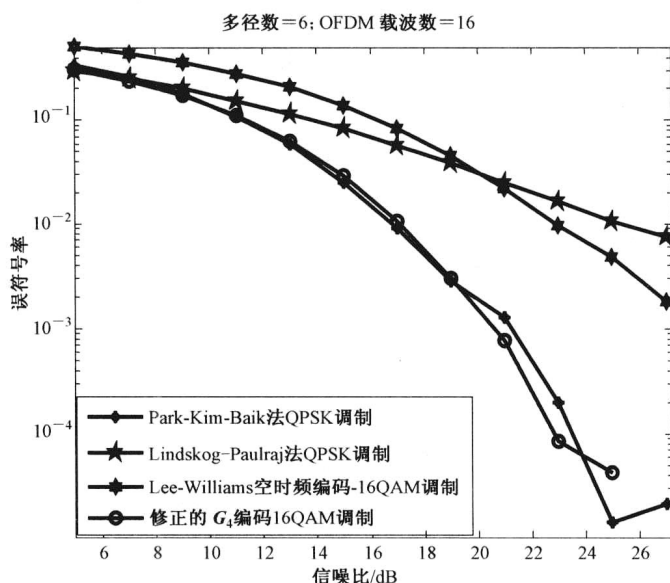


图 8.32 几种不同传输方案在 cost207 信道中性能的比较

对上述计算机模拟结果的一些进一步解释说明。

(1) 图 8.27、图 8.28、图 8.30、图 8.31 分别是 Lindskog-Paulraj 空一时一频传输方案、Park-Kim-Baik 空一时一频传输方案、修正的 Lee-Williams 空一时一频传输方案以及将修正的 Lee-Williams 空一时一频传输方案推广到 4 发 1 收情形这四种算法在 cost207 信道模型下对不同子载波数，不同多径数的模拟结果。其中，Lindskog-Paulraj 空一时一频传输方案和 Park-Kim-Baik 空一时一频传输方案具有相同的传输速率；而修正的 Lee-Williams 空一

时一频传输方案和4发1收修正的Lee-Williams空一时一频传输方案具有相同的传输速率。前两者是后两者的2倍。

(2) 从分集增益角度看, 4发1收修正的Lee-Williams空一时一频传输方案略胜Park-Kim-Baik空一时一频传输方案, 但前者对信道频域采样密集度敏感。另外, 修正的Lee-Williams空一时一频传输方案胜过Lindskog-Paulraj空一频传输方案。

(3) 从算法复杂度来说, 从高到低依次为Park-Kim-Baik空一时一频传输方案、4发1收修正的Lee-Williams空一时一频传输方案、修正的Lee-Williams空一时一频传输方案、Lindskog-Paulraj空一频传输方案。但是, 前两者的复杂度有比较大的差距, 而后三者的复杂度基本相当。

(4) 几乎对于此处所讨论的所有算法, 随着信道多径数的增加, 其性能均有些许改善。这种改善完全来自其传输的内在机理, 如果能够确切地将这些多径传输分量相干相加, 则这种改善必然更为显著。

## 8.7 关于成对差错概率的模拟分析

本节结合第1章所论述的空域信道模型和本章所讨论的成对差错概率分析, 利用计算机模拟揭示空域相关信道对成对差错概率的影响。图8.33所示为利用I-METRA多输入多输出信道模型<sup>[60-63]</sup>的生成模式产生空域相关信道的协方差矩阵, 再利用所得成对差错概率的表达式模拟生成。从该图中可以看出信道相关矩阵行列式值对传输的影响。从数学角度, 矩阵行列式值对应于矩阵特征值之积; 从传输角度, 此积值较大说明信道增益较大, 对应成对差错概率值应较小。这与图8.33所示一致。图8.34所示是利用第1章所论述的空域信道的几个逼近模型产生相应空域信道相关矩阵, 再利用本章所讨论的成对差错概率分析结论计算所得, 这里共模拟了四种类型, 它们分别是正弦函数的4次方型、均匀型、截断高斯型和截断拉普拉斯型<sup>[60]</sup>。图8.34(a)所示是当角度扩展等于 $10^\circ$ 时的成对差错概率曲线; 图8.34(b)所示是当角度扩展等于 $30^\circ$ 时的成对差错概率曲线。角度扩展越大说明信道空域相关性愈弱, 由第2章的分析结论, 这越有利于信道传输, 这与我们的模拟结果是一致的。

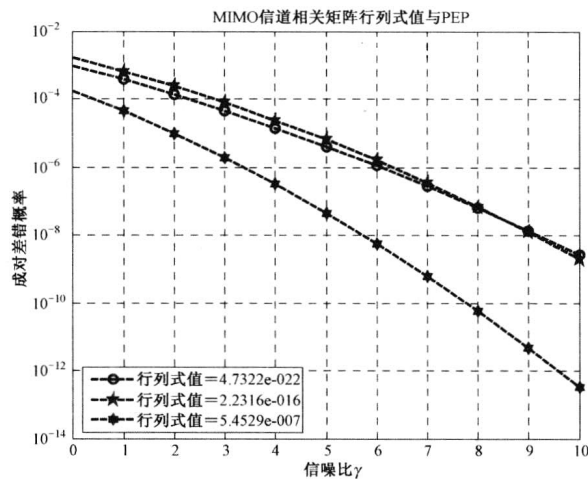
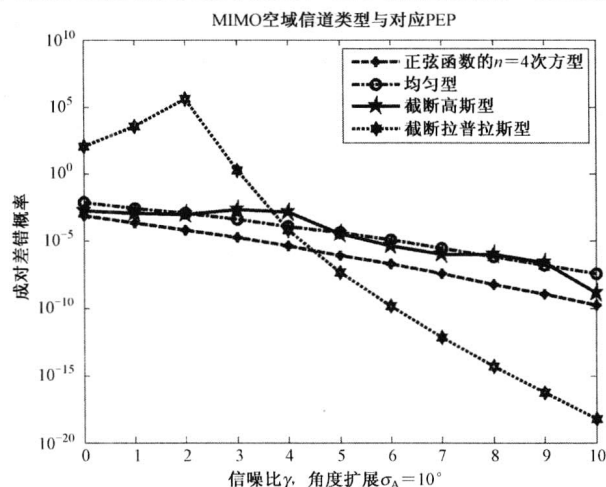
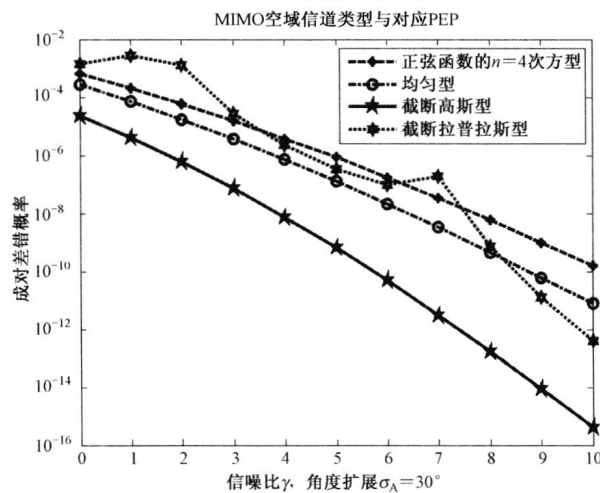


图 8.33 I-METRA 多输入多输出信道模型性能的比较

类似于正弦函数的  $n$  次方型、均匀型、截断高斯型和截断拉普拉斯型空域信道模型，第 1 章还有基于传输路径的空域相关信道和接收终端移动空域相关信道模型等。我们完全可以仿照模拟图 8.34 的原理做相应仿真研究。由于篇幅限制，这里就不再赘述。



(a) 小角度扩展时空域信道模型的性能比较



(b) 大角度扩展时空域信道模型的性能比较

图 8.34 几种不同空域相关信道模型的性能比较

观察图 8.34 (a) 发现，仅均匀型和截断拉普拉斯型有明显的优劣区分，截断高斯型相对正弦函数 4 次方型时优时差，而截断拉普拉斯型在稍高信噪比时远优于其他三种模型。这些事实说明在小角度扩展时，截断高斯型、正弦函数 4 次方型和均匀型信道均有较高的相关性。但图 8.34 (b) 中有三个空域相关信道模型有明显的优劣区分，它们依次分别是截断高斯型、均匀型和正弦函数 4 次方型，截断拉普拉斯型相对均匀型和正弦函数 4 次方型时优时差。从图 1.41 (b) 至图 1.44 (b) 可以看出，截断拉普拉斯型空域谱所对应的信道相关系数收敛于零的速度最差；而截断高斯型空域谱所对应的信道相关系数收敛于零的速度最快；但均匀型和正弦函数 4 次方型空域谱所对应的信道相关系数有较大的旁瓣和次瓣。这些都可能是影响信道传输特性的因素。

## 8.8 本章要点总结

本章内容可以分割为三部分：OFDM 的基本原理和峰均值比降低、MIMO-OFDM 空一时一频编码系统成对差错概率分析、MIMO-OFDM 系统中空一时一频编码研究。因此重点总结按这三条脉络进行。

OFDM 信号的生成由式(8.1)表示；OFDM 信号传输中保护间隔的插入和作用；OFDM 信号的加窗滤波对抑制带外泄露的作用（如图 8.6 所示）；OFDM 信号在接收端的表达式(8.4)，这时仅有系统加性噪声和信道增益（乘性）因子的影响；若考虑传输的时间偏差与相位偏差，接收信号表示为式(8.9)，这时不仅有系统加性噪声和信道增益（乘性）因子的影响，还存在时间偏差 sinc 乘性因子和相位偏差的旋转因子影响。

OFDM 的峰均值比问题是一个影响其传输性能的重要因素，峰均值比降低大致有三类方法：第一类是所谓的信号非线性形变方法，包括剪切限幅法、峰值窗函数法、峰值消除法、压扩变换法等；第二类是所谓的编码类方法，包括利用格雷补码、Hadamard 码等；第三类是加扰—选择方法，包括选择性映射法和部分传输序列法。

MIMO-OFDM 空一时一频编码系统成对差错概率分析是一个比较复杂、难以理解的问题。本章得到了系统成对差错概率的“闭—形”解析表达式，既有瑞利信道情形也有莱斯信道情形。其结果综述成命题 8.2 的形式，但是深层次的问题绝非一个命题能够包含。将系统成对差错概率的“闭—形”解与第 1 章对信道的认知结合在一起可能产生一系列需要进一步分析研究的课题。

对于 MIMO-OFDM 系统中空一时一频编码问题，通过几个实例来演绎说明，它们分别是 Lindskog-Paulraj 空一时一频编码、Park-Kim-Baik 空一时一频编码和修正的 Lee-Williams 空一时一频编码。Lindskog-Paulraj 空一时一频编码的特点是，一个阵元传输的码序列是另一个阵元传输的码序列的时间反演与共轭变换，这个变换传导到信道参数上可以有效改善信道参数矩阵的条件数，从而改进系统性能；Park-Kim-Baik 空一时一频编码的特点是对传输序列的正交变换，从表面看好像每一个码元均历经所有时间、空间和频率的传输，因而具有最佳的分集增益。修正的 Lee-Williams 空一时一频编码，从其编码矩阵就可以看见其各个码元在时间、空间和频率的分集特性。当考虑频率选择性衰落信道时，对符号的编码转化成对对应信道参数的编码矩阵的行列式（秩、迹）值直接影响迫零（Zero-Force）或最小均方误差（MMSE）解码算法的性能。因此，在进行符号空一时一频编码时综合考虑其演绎到信道参数的编码矩阵的“好坏”是一个具有决定性收益的途径。

通过理论分析与模拟研究，本章讨论的 MIMO-OFDM 空一时一频编码系统与第 4 章所讨论的正交编码的最显著区别是其可以应用于频率选择性衰落信道，这种拓展性应用所衍生的问题由于篇幅限制还没能给予进一步分析研究。

## 练习题

1. 设  $X_i$  为调制符号星座图内的点数据;  $N_s$  为子载波数;  $\text{rect}(\cdot)$  为单位矩形脉冲函数;  $T$  为符号周期;  $t_s$  为信号的起始时刻。则周期信号  $s(t)$  的表达式为

$$s(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=-N_s/2, i \neq 0}^{N_s/2-1} X_{i+N_s/2} \text{rect}[(t-t_s)/T] \exp[j2\pi i(t-t_s)/T] \right\}$$

对  $s(t)$  以  $T/N_s$  为间隔等间隔采样同时综合掉因子  $\exp(j\pi k)$ , 得

$$s[k] = s(kT/N_s) = \sum_{l=0}^{N_s-1} X_l \exp(j2\pi lk/N_s) \quad (0 \leq k \leq N_s - 1)$$

证明数据  $s[k]$  与调制符号星座图数据  $X_i$  之间的关系为 DFT 和 IDFT 的关系。

2. 假设数据流为  $X_0, X_1, \dots, X_{N_c-1}$ , 经 OFDM 子载波调制后得

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-1} X_i \text{rect}[(t - T_{\text{win}} + T_{\text{guard}})/T_s] \exp(j2\pi f_i t)$$

式中,  $T_s = T_{\text{FFT}} + T_{\text{guard}}$ ;  $N$  是子载波数。通过加窗和时移变换, 得到在某一时段发送的 OFDM 信号为

$$s_k(t - kT) = w(t - kT) \sum_{i=0}^{N-1} X_{i,k} \text{rect}[(t - kT - T_{\text{win}} + T_{\text{guard}})/T_s] \exp\{j2\pi(f_c + i/T_{\text{FFT}})(t - kT)\}$$

假设  $X_0 = 0$  和信号无直流分量。这样等价低通型信号为

$$s_{\text{LP},k}(t - kT) = w(t - kT) \sum_{i=0}^{N-1} X_{i,k} \text{rect}[(t - kT - T_{\text{win}} + T_{\text{guard}})/T_s] \exp\{j2\pi i(t - kT)/T_{\text{FFT}}\}$$

设信道的等价低通脉冲响应函数为  $h(\tau, t)$ , 加性高斯白噪声分量为  $n(t)$ 。所以接收信号可以表示为

$$r_{\text{LP}}(t) = h(\tau, t) \otimes s_{\text{LP}}(t) + n(t) = \int_0^{\tau_{\text{max}}} h(\tau, t) s_{\text{LP}}(t - \tau) d\tau + n(t)$$

进一步假设  $h(\tau, t)$  的支撑集为  $\tau \in [0, \tau_{\text{max}}]$ , 且在一个帧周期内为静态的。再设窗函数在 FFT 积分区域内等于 1, 即  $w(t - kT) = 1$ 。证明  $X_i$  可以通过对接收信号  $r_{\text{LP}}(t)$  的 DFT 提取, 即对应判决统计量为

$$y_{l,k} = \frac{1}{T_{\text{FFT}}} \int_{kT}^{kT+T_{\text{FFT}}} r_{\text{LP}}(t) \exp[-j2\pi l(t - kT)/T_{\text{FFT}}] dt = \frac{1}{T_{\text{FFT}}} H\left(\frac{l}{T_{\text{FFT}}}\right) X_{i,k} \delta(i - l) + n'$$

式中,  $\delta(i - l)$  是所谓的 delta 函数。  $H(l/T_{\text{FFT}})/T_{\text{FFT}}$  是信道的频谱响应在第  $l$  个子载波频点的采样。

3. 设  $s(t)$  为一个由  $N$  个子载波组成且具有复包络的 OFDM 信号。定义  $s(t)$  功率峰均值比 (PAPR) 为

$$\text{PAPR} = \frac{\max_{t \in [0, T]} |s(t)|^2}{E\{|s(t)|^2\}}$$



证明对于确定的参数  $\gamma$ ，其 PAPR 满足关系式

$$\Pr(\text{PAPR} > \gamma) = 1 - (1 - e^{-\gamma})^N$$

4. 假设信号  $s(t)$  的幅度的  $d$  次方具有区间  $[0, \alpha]$  上的均匀分布，证明信号  $s(t)$  幅度的累量分布函数为

$$F(x) = \frac{x^d}{\alpha} \quad (0 \leq x \leq \sqrt[d]{\alpha})$$

以及  $F(x)$  的逆函数为

$$F^{-1}(x) = \sqrt[d]{\alpha x} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

5. 设适用于 BPSK 调制符号星座图的压扩函数  $h(x)$  形式为

$$h(x) = \text{sgn}(x) \sqrt[d]{\alpha [1 - \exp(-x^2 / \sigma^2)]}$$

式中，参数  $\alpha = (E\{|s(t)|^2\} / E\{\sqrt[d]{[1 - \exp(-|s(t)|^2 / \sigma^2)]^2}\})^{d/2}$ ； $\sigma^2$  为信号的方差。请将这个压扩函数推广到适合调制符号星座图  $M$ -QAM 的情形。

6. 设矢量  $\mathbf{a} = [a(n_1), a(n_2), \dots, a(n_M)]$  和矢量  $\tilde{\mathbf{a}} = [\tilde{a}(n_1), \tilde{a}(n_2), \dots, \tilde{a}(n_M)]$ ，它们之间满足关系

$$\begin{cases} a(n_1) = \tilde{a}(n_1) + w_h(d_{12})\tilde{a}(n_1) + \dots + w_h(d_{1M})\tilde{a}(n_M) \\ a(n_2) = w_h(d_{21})\tilde{a}(n_1) + \tilde{a}(n_2) + \dots + w_h(d_{2M})\tilde{a}(n_M) \\ \dots \\ a(n_M) = w_h(d_{M1})\tilde{a}(n_1) + w_h(d_{M2})\tilde{a}(n_2) + \dots + \tilde{a}(n_M) \end{cases}$$

即有关系  $\mathbf{a} = \mathbf{W}\tilde{\mathbf{a}}$ ，请写出系数矩阵  $\mathbf{W}$  的形式。

7. 假设有长度为  $N$  的序列  $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$  和  $\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$ ，若它们满足关系式

$$\sum_{n=0}^{N-1} (x_n x_{n+k} + y_n y_{n+k}) = \begin{cases} 2N & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$X(f)$  和  $Y(f)$  分别是  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  的傅里叶变换，证明有关系式

$$|X(f)|^2 \leq 2N$$

以及

$$|X(f)|^2 \leq 2N \quad (\forall f)$$

8. 设有空一频编码矩阵  $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{N-1}]$ 。假设信道增益矩阵  $\mathbf{H}_l$  ( $l = 0, 1, \dots, L-1$ )，将  $\mathbf{H}_l$  写成行矢量的形式： $\mathbf{H}_l = \left[ (\mathbf{h}_1^{(l)})^T \quad (\mathbf{h}_2^{(l)})^T \quad \dots \quad (\mathbf{h}_{N_R}^{(l)})^T \right]^T \in \mathbf{C}^{N_R \times N_T}$ 。 $\mathbf{H}_l(\mathbf{W}_N^{-k})$  为其离散傅里叶变换，记数据

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}(\mathbf{W}_N^{-k})(\mathbf{c}_k - \tilde{\mathbf{c}}_k) = \mathbf{H}(\mathbf{W}_N^{-k})\Delta\mathbf{c}_k \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

定义数据矩阵  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_0^T, \mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_{N-1}^T]^T \in \mathbf{C}^{N_R \times N}$ 。将  $\mathbf{Y}$  做置换变换，使其与第  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_R$ ) 个行矢量  $\mathbf{h}_i^{(l)}$  有关的元素以传送码元  $\mathbf{c}_k$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) 的次序排列。证明  $\mathbf{Y}$  中仅与行矢量  $\mathbf{h}_i^{(l)}$  ( $i = 1, 2, \dots, N_R$ ) 有关联的项仍记为  $\mathbf{y}_i$ ，则有表达式

$$\mathbf{y}_i = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{D}^l \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{c}_0^T \\ \cdots \\ \Delta \mathbf{c}_{N-1}^T \end{bmatrix} (\mathbf{h}_i^{(l)})^T = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T (\mathbf{h}_i^{(l)})^T \quad (i=1, 2, \dots, N_R)$$

对角矩阵  $\mathbf{D} = \text{diag}\{e^{j2\pi 0/N}, \dots, e^{j2\pi(N-1)/N}\}$

9. 设

$$\mathbf{y}_i = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{D}^l \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{c}_0^T \\ \cdots \\ \Delta \mathbf{c}_{N-1}^T \end{bmatrix} (\mathbf{h}_i^{(l)})^T = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T (\mathbf{h}_i^{(l)})^T \quad (i=1, 2, \dots, N_R)$$

以此构造数据矩阵  $\mathbf{Y}$ ，证明  $\mathbf{Y}$  的范数满足

$$\mathbf{Y}^H \mathbf{Y} = \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z}$$

其中矢量  $\mathbf{z} = [\text{vec}(\mathbf{H}_0^T)^T \quad \text{vec}(\mathbf{H}_1^T)^T \quad \cdots \quad \text{vec}(\mathbf{H}_{L-1}^T)^T]^T$ ，且证明矩阵  $\mathbf{A}$  有表达式

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^0 \Delta \mathbf{C}^T) & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^1 \Delta \mathbf{C}^T) & \cdots & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{L-1} \Delta \mathbf{C}^T) \\ \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-1} \Delta \mathbf{C}^T) & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^0 \Delta \mathbf{C}^T) & \cdots & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{L-2} \Delta \mathbf{C}^T) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-(L-1)} \Delta \mathbf{C}^T) & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-(L-2)} \Delta \mathbf{C}^T) & \cdots & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^0 \Delta \mathbf{C}^T) \end{bmatrix}$$

10. 证明对于给定  $\boldsymbol{\mu}$ ，其长度  $\|\boldsymbol{\mu}\|$  与对  $\boldsymbol{\mu}$  酉变换无关。

11. 假设数据流  $y(k)$  可以表示为

$$y(k) = \sqrt{\frac{E_s}{2}} [H_1(W^{-k}) \quad H_2(W^{-k})] \begin{bmatrix} -x_2^*(N-k+1) \\ x_1^*(N-k+1) \end{bmatrix} + n(k)$$

求数据流  $y(k)$  的时间反演和共轭变换所得表达式。

12. 令  $\mathbf{A}(x, y) = \begin{bmatrix} +x & +y \\ -y^* & +x^* \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{B}(x, y) = \begin{bmatrix} +x^* & y^* \\ -y & +x \end{bmatrix}$ 。将编码矩阵

$$\mathcal{G}_4 = \begin{bmatrix} +s_{4k} & +s_{4k+1} & +s_{4k+2} & +s_{4k+3} \\ -s_{4k+1}^* & +s_{4k}^* & -s_{4k+3}^* & +s_{4k+2}^* \\ +s_{4k+1} & +s_{4k} & +s_{4k+3} & +s_{4k+2} \\ -s_{4k}^* & +s_{4k+1}^* & -s_{4k+2}^* & +s_{4k+3}^* \\ -s_{4k+2}^* & -s_{4k+3}^* & +s_{4k}^* & +s_{4k+1}^* \\ +s_{4k+3} & -s_{4k+2} & -s_{4k+1} & +s_{4k} \\ -s_{4k+3}^* & -s_{4k+2}^* & +s_{4k+1}^* & +s_{4k}^* \\ +s_{4k+2} & -s_{4k+3} & -s_{4k} & +s_{4k+1} \end{bmatrix}$$

写作形式

$$\mathcal{G}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(s_{4k}, s_{4k+1}) & \mathbf{A}(s_{4k+2}, s_{4k+3}) \\ \mathbf{A}(s_{4k+1}, s_{4k}) & \mathbf{A}(s_{4k+3}, s_{4k+2}) \\ -\mathbf{B}(s_{4k+2}, s_{4k+3}) & \mathbf{B}(s_{4k}, s_{4k+1}) \\ -\mathbf{B}(s_{4k+3}, s_{4k+2}) & \mathbf{B}(s_{4k+1}, s_{4k}) \end{bmatrix}$$

证明该编码矩阵满足列正交关系。

## 参 考 文 献

- [1] van Nee R, Prasad R. OFDM for wireless multimedia communications. Artech House, 2000.
- [2] STÜBER G L, BARRY J, MCLAUGHLIN S W, et al. Broadband MIMO-OFDM Wireless Communications. Proc. of IEEE, 2004, 92 (2) : 271-294.
- [3] ETS 300 744 Digital broadcasting systems for television, sound and data services; framing structure, channel coding, and modulation for digital terrestrial television. European Telecommunication Standard, Doc. 300 744, 1997.
- [4] Li X, Cimini L. Effects of Clipping and Filtering on the Performance of OFDM. IEEE Communications Letters, 1998, 2 (5) : 131-133.
- [5] Van Nee R, Wild A. Reducing the Peak-to-Average Power Ratio of OFDM. IEEE Vehicular Technology Conference, 1998, Vol. 3: 2072-2076.
- [6] O'Neill R, Lopes L B. Performance of Amplitude Limited Multitone Signals. IEEE Vehicular Technology Conference, 1994: 1675-1679.
- [7] Dinur N, Wulich D. Peak to Average Power Ratio in Amplitude Clipped High Order OFDM. IEEE Military Communications Conference MILCOM, 1998, Vol. 2: 684-687.
- [8] Wulich D, Goldfeld L. Reduction of Peak Factor in Orthogonal Multicarrier Modulation by Amplitude Limiting and Coding. IEEE Trans on Com., 1999, 47 (1) : 18-21.
- [9] Huang Xiao, Lu Jianhua, Zheng Junli, et al. Companding Transform for Reduction in Peak-to-Average Power Ratio of OFDM Signals. IEEE Trans on Wireless Com., 2004, 03 (6) : 2030- 2039.
- [10] Jiang Tao, Yang Yang, Song Yong-Hua. Exponential Companding Technique for PAPR Reduction in OFDM Systems. IEEE Trans on BROADCASTING, 2005, 51 (2) : 244-248.
- [11] Wilkinson T A, Jones A E. Minimization of Peak-to-Mean Envelope Power Ratio of Multicarrier Transmission Schemes by Block Coding. IEEE Vehicular Technology Conference, 1995, Vol. 2: 825-829.
- [12] Van Nee R D. OFDM Codes for Peak-to-Average Power Reduction and Error Correction. IEEE Global Telecommunications Conference, Nov. 1996, Vol. 1: 740-744.
- [13] Friese M. OFDM Signal with Low Crest-Factor. IEEE Global Telecommunications Conference, Nov. 1997, Vol.1: 290-294.
- [14] Golay M J E. Complementary series. IRE Trans.on IT, 1961, 7 (4) : 82-87.
- [15] Sivaswamy R. Multiphase complementary Codes. IEEE Trans.on IT, 1978, 24 (5) .

- [16] Frank R L. Polyphase complementary Codes. *IEEE Trans.on IT*, 1980, 26 (6) .
- [17] Tarokh B, Sadjadpour H R. Construction of OFDMM-QAM sequences with low peak-to-average power ratio. *Proc. CISS'01*. Baltimore, MD, Mar, 2001: 21–23.
- [18] Tarokh B, Sadjadpour H R. Construction of OFDM M-QAM Sequences With Low Peak-to-Average Power Ratio. *Trans. on COM.*, 2003, 51 (1) : 25-28.
- [19] Bauml R W, Hscher R F H, Huber J B. Reducing the Peak-to-Average Power Ratio of Multicarrier Modulation by Selected Mapping. *Electronic Letters*, Oct. 1996, 32 (22) : 2056-2057.
- [20] Muller S H, Huber J B. OFDM with Reduced Peak-to-Average Power Ratio by Optimum Combination of Partial Transmit Sequences. *Electronic Letters*, 1997, 33 (5) : 368-369.
- [21] Muller S H, Huber J B. A Comparison of Peak Power Reduction Schemes for OFDM. *IEEE Global Telecommunication Conference*, Nov. 1997, Vol. 1, pp. 1-5.
- [22] Tellambura C. Phase optimization criterion for reducing peak-to-average power ratio in OFDM. *Electronic Letters*, 1998, 34 (2) : 169-170.
- [23] Tellambura C. Upper bound on peak factor of N-multiple carriers. *Electron. Lett.*, 1997, vol. 33: 1608–1609.
- [24] Boyd S. Multitone signals with low crest factor. *IEEE Trans. Circuits Syst.* , 1986, vol. CAS-33: 1018–1022.
- [25] 邵朝, 阴亚芳, 卢光跃. 数字信号处理. 北京: 北京邮电大学出版社, 2004.
- [26] Kuo H, Cheung S. Optimization of windowing and peak-windowing techniques for wcdma systems. *Proc. IEEE ICASSP 2006*, vol. 4, 14-19 May 2006: IV 313–IV–316.
- [27] Rößing C, Tarokh V. A construction of OFDM 16-QAM sequences having low peak powers. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2001, vol. 47: 2091–2094.
- [28] Cha S, Park M, Lee S, et al. A new papr reduction technique for ofdm systems using advanced peak windowing method. *IEEE Trans. Consum. Electron.*, 2008, 54 (2) : 405–410.
- [29] 杨莘元, 李卓, 栗春辉. OFDM-PTS 算法中的三种不同分割方法的特性. *信息技术*, 2008, 32 (8) : 82-85.
- [30] Davis J A, Jedwab J. Peak-to-mean power control in OFDM, Golay complementary sequences, and reed-muller codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1999, vol. 45: 2397–2417.
- [31] Fozunbal M, McLaughlin S W, Schafer R W, et al. On Space-Time Coding in the Presence of Spatio-Temporal Correlation. *IEEE IT*, 2004, 50 (9) : 1910 – 1926.
- [32] 王松桂, 杨振海. 广义逆矩阵及其应用[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1996.
- [33] Horn R A, Johnson C R. *Matrix Analysis*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1985.
- [34] Horn R A, Johnson C R. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge, UK: Cambridge Univ.Press, 1991.
- [35] Agrawal D, et al. Space-Time Coded OFDM for High Data-Rate Wireless Communications over Wideband Channels. *Proc. IEEE Vehic. Tech. Conf.*, May 1998: 2232–2236.
- [36] Lee K F, Williams D B. A Space-Time Coded Transmitter Diversity Technique for Frequency

- Selective Fading Channels. Proc. IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop, Cambridge, MA, Mar 2000: 149–152.
- [37] Alamouti S M. A simple transmitter diversity scheme for wireless communications. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 1998, vol. 16: 1451–1458.
- [38] Lu B, Wang X. Space-Time Code Design in OFDM Systems. Proc. IEEE Global Commun. Conf., Nov. 2000: 1000–1004.
- [39] Blum R S, et al. Improved Space-Time Coding for MIMO-OFDM Wireless communications. *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, Nov. 2001: 1873–1878.
- [40] Gong Y, Letaief K B. An Efficient Space-Frequency Coded OFDM System for Broadband Wireless Communications. *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, Dec. 2003: 2019–2029.
- [41] Lee K F, Williams D B. A Space-Frequency Transmitter Diversity Technique for OFDM Systems. Proc. IEEE Global Commun. Conf., Nov. 27–Dec. 1, 2000, vol. 3: 1473–1477.
- [42] Molisch A F, Win M Z, Winters and J H. Space-Time-Frequency (STF) Coding for MIMO-OFDM Systems. *IEEE Commun. Lett.*, vol. 6, Sept. 2002: 370–372.
- [43] Liu Z, Xin Y, Giannakis G B. Space-Time-Frequency Coded OFDM over Frequency-Selective Fading Channels. *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, Oct. 2002: 2465–2476.
- [44] Fozunbal M, McLaughlin S W, Schafer R W. On Space-Time-Frequency Coding over MIMO-OFDM systems. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, Jan. 2005: 320–331.
- [45] Su Weifeng, Safar Z, Liu K J R. Towards Maximum Achievable Diversity in Space, Time, and Frequency: Performance Analysis and Code Design. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2005, 4 (4) : 1847–1857.
- [46] Zhang W, Xia X G, Ching P C. High-Rate Full-Diversity Space-Time-Frequency Codes for Broadband MIMO Block Fading Channels. *IEEE Trans. Commun.*, vol. 55, Jan. 2007: 25–34.
- [47] Viterbo E, Boutros J. A universal lattice code decoder for fading channels. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1999, 45 (5) : 1639–1642.
- [48] Damen O, Chkeif A, Belfiore J C. Lattice code decoder for space-time codes. *IEEE Commun. Lett.*, 2000, 4 (5) : 161–163.
- [49] Dayal P, Varanasi M K. A fast generalized sphere decoder for optimum decoding of under-determined MIMO systems. The 41st Annual Allerton Conf. on Comm. Control, and Comput., Monticello, IL, 2003: 1216–1225.
- [50] Damen O, Chkeif A, Belfiore J C. Lattice code decoder for space-time codes. *IEEE Commun. Lett.*, 2000, 4 (5) : 161–163.
- [51] Vikalo H, Hassibi B. Maximum likelihood sequence detection of multiple antenna systems over dispersive channels via sphere decoding. *EURASIP J. Appl. Signal Process*, 2002, 2002 (5) : 525–531.
- [52] Safar Z, Su W, Liu K J R. A fast sphere decoding framework for space-frequency block

- codes. Proc. IEEE Int. Conf. Communications (ICC) , Paris, France, 2004: 2591–2595.
- [53] Lindskog E, Paulraj A J. A transmit diversity scheme for channels with intersymbol interference. Proc. ICC 2000 – IEEE Int. Conf. Commun., New Orleans, June 2000, volume 1: 307–311.
- [54] Larsson E G, Stoica P, Lindskog E, et al. Space–time block coding for frequency-selective channels. In Proc. ICASSP 2002.
- [55] Stoica P, Lindskog E. Space–time block coding for channels with intersymbol interference. In Proc. Asilomar Conf. On Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, CA, November 2001, volume 1: 252–256.
- [56] Park S S, Kim H K, Baik H K. A simple STF-OFDM transmission scheme with maximum frequency diversity gain. Proceedings of the 2004 International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS '04) . Vol. 4, May 2004: 23-26.
- [57] Torabi M, Soleymani M R. A New Space-Frequency-Time block coded OFDM Scheme for Broadband Wireless Communications. Proceedings of the 2003 International Symposium on Circuits and Systems (CCECE '03) , Montreal, May 2004.
- [58] Bingham J A C. Multi-carrier modulation for data transmission: An idea whose time has come. IEEE Communications Magazine, 1990, 28 (5) : 5-14.
- [59] Bölcskei H, Borgmann M, Paulraj A. Impact of the Propagation Environment on the Performance of Space-Frequency Coded MIMO-OFDM. IEEE JSAC, 2003, 21 (3) : 427–439.
- [60] I-METRA, D2 (Feb. 1999) IST-1999-11729 MIMO channel characterisation.
- [61] 3GPP (2007) TR 25.996, v7.0.0 3rd Generation Partnership Project; Technical Specification Group Radio Access Network; Spatial Channel Model For Multiple Input Multiple Output Simulations (Release 7) .
- [62] I-METRA, D2 v1.2 (Oct. 2002) IST-2000-30148 Channel characterisation.
- [63] 3GPP (March 2003) Correlation properties of SCM.SCM-127,SCM Conference Call March 28, 2003.

## 附录 G 接收信号数据矢量 $\mathbf{Y}$ 的 2 范数的计算公式推导

假设信道增益矩阵  $\mathbf{H}_l$  写成行矢量的形式为

$$\mathbf{H}_l = \left[ \left( \mathbf{h}_1^{(l)} \right)^T \quad \left( \mathbf{h}_2^{(l)} \right)^T \quad \cdots \quad \left( \mathbf{h}_{N_R}^{(l)} \right)^T \right]^T \in \mathbf{C}^{N_R \times N_T}$$

其中第  $i$  ( $i=1,2,\dots,N_R$ ) 个行矢量为  $\mathbf{h}_i^{(l)} = [\alpha_{1,i}^{(l)} \quad \alpha_{2,i}^{(l)} \quad \cdots \quad \alpha_{N_T,i}^{(l)}]$ ; 对接收信号矢量  $\mathbf{Y}$  做置换变换, 使其与第  $i$  ( $i=1,2,\dots,N_R$ ) 个行矢量  $\mathbf{h}_i^{(l)}$  有关的元素以传送码元  $\mathbf{c}_k$  ( $k=0,1,\dots,N-1$ ) 的次序排列, 且仍然记为  $\mathbf{Y}$ , 例如与行矢量  $\mathbf{h}_i^{(l)}$  有关联关系的元素为

$$\sqrt{\gamma} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_i^{(l)} e^{j2\pi 0l/N} \Delta \mathbf{c}_0 \\ \cdots \\ \mathbf{h}_i^{(l)} e^{j2\pi(N-1)l/N} \Delta \mathbf{c}_{N-1} \end{bmatrix} = \sqrt{\gamma} \begin{bmatrix} e^{j2\pi 0l/N} (\mathbf{h}_i^{(l)} \Delta \mathbf{c}_0) \\ \cdots \\ e^{j2\pi(N-1)l/N} (\mathbf{h}_i^{(l)} \Delta \mathbf{c}_{N-1}) \end{bmatrix} = \sqrt{\gamma} \begin{bmatrix} e^{j2\pi 0l/N} [\Delta \mathbf{c}_0^T (\mathbf{h}_i^{(l)})^T] \\ \cdots \\ e^{j2\pi(N-1)l/N} [\Delta \mathbf{c}_{N-1}^T (\mathbf{h}_i^{(l)})^T] \end{bmatrix}$$

式中,  $\gamma$  为信噪比。记对角矩阵  $\mathbf{D} = \text{diag}\{e^{j2\pi 0l/N}, \dots, e^{j2\pi(N-1)l/N}\}$ , 则有

$$\sqrt{\gamma} \begin{bmatrix} e^{j2\pi 0l/N} [\Delta \mathbf{c}_0^T (\mathbf{h}_i^{(l)})^T] \\ \cdots \\ e^{j2\pi(N-1)l/N} [\Delta \mathbf{c}_{N-1}^T (\mathbf{h}_i^{(l)})^T] \end{bmatrix} = \sqrt{\gamma} \mathbf{D}^l \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{c}_0^T \\ \cdots \\ \Delta \mathbf{c}_{N-1}^T \end{bmatrix} (\mathbf{h}_i^{(l)})^T = \sqrt{\gamma} \mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T (\mathbf{h}_i^{(l)})^T \quad (i=1,2,\dots,N_R)$$

所以接收信号矢量  $\mathbf{Y}$  可以写作

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\gamma} \sum_{l=0}^{L-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T \mathbf{h}_1^{(l)T} \\ \cdots \\ \mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T \mathbf{h}_{N_R}^{(l)T} \end{bmatrix} = \sqrt{\gamma} \sum_{l=0}^{L-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^{(l)T} \\ \cdots \\ \mathbf{h}_{N_R}^{(l)T} \end{bmatrix} = \sqrt{\gamma} \sum_{l=0}^{L-1} [\mathbf{I}_{N_R} \otimes (\mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T)] \text{vec}(\mathbf{H}_l^T)$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^H \mathbf{Y} &= \gamma \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} \text{vec}(\mathbf{H}_i^T)^H [\mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-i})] [\mathbf{I}_{N_R} \otimes (\mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T)] \text{vec}(\mathbf{H}_l^T) \\ &= \gamma \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} \text{vec}(\mathbf{H}_i^T)^H [\mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-i}) (\mathbf{D}^l \Delta \mathbf{C}^T)] \text{vec}(\mathbf{H}_l^T) \\ &= \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} \text{vec}(\mathbf{H}_i^T)^H [\mathbf{I}_{N_R} \otimes \gamma (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-i+l} \Delta \mathbf{C}^T)] \text{vec}(\mathbf{H}_l^T) \quad (\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n a_{i,l} x_i^* x_l) \end{aligned}$$

信道参数所对应的随机矢量  $\mathbf{z} = [\text{vec}(\mathbf{H}_0^T)^T \quad \text{vec}(\mathbf{H}_1^T)^T \quad \cdots \quad \text{vec}(\mathbf{H}_{L-1}^T)^T]^T$ , 令

$$\mathbf{A} = \gamma \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^0 \Delta \mathbf{C}^T) & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^1 \Delta \mathbf{C}^T) & \cdots & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{L-1} \Delta \mathbf{C}^T) \\ \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-1} \Delta \mathbf{C}^T) & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^0 \Delta \mathbf{C}^T) & \cdots & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{L-2} \Delta \mathbf{C}^T) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-(L-1)} \Delta \mathbf{C}^T) & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^{-(L-2)} \Delta \mathbf{C}^T) & \cdots & \mathbf{I}_{N_R} \otimes (\Delta \mathbf{C}^* \mathbf{D}^0 \Delta \mathbf{C}^T) \end{bmatrix}$$

显然, 矩阵  $\mathbf{A}$  包含了空时码、正交频分复用调制、宽带频率选择性信道有限长单位脉冲响应传输特征、传输信噪比因子等信息。则得

$$\mathbf{Y}^H \mathbf{Y} = \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z}$$

## 附录 H 成对差错概率的计算公式推导

由假设可知  $\mathbf{z}: \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  ( $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ ) 或者  $\mathbf{z}: \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ , 即向量  $\mathbf{z}$  的均值为零矢量或为非零矢量两种可能情形。协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathcal{C}^{L \cdot N_T \cdot N_R \times L \cdot N_T \cdot N_R}$ , 协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  也有两种可能情形, 即  $\boldsymbol{\Sigma}$  满秩或  $\boldsymbol{\Sigma}$  缺秩。

**情形 1**  $\boldsymbol{\Sigma}$  满秩, 随机矢量  $\mathbf{z}$  的概率分布密度函数为  $f_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{x}) = \det(\pi\boldsymbol{\Sigma})^{-1} \exp\{-\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}\}$ , 所以

$$\begin{aligned}
 \Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) &= E\left[\exp(-\mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z})\right] = \int f_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{x}) \exp(-\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
 &= \det(\pi\boldsymbol{\Sigma})^{-1} \int \exp\{-\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}\} \exp(-\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
 &= \det(\pi\boldsymbol{\Sigma})^{-1} \int \exp\{-\mathbf{x}^H (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \mathbf{A}) \mathbf{x}\} \mathrm{d}\mathbf{x} \\
 &= \frac{\det[\pi(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \mathbf{A})^{-1}]}{\det(\pi\boldsymbol{\Sigma})} \frac{1}{\det[\pi(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \mathbf{A})^{-1}]} \int \exp\{-\mathbf{x}^H (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \mathbf{A}) \mathbf{x}\} \mathrm{d}\mathbf{x} \\
 &= \frac{\det[\pi(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \mathbf{A})^{-1}]}{\det(\pi\boldsymbol{\Sigma})} \\
 &= \frac{\det[(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \mathbf{A})^{-1}]}{\det(\boldsymbol{\Sigma})} \quad (\det[\mathbf{A}^{-1}] = (\det[\mathbf{A}])^{-1}) \\
 &= \frac{1}{\det(\boldsymbol{\Sigma}) \cdot \det[(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \mathbf{A})]} \quad (\det[\mathbf{A}\mathbf{B}] = \det[\mathbf{A}]\det[\mathbf{B}]) \\
 &= \frac{1}{\det(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})}
 \end{aligned}$$

**情形 2**  $\boldsymbol{\Sigma}$  是缺秩的, 首先设  $\mathbf{A}$  为一对角矩阵, 即  $\mathbf{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}, 0, \dots, 0\}$ , 其中非零元满足关系式  $\lambda_1(\boldsymbol{\Sigma}) \geq \lambda_2(\boldsymbol{\Sigma}) \geq \dots \geq \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}(\boldsymbol{\Sigma}) > 0$ ,  $r(\boldsymbol{\Sigma}) = \text{rank}(\boldsymbol{\Sigma}) < N_T N_R L$ 。记  $\text{pdet}(\pi\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}$ ,  $\mathbf{A}^- \triangleq \text{diag}\{\lambda_1^{-1}, \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}^{-1}, 0, \dots, 0\}$ 。进一步设随机矢量  $\mathbf{z}: \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{A})$ , 其对应概率分布密度函数为

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^{r(\boldsymbol{\Sigma})} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\{-\mathbf{x}^H \mathbf{A}^- \mathbf{x}\} \triangleq \frac{1}{\text{pdet}(\pi\mathbf{A})} \exp\{-\mathbf{x}^H \mathbf{A}^- \mathbf{x}\} \quad (\text{注: 若 } \mathbf{A} \text{ 是满秩的,}$$

则  $\text{pdet}[\mathbf{A}] = \det[\mathbf{A}]$ ) 所以

$$\begin{aligned}
 \Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) &= E\left[\exp(-\mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z})\right] = \int f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \exp(-\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{\text{pdet}(\pi\mathbf{A})} \int \exp\{-\mathbf{x}^H \mathbf{A}^- \mathbf{x}\} \exp(-\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{\text{pdet}(\pi\mathbf{A})} \int \exp[-\mathbf{x}^H (\mathbf{A}^- + \mathbf{A}) \mathbf{x}] \mathrm{d}\mathbf{x} \\
 &= \frac{\text{pdet}(\pi(\mathbf{A}^- + \mathbf{A})^{-1})}{\text{pdet}(\pi\mathbf{A})} \frac{1}{\text{pdet}(\pi(\mathbf{A}^- + \mathbf{A})^{-1})} \int \exp[-\mathbf{x}^H (\mathbf{A}^- + \mathbf{A}) \mathbf{x}] \mathrm{d}\mathbf{x}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\text{pdet}(\mathcal{A})\text{pdet}(\mathcal{A} + \mathcal{A})} \\
&= \frac{1}{\text{pdet}(\tilde{\mathcal{I}} + \mathcal{A}\mathcal{A})} \quad (\tilde{\mathcal{I}} = \text{diag}\{\underbrace{1, \dots, 1}_{r(\Sigma)}, 0, \dots, 0\})
\end{aligned}$$

假设  $\mathbf{z}: \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \Sigma)$ , 进一步假设  $\Sigma = \mathbf{U}\mathcal{A}\mathbf{U}^H$ ,  $\mathbf{U}$  为酉矩阵, 即满足  $\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{I}$ . 令  $\mathbf{y} = \mathbf{U}^H\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{y}: \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathcal{A})$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{y}$ ,

$$\begin{aligned}
\Pr(\mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}) &= E\left[\exp(-\mathbf{z}^H \mathcal{A} \mathbf{z})\right] = E\left[\exp(-\mathbf{y}^H \mathbf{U}^H \mathcal{A} \mathbf{U} \mathbf{y})\right] \\
&= \frac{1}{\text{pdet}(\tilde{\mathcal{I}} + \mathcal{A}\mathbf{U}^H \mathcal{A} \mathbf{U})} \\
&= \frac{1}{\text{pdet}(\tilde{\mathcal{I}} + \mathbf{U}\mathcal{A}\mathbf{U}^H \mathcal{A})} \quad (\det[\mathbf{I}_m + \mathbf{A}\mathbf{B}] = \det[\mathbf{I}_n + \mathbf{B}\mathbf{A}]) \\
&= \frac{1}{\text{pdet}(\tilde{\mathcal{I}} + \Sigma \mathcal{A})}
\end{aligned}$$

情形 1  $\Sigma$  满秩, 随机矢量  $\mathbf{z}: \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ , 令  $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}$ , 则  $\mathbf{y}: \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \Sigma)$

$$\begin{aligned}
\Pr(\mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}) &= E\left[\exp(-\mathbf{z}^H \mathcal{A} \mathbf{z})\right] = E\left[\exp(-(\mathbf{y} + \boldsymbol{\mu})^H \mathcal{A} (\mathbf{y} + \boldsymbol{\mu}))\right] \\
&= \exp(-\boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A} \boldsymbol{\mu}) E\left[\exp(-\mathbf{y}^H \mathcal{A} \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A} \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \mathcal{A} \boldsymbol{\mu})\right]
\end{aligned}$$

我们首先求

$$\begin{aligned}
E\left[\exp(-\boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A} \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \mathcal{A} \boldsymbol{\mu})\right] &= \int_{\mathcal{R}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \exp(-\boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathcal{A} \boldsymbol{\mu}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{\det(\pi\Sigma)} \int_{\mathcal{R}} \exp(-\mathbf{x}^H \Sigma^{-1} \mathbf{x}) \exp(-\boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathcal{A} \boldsymbol{\mu}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \frac{\exp(\boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A}^H \Sigma \mathcal{A} \boldsymbol{\mu})}{\det(\pi\Sigma)} \int_{\mathcal{R}} \exp(-\mathbf{x}^H \Sigma^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathcal{A} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A}^H \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A}^H \Sigma \mathcal{A} \boldsymbol{\mu}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \frac{\exp(\boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A} \Sigma \mathcal{A} \boldsymbol{\mu})}{\det(\pi\Sigma)} \int_{\mathcal{R}} \exp(-(\mathbf{x} + \Sigma \mathcal{A} \boldsymbol{\mu})^H \Sigma^{-1} (\mathbf{x} + \Sigma \mathcal{A} \boldsymbol{\mu})) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \exp(\boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A} \Sigma \mathcal{A} \boldsymbol{\mu})
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
E\left[\exp(-\mathbf{y}^H \mathcal{A} \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A} \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \mathcal{A} \boldsymbol{\mu})\right] &= \frac{1}{\det(\pi\Sigma)} \int_{\mathcal{R}} \exp(-\mathbf{x}^H \mathcal{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathcal{A} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A}^H \mathbf{x}) \exp(-\mathbf{x}^H \Sigma^{-1} \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{\det(\pi\Sigma)} \int_{\mathcal{R}} \exp(-\mathbf{x}^H \mathcal{A} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A}^H \mathbf{x}) \exp(-\mathbf{x}^H \Sigma^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathcal{A} \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \frac{(\Sigma^{-1} + \mathcal{A})^{-1}}{\det(\pi\Sigma)} \int_{\mathcal{R}} \exp(-\mathbf{x}^H \mathcal{A} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A}^H \mathbf{x}) \exp(-\mathbf{x}^H \Phi^{-1} \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \frac{\det(\pi\Phi)}{\det(\pi\Sigma) \det(\pi\Phi)} \int_{\mathcal{R}} \exp(-\mathbf{x}^H \Phi^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathcal{A} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A}^H \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \frac{\det(\pi\Phi) \exp(\boldsymbol{\mu}^H \mathcal{A} \Phi \mathcal{A} \boldsymbol{\mu})}{\det(\pi\Sigma)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\exp(\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\mu})}{\det(\mathbf{I} + \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma})}$$

利用逆矩阵引理

$$(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{BDC})^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{AB}(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CAB})^{-1} \mathbf{CA}$$

有关系式

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} - (\mathbf{A}^{-1} + \boldsymbol{\Sigma})^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{A}(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A})^{-1}$$

所以当  $E(\mathbf{z}) = \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$  时有

$$E[\exp(-\mathbf{z}^H \mathbf{Az})] = \frac{\exp(-\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A}(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\mu})}{\det(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A})}$$

情形2  $\boldsymbol{\Sigma}$  是缺秩的, 随机矢量  $\mathbf{z}: \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $E(\mathbf{z}) = \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ , 令  $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}$ , 则  $\mathbf{y}: \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) &= E[\exp(-\mathbf{z}^H \mathbf{Az})] = E[\exp(-(\mathbf{y} + \boldsymbol{\mu})^H \mathbf{A}(\mathbf{y} + \boldsymbol{\mu}))] \\ &= \exp(-\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}) E[\exp(-\mathbf{y}^H \mathbf{A} \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu})] \end{aligned}$$

首先求  $E[\exp(-\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu})]$ , 为此设  $\mathbf{A}$  为一对角矩阵,  $\mathbf{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}, 0, \dots, 0\}$ , 随机矢量  $\mathbf{z}: \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{A})$  的概率分布密度函数为

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \triangleq \frac{1}{\text{pdet}(\pi \mathbf{A})} \exp\{-\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}\}$$

所以

$$\begin{aligned} E[\exp(-\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu})] &= \int f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \exp(-\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\text{pdet}(\pi \mathbf{A})} \int \exp\{-\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}\} \exp(-\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{\exp\{\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}\}}{\text{pdet}(\pi \mathbf{A})} \int \exp\{-(\mathbf{x} + \mathbf{A} \boldsymbol{\mu})^H \mathbf{A} (\mathbf{x} + \mathbf{A} \boldsymbol{\mu})\} \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \exp(\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} E[\exp(-\mathbf{y}^H \mathbf{A} \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu})] &= \int f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \exp(-\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\text{pdet}(\pi \mathbf{A})} \int \exp\{-\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}\} \exp(-\mathbf{x}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\text{pdet}(\pi \mathbf{A})} \int \exp\{-\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}\} \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\text{pdet}(\mathbf{A}) \text{pdet}(\pi \boldsymbol{\Phi})} \int \exp\{-\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}\} \exp(-\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\text{pdet}(\mathbf{A}) \text{pdet}(\boldsymbol{\Delta} + \mathbf{A})} \exp(\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} (\boldsymbol{\Delta} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}) \\ &= \frac{1}{\text{pdet}(\tilde{\mathbf{I}} + \mathbf{A} \mathbf{A})} \exp(\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A} (\boldsymbol{\Delta} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}) \end{aligned}$$

所以当随机矢量  $\mathbf{z}: \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A})$ ,  $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$  时, 利用逆矩阵引理,  $(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{BDC})^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{AB}(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CAB})^{-1} \mathbf{CA}$ ,

有关系式  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} - (\mathbf{A}^{-1} + \boldsymbol{\Sigma})^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{A}(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})^{-1}$  (注意此处单位矩阵  $\mathbf{I}$  是由矩阵  $\mathbf{A}$  产生的, 所以是满的), 所以当  $E(\mathbf{z}) = \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$  时有

$$\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = E\left[\exp(-\mathbf{z}^H \mathbf{A}\mathbf{z})\right] = \frac{1}{\text{pdet}(\tilde{\mathbf{I}} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{A})} \exp(-\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A}(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\mu})$$

利用同样方法证明  $\boldsymbol{\Sigma}$  是缺秩的, 随机矢量  $\mathbf{z}: \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , 时

$$\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = E\left[\exp(-\mathbf{z}^H \mathbf{A}\mathbf{z})\right] = \frac{1}{\text{pdet}(\tilde{\mathbf{I}} + \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})} \exp(-\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{A}(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\mu})$$

将传输信噪比因子  $E_s / 4\sigma_n^2$  归并于信道随机矢量  $\mathbf{z}$  中, 因而改变了  $\mathbf{z}$  的均值因子及其协方差矩阵因子。若有必要, 可以记常数  $\gamma = E_s / 4\sigma_n^2$ 。  $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{L \cdot N_T \cdot N_R \times L \cdot N_T \cdot N_R}$  可以人为地使其满秩。

另外, 若  $\mathbf{C}$  为正交编码矩阵, 则  $\mathbf{A}$  是满秩的。

下面就经 OFDM 调制的码字相关矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{z}$  的协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  的一些特殊结构, 来进一步分析成对差错概率的表达式。假设对于集合  $\{l: l=0, \pm 1, \dots, \pm(L-1)\}$  的  $l$ , 有  $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{C}^* \mathbf{D}' \boldsymbol{\Delta}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}_{N_T} \cdot \delta(l)$ , 则  $\mathbf{A} = \gamma \mathbf{I}_{N_T} \otimes \mathbf{I}_{N_R}$ , 事实上若  $\mathbf{C}$  为正交编码矩阵, 这个关系是近似成立的。

#### 情形 1 $\boldsymbol{\Sigma}$ 满秩

(1) 随机矢量  $\mathbf{z}: \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ , 所以

$$\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = \frac{1}{\det(\mathbf{I} + \gamma \boldsymbol{\Sigma})} = \prod_{i=1}^{N_T N_R L} \frac{1}{1 + \gamma \lambda_i(\boldsymbol{\Sigma})} \leq \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{N_T N_R L}(\boldsymbol{\Sigma})} \right]^{N_T N_R L}$$

这时成对差错概率完全由  $\boldsymbol{\Sigma}$  的谱特性决定, 系统具有满空一时分集特性。

(2) 若假设  $\boldsymbol{\Sigma}$  满秩且  $E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ , 构造特征空间均值矢量  $\mathbf{b} = \mathbf{U}^H \boldsymbol{\mu}$ , 依据特征分解理论  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , 所以

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) &= \frac{\exp(-\boldsymbol{\mu}^H \gamma(\mathbf{I} + \gamma \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\mu})}{\det(\mathbf{I} + \gamma \boldsymbol{\Sigma})} \\ &= \prod_{i=1}^{N_T N_R L} \frac{1}{1 + \gamma \lambda_i(\boldsymbol{\Sigma})} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma |b_i|^2}{1 + \gamma \lambda_i(\boldsymbol{\Sigma})}\right) \leq \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{N_T N_R L}(\boldsymbol{\Sigma})} \right]^{N_T N_R L} \cdot \exp\left(-\sum_{|b_i| \neq 0} \frac{\gamma |b_i|^2}{1 + \gamma \lambda_i(\boldsymbol{\Sigma})}\right) \end{aligned}$$

因此  $\mathbf{b}$  因子的存在显然是有利的, 这反映了更多的直达波是有利于信号传输的; 同样也非常明确地表示信道的延迟传输路径越多对信号传输也越有利。

#### 情形 2 矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是缺秩

(1) 矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  是缺秩, 随机矢量  $\mathbf{z}: \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ , 所以这时有

$$\Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) = \frac{1}{\text{pdet}(\tilde{\mathbf{I}} + \gamma \boldsymbol{\Sigma})} = \prod_{i=1}^{r(\boldsymbol{\Sigma})} \frac{1}{1 + \gamma \lambda_i(\boldsymbol{\Sigma})} \leq \left[ \frac{1}{1 + \gamma \lambda_{r(\boldsymbol{\Sigma})}(\boldsymbol{\Sigma})} \right]^{r(\boldsymbol{\Sigma})}$$

这时成对差错概率同样是完全由  $\boldsymbol{\Sigma}$  的谱特性决定, 但系统只能达到空一时分集数为  $r(\boldsymbol{\Sigma}) < N_T N_R L$ 。

(2) 若假设  $\boldsymbol{\Sigma}$  缺秩且  $\mathbf{z}: \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ , 构造特征空间均值矢量  $\mathbf{b} = \mathbf{U}^H \boldsymbol{\mu}$ ,

依据特征分解理论  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ，所以

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}) &= \frac{\exp\left(-\boldsymbol{\mu}^H \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\mu}\right)}{\text{pdet}(\tilde{\mathbf{I}} + \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\Sigma})} \\ &= \prod_{i=1}^{r(\boldsymbol{\Sigma})} \frac{1}{1 + \boldsymbol{\gamma}\lambda_i(\boldsymbol{\Sigma})} \cdot \exp\left(-\sum_{i=1}^{r(\boldsymbol{\Sigma})} \frac{\boldsymbol{\gamma}|b_i|^2}{1 + \boldsymbol{\gamma}\lambda_i(\boldsymbol{\Sigma})}\right) \cdot \exp\left(-\boldsymbol{\gamma} \sum_{i>r(\boldsymbol{\Sigma})} |b_i|^2\right) \end{aligned}$$

在这种情形下，将  $\boldsymbol{\Sigma}$  的特征矢量  $\mathbf{U}$  分为两部分，即弥散子空间特征矢量  $\mathbf{U}_{\text{disp}}$ （对应于  $\lambda_i(\boldsymbol{\Sigma}) \neq 0$ ）与收缩子空间特征矢量  $\mathbf{U}_{\text{shrink}}$ （对应于  $\lambda_i(\boldsymbol{\Sigma}) = 0$ ），它们分别构成弥散信号子空间和收缩信号子空间。特征空间均值矢量  $\mathbf{b}$  因子依据这个分解分为色散信号的直达波与收缩信号直达波。从上面表达式可以得到，无论在弥散信号子空间还是收缩信号子空间，直达波信号的存在对传输都是有利因素。

# 第9章 凸优化理论与MIMO系统收发机的设计

## 引言

最优化理论与MIMO系统和空时编码有着内在的联系,这一点从前面的叙述中已经明晰地展现出。最优化理论融贯于MIMO系统与空时编码的整个理论体系。为了能更好地理解 and 掌握这一思想,本章将分为三部分:第一部分是对于前面各个章节中有关涉及最优化理论问题的简要回顾,这是一种具有总结和前后呼应性论述;第二部分论述凸优化的基本概念及其对偶理论——Lagrange 乘子理论,当然由于篇幅和中心议题的限制,论述只能是基础性的;第三部分是关于MIMO系统的线性最优发送和接收的设计问题。

## 9.1 优化理论的一些基本概念

最优化理论渗透于整个多输入多输出系统和空时编码体系,从第2章的信道容量的基本定义,发送端已知信道信息时信道容量的优化问题;第3章成对差错概率分析优化与空时编码准则的建立;第4章空时正交码的设计理论与单符号最大似然解码算法;第5章格型空时码的设计问题涉及分集增益、编码增益和最大似然联合解码算法——Viterbi 译码算法;第6章空间复用的BLAST编码和最优译码算法;第7章考虑空间分集与传输速率最优折中及面向符号的最低复杂度译码算法;第8章所讨论的OFDM峰均值比问题与空一时一频三维分集增益的编码及解码问题等每一个环节均与最优化理论息息相关。

这里以在理论研究和工程实践中最常遇到的“最小二乘”(Least-Squares)问题为例来说明优化理论。该问题表述为

$$\min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 = \min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i)^2 \quad (9.1)$$

式中,矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times m}$  ( $n \geq m$ ); 矢量  $\mathbf{a}_i$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的列矢量;  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ 。当矩阵  $\mathbf{A}$  满足列满秩时,最小二乘问题(9.1)的解为

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (9.2)$$

式中,  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的左广义逆。

**注意:** 在优化问题(9.1)中对自由变量  $\mathbf{x}$  无任何限制,但在一般优化问题中常对  $\mathbf{x}$  增加一些限制条件,这些条件可以解释为对自由变量  $\mathbf{x}$  变化范围的限制,但这种限制往往改变问题实质,使一个有解问题演变为无解。另外,就是要得到解  $\mathbf{x}$  的表达式(9.2), 矩阵

$A$  必须满足一定的如列满秩条件, 否则可能要采用“降维”等技术对问题 (9.1) 进行修正。对于能够得到式 (9.2) 表示问题 (9.1) 的解这种情况我们称之为优化问题 (9.1) 有“闭形式 (closed-form)”解或简单称为“闭式”解。

传统观点认为线性是优化问题的核心, 与非线性优化问题相反, 线性优化问题是有闭式解的。然而 Rockafellar 在 1993 综述文献[1]明确指出, 优化问题的分水岭不是线性与非线性, 而是凸与非凸<sup>[2]</sup>。简单地说, 凸优化问题总是能够被求解的, 或有闭式解或有收敛的数值解, 而线性优化问题只是凸优化问题中一个很小的类别。从工程角度看, 若一个优化问题能有凸形式的表示即宣示该问题已解决。在工程实践中, 绝大部分工程问题的直接表述都不是一个“凸优化”问题, 但是是一个潜在的凸优化问题, 我们的任务往往是揭示其内在的“凸”性。因此在本小节以论述凸优化的基本概念作为我们的工作基础。基于这些考虑我们提出下面一些关于优化问题的基本概念和一般表述。

**定义 9.1 (凸及仿射集合)**<sup>[2]</sup> 一个 ( $n$  维欧氏空间  $\mathbf{R}^n$  的子集合) 集合  $C$  被称为凸的,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$  以及常数  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ), 有下面条件成立:

$$\theta \mathbf{x} + (1 - \theta) \mathbf{y} \in C$$

即集合  $C$  中任意两点的连线仍包含在其中, 称之为关于任意两点连线的“封闭性”。一个集合  $C$  被称为仿射集, 若对于任意  $n$  个点  $\mathbf{x}_i \in C$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 以及  $n$  个常数  $\theta_i$  ( $0 \leq \theta_i \leq 1$ ,  $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = 1$ ), 有下面条件成立:

$$\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \theta_n \mathbf{x}_n \in C$$

将具有上面限定条件的常数  $\theta_i$  构成的点集  $\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \theta_n \mathbf{x}_n$  称为“超线段”, 仿射集合  $C$  关于其有关超线段是封闭的。显然仿射集是凸集, 反之亦然。

**定义 9.2 (凸函数)**<sup>[2]</sup> 一个函数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  被称为凸的, 若函数  $f$  的定义域  $\text{dom } f$  是一个凸集合, 且  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{dom } f$  以及常数  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ), 有

$$f(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta) \mathbf{y}) \leq \theta f(\mathbf{x}) + (1 - \theta) f(\mathbf{y}) \quad (9.3)$$

上式的几何意义是点  $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$  与点  $(\mathbf{y}, f(\mathbf{y}))$  间的连线属于函数  $f$  值域集合, 即  $(\text{dom } f, f(\text{dom } f)) \subset \mathbf{R}^{n+1}$  是凸集合。常称式 (9.3) 为三角不等式。

三角不等式及其推广: 函数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  被称为凸的, 则对于任意  $l$  个点  $\mathbf{x}_i \in \text{dom } f$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ) 以及  $l$  个常数  $\theta_i$  ( $0 \leq \theta_i \leq 1$ ,  $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_l = 1$ ), 有

$$f(\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \theta_l \mathbf{x}_l) \leq \theta_1 f(\mathbf{x}_1) + \theta_2 f(\mathbf{x}_2) + \dots + \theta_l f(\mathbf{x}_l)$$

对于任意密度函数  $p(\mathbf{x})$  ( $p(\mathbf{x}) \geq 0$ ,  $\int p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ ) 有

$$f\left(\int p(\mathbf{x}) \mathbf{x} d\mathbf{x}\right) \leq \int p(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

若  $\mathbf{x}$  为随机矢量, 则有

$$f(E\{\mathbf{x}\}) \leq E\{f(\mathbf{x})\}$$

这几个关系式说明凸函数与仿射函数是等价的概念。

**例 9.1 (几个经常遇到的目标函数的凸性)**<sup>[2]</sup>

(1) 所有在  $n$  维欧氏空间  $\mathbf{R}^n$  上的范数  $\|\cdot\|_p$  是  $\mathbf{R}^n$  上凸函数。目标函数 (9.1) 是凸的。

(2)  $\mathbf{R}^n$  上最大化函数  $\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  是  $\mathbf{R}^n$  上凸函数。

(3)  $\mathbf{R}^n$  上对数—指数—和函数  $f(\mathbf{x}) = \log(e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n})$  是  $\mathbf{R}^n$  上凸函数。

(4) 几何平均函数  $f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n (x_i)^{1/n}$  是  $\mathbf{R}^n$  正象限  $\mathbf{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid x_i > 0, \forall i(1 \leq i \leq n)\}$  上的凸函数。由第 2 章至第 5 章的讨论, 这是一个与系统成对差错概率有关的函数。

(5) 对数行列式函数是  $f(\mathbf{X}) = \log \det(\mathbf{X})$  是  $\text{dom } f = \mathbf{S}_+^n$  ( $n \times n$  对称正定矩阵集) 上的凸函数。由第 2 章的讨论, 这是一个与系统信息熵有关的函数。系统信息熵函数是凸的, 关于系统信息熵的优化是凸优化。

(6) 设函数  $f(\mathbf{x}) = x_{[1]} + x_{[2]} + \cdots + x_{[k]}$  是  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  的  $k$  个最大分量 (即  $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \cdots \geq x_{[k]}$ ) 的和, 则  $f$  是凸的且关于每个分量是递增的, 这是一个与下面要讨论的输入端优化问题有关的凸函数。

**定义 9.3 (仿射函数)** 一个函数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  被称为仿射的, 若函数  $f$  是一个线性函数与常数之和, 即函数  $f$  有形式:  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b$ 。 ( $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$  是常数矢量,  $b \in \mathbf{R}$  是常数)

利用这些基本概念和术语, 有下面关于优化问题最一般的表述。

**定义 9.4** 一个优化问题总可以表述为如下优化目标及等式和不等式约束的标准形式 [2]:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0, 1 \leq i \leq m \\ h_i(\mathbf{x}) = 0, 1 \leq i \leq p \end{aligned} \quad (9.4)$$

式中,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  为优化变量;  $f_0(\cdot)$  为代价函数或目标函数; 函数  $f_1, \dots, f_m$  是  $m$  个不等式约束; 函数  $h_1, \dots, h_p$  是  $p$  个等式约束。

若目标函数和  $m$  个不等式约束为凸函数, 同时  $p$  个等式约束为线性或仿射型, 则优化问题 (9.4) 为凸优化 (或凸规划)。

一个属于优化问题 (9.4) 定义域内的点  $\mathbf{x}$  (即点  $\mathbf{x}$  在目标函数  $f_0(\cdot)$  的定义域内) 被称为是“可行”点, 若它满足所有的不等式约束条件  $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 与所有的等式约束条件  $h_i(\mathbf{x}) = 0$  ( $1 \leq i \leq p$ ), 优化问题 (9.4) 被称为是“可行的”; 若它至少存在一个可行点  $\mathbf{x}$ , 即可行点集非空, 否则被称为是“不可行的”。

优化问题 (9.4) 的最优解记为  $\mathbf{x}^*$ , 目标函数在最优解  $\mathbf{x}^*$  处的值记为  $f^*$ , 即  $f^* = f_0(\mathbf{x}^*)$ 。

**定义 9.5 (一种弱顺序关系)** 设矢量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  中的元素分别按递增顺序排列得到序列  $x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[n]}$  和  $y_{[1]}, y_{[2]}, \dots, y_{[n]}$ , 若

$$\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\sum_{i=1}^n x_{[i]} = \sum_{i=1}^n y_{[i]}$$

则称矢量  $\mathbf{x}$  被矢量  $\mathbf{y}$  控制, 或称矢量  $\mathbf{x}$  “弱小于” 矢量  $\mathbf{y}$  (或称矢量  $\mathbf{x}$  和矢量  $\mathbf{y}$  有某弱顺

序关系), 记为  $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$  或  $\mathbf{x} \prec^w \mathbf{y}$ 。

弱顺序关系是对数值不等式关系的推广。例如, 两个矩阵差的非负定性、矩阵的对称性、复矩阵的厄尔米特 (Hermitian) 性等都是弱顺序关系。

**定义 9.6** (Schur-凹、凸)<sup>[2]</sup> 设函数  $f: \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$  且  $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ , 若不等式  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y})$  成立, 则称  $f$  为 Schur-凹的; 若反向不等式成立, 则称  $f$  为 Schur-凸的。

## 9.2 凸优化及其对偶理论

上面论述了凸优化的基本概念, 本小节将表述凸优化的主要类别, 且将致力于如何将一般优化问题转化为凸优化的方法的简单论述。

### 9.2.1 凸优化的定义和分类

若优化问题 (9.4) 中的函数  $f_i$  ( $0 \leq i \leq m$ ) 和  $h_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) 是线性或仿射的, 则称对应优化问题 (9.4) 为优化问题或线性规划 (Linear Program, LP), 其求解也具有线性复杂度; 若优化问题 (9.4) 线性的目标函数  $f_0(\cdot)$  为二次型函数而且所有约束均为线性或仿射型, 则称对应优化问题 (9.4) 为二次规划 (Quadratic Program, QP) 或二次型优化; 若优化问题 (9.4) 的目标函数  $f_0(\cdot)$  为二次型函数且所有不等式约束也为二次型函数, 则称对应优化问题 (9.4) 为二次约束二次规划 (Quadratic Constrained Quadratic Program, QCQP) 或二次型约束二次型优化。

一个与二次规划问题密切相关的优化问题称为二次锥规划 (Second-Order Cone Program, SOCP) 或二次锥优化, 它包含如下的不等式约束

$$\|\mathbf{Ax} + \mathbf{b}\| \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d \quad (9.5)$$

式中,  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{k \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^k$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ ,  $d \in \mathbf{R}$  为确定常系数矩阵和矢量。注意式 (9.5) 确定多维空间的一个凸集。这个凸集实质为二阶锥  $\mathcal{C}^n = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq t\}$  的一个仿射变换。若系数矢量  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ , 则锥约束 (9.5) 蜕化为二次型约束。相比二次锥规划更“普遍”的是所谓的半定规划 (Semi-Definite Program, SDP)<sup>[2,3]</sup>。它具有矩阵不等式约束

$$\mathbf{x}_1 \mathbf{F}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n \mathbf{F}_n + \mathbf{G} \leq \mathbf{0}$$

式中, 矩阵  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n, \mathbf{G} \in \mathcal{S}^K$  (此处  $\mathcal{S}^K$  为  $K \times K$  维厄尔米特矩阵集合)。矩阵  $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$  是指差矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  为半正定的。

注意: 对凸优化问题 (9.4) 的一个非常有用的广义化是“松弛”其不等式约束为矢量或矩阵“值”, 将通常意义的不等式“松弛”为“广义”不等式<sup>[2]</sup>:

$$\min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}), \text{ 服从 } f_i(\mathbf{x}) \preceq_{\kappa_i} \mathbf{0}, 1 \leq i \leq m, \quad h_i(\mathbf{x}) = 0, 1 \leq i \leq p \quad (9.6)$$

式中, 广义不等式  $\preceq_{\kappa_i}$  由一个恰当锥  $\kappa_i$  确定 (其中  $\mathbf{a} \preceq_{\kappa} \mathbf{b}$  是指  $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \kappa$ )。且约束函数  $f_i$  是  $\kappa_i$  型锥 (函数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  是一个  $\kappa_i$  型锥, 若其定义域是凸集合, 且  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{dom } f$  和参



数  $\theta \in [0, 1]$  有广义不等式关系  $f(\theta x + (1-\theta)y) \preceq_{\kappa} \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$  成立)。

在最简单的凸优化问题中具有广义不等式约束的锥优化可以表示为

$$\min_x c^T x, \quad Fx + g \preceq_{\kappa} 0, \quad Ax = b \quad (9.7)$$

它具有线性目标函数和等式约束<sup>[2,4]</sup>。

锥优化 (CP) 优于线性规划 (LP)、二次锥规划 (SOCP) 和半定规划 (SD) 缘于以下几个方面:

- (1) 如果式 (9.7) 中  $\kappa = \mathbf{R}_+^n$  ( $n$  维欧氏空间的非负象限), 则式 (9.7) 中的广义不等式  $\preceq_{\kappa}$  对应于矩阵元素间不等式, 进而原锥优化 (CP) 演变成线性规划 (LP)。
- (2) 如果  $\kappa = \mathbf{C}^n$  ( $n$  维二阶锥), 广义不等式  $\preceq_{\kappa}$  对应于式 (9.5) 的不等式约束, 凸优化问题 (9.7) 演绎成二次锥规划 (SOCP)。
- (3) 如果  $\kappa = \mathbf{S}_+^n$  (半正定锥), 广义不等式  $\preceq_{\kappa}$  对应于矩阵间不等式, 凸优化问题 (9.7) 简化成半定规划 (SD)。

凸优化问题的分类如表 9.1 所示。

表 9.1 凸优化问题的分类

类别	目标函数特性	约束条件特性
线性规划	线性或仿射型	线性或仿射型
二次规划	二次型	线性或仿射型
二次约束二次规划	二次型	$f_i$ 为二次型, $h_i$ 为线性或仿射型
二次锥规划	二次型	$f_i$ 为二次锥, $h_i$ 为线性或仿射型
半定规划	二次型	$f_i$ 为半定型, $h_i$ 为线性或仿射型

## 9.2.2 将一般优化问题转化为凸优化问题

一个凸优化问题有闭形式解或可以求得收敛数值解, 因此一个工程问题能表示为凸优化则可宣示此工程问题的完全解决。然而大多数原始工程问题不具备凸形式, 但通常是一个潜在凸优化问题。工程技术人员的主要任务是将它们“转化”成“显式”凸优化。此处的显式是指上面所述的任何一类凸优化问题的形式。

关键问题是在当前还不存在一个系统的转化方法, 而且“转化”往往具有特别的“艺术”。因此, 只能从基础的方法论述入手, 纵观当前所涉及的转化手段虽然较多, 但相对比较适用的还是下面要讨论的拉格朗日乘子对偶法。这里重点讨论拉格朗日乘子对偶法以及能够保证此对偶解与原始优化问题解一致的 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件。

实际上没有必要使原优化问题完全等价于一个凸优化问题。事实上, 如果两个优化问题在某一对应映射条件下具有完全相同的最优解集合就足够。换句话说, 关键是两个优化问题具有等价的最优解集合而非其他。问题的困难恰在未知解集合前提下如何变“魔术”般得出这个具有等价解集合的凸优化问题。因此问题的解决往往具有一定经验基础, 但也有一个最普通且“恒通”的可遵循的方法就是所谓对约束的“松弛”, 这将通过下面的论

述得以理解和领会。

有一种松弛的方法是较普遍采用的，即将问题拓展到更高维空间，如信号与系统课程中傅里叶变换问题扩展成  $s$  变换或  $z$  变换。

**定义 9.7** 函数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  的悬浮 (Epigraph) 集定义为  $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in \text{dom } f\}$ ，此集合是  $\mathbf{R}^{n+1}$  的一个子集。定义函数  $f$  的悬浮为  $\text{epi } f = \{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{x} \in \text{dom } f, f(\mathbf{x}) \leq t\}$ ； $\text{epi } f \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 。结论：一个函数  $f$  是凸的，当且仅当函数  $f$  的悬浮为凸的。

**定义 9.8** 函数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  的透视 (Perspective) 定义为函数  $g: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ ，有

$$g(\mathbf{x}, t) = tf(\mathbf{x}/t)$$

函数  $g$  的定义域为  $\text{dom } g = \{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{x}/t \in \text{dom } f, t > 0\}$ ，此集合是  $\mathbf{R}^{n+1}$  的一个子集。结论：一个函数  $f$  是凸的，当且仅当函数  $f$  的透视  $g$  为凸的。

利用函数的悬浮和透视变换讨论其对应优化问题可参考文献[2]。

### 9.2.3 拉格朗日乘子对偶理论和 KKT 条件

拉格朗日乘子对偶理论是一个非常成熟的方法，它将“原始”附加约束条件的最小化问题 (9.4) 与一个无约束的对偶极大化问题相关联。恰在众多情形，此对偶极大化问题相比“原始”优化问题是容易求解的。而在对偶理论中奠基性的结果当属所有“原始”对偶解必须满足 KKT 条件。借助于对 KKT 条件的分析研究，“原始”优化问题在多数情形下都可以得到闭形式解<sup>[2,4]</sup>。对应于“原始”优化问题 (9.4) 的拉格朗日对偶函数为

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n v_i h_i(\mathbf{x}) \quad (9.8)$$

式中， $\lambda_i$  和  $v_i$  为分别与第  $i$  个不等式约束  $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$  和第  $i$  个等式约束  $h_i(\mathbf{x}) = 0$  关联的拉格朗日乘子。优化变量  $\mathbf{x}$  被称为“原始”变量；而拉格朗日乘子变量  $\boldsymbol{\lambda}$  和  $\mathbf{v}$  被称为“对偶”变量；原目标函数  $f_0(\mathbf{x})$  被称为“原始”目标；而函数

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = \inf_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) \quad (9.9)$$

被称为“对偶”目标。对偶目标  $g(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v})$  是变量  $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v})$  的凸函数，即使“原始”问题是非凸的（因为  $g(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v})$  是变量  $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v})$  的仿射变换）。

**注意：**在式 (9.9) 中采用下确界函数定义，从数学角度下，确界函数是用极限求“最小”；另外，这个下确界是关于所有变量  $\mathbf{x}$  而非仅仅对可行集。

若  $\boldsymbol{\lambda} \geq 0$ ，则对偶变量  $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v})$  是对偶可行的。其结果是对于所有可行变量  $\mathbf{x}$  和对偶可行变量  $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v})$ ，关系式  $f_0(\mathbf{x}) \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v})$  成立。因此，最大化对偶目标  $g(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v})$  将得到原始优化问题 (9.4) 最优值  $f^*$  的一个最紧致的下界，即

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}} g(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) \text{ 服从 } \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \quad (9.10)$$

这是一个凸优化问题。特别应指出原始对偶可行点对  $(\mathbf{x}, (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}))$  将原始（对偶）优化值局限于区间：

$$f^* \in [g(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}), f_0(\mathbf{x})] \quad (9.11)$$

这一性质可为优化算法提供直接的停止迭代准则。

原始优化目标值  $f^*$  与对偶优化目标值  $g^*$  的差值被称为对偶间隔（差距）。一般情形下满足  $f^* - g^* \geq 0$ ，称为弱对偶；若满足  $f^* - g^* = 0$ ，则称为强对偶。在凸分析中关于“原始”与“对偶”优化问题有一个中心结论是<sup>[2,3]</sup>：当优化问题是凸的，则在一些“弱”条件下，强对偶性成立。因而原始优化问题（9.4）可以通过其对偶的凸优化问题求解。

另一个重要结论是原始优化问题和对偶优化问题的解  $\mathbf{x}^*$  和  $(\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{v}^*)$  由 KKT 条件链接在一起（拉格朗日对偶函数（9.8）在最优解  $(\mathbf{x}^*, (\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{v}^*))$  处的梯度等于零条件）：

$$\left. \begin{aligned} f_i(\mathbf{x}^*) &\leq 0, & \lambda_i^* &\geq 0 \quad (1 \leq i \leq m) \\ h_i(\mathbf{x}^*) &= 0, & & \quad (1 \leq i \leq p) \\ \lambda_i^* f_i(\mathbf{x}^*) &= 0, & & \quad (1 \leq i \leq m) \\ \nabla_x f_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla_x f_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^p v_i^* \nabla_x h_i(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

KKT 条件对于强对偶成立是充分且必要的<sup>[2,5]</sup>。事实上，当 KKT 条件成立时，对偶间隔（差距）等于零（强对偶成立）：

$$g(\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{v}^*) = f_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^p v_i^* h_i(\mathbf{x}^*) = f_0(\mathbf{x}^*)$$

因此，若 KKT 条件解决，意味着原始优化问题和对偶优化问题完全解决。因为无约束优化问题（9.9）意味着将一个一般优化问题转化为一个凸优化。

我们的目的是将上面所讨论的优化理论应用于 MIMO 系统的设计，当然 MIMO 系统的设计问题应该做总体考量。但为能简化论述，抓住主要矛盾，解决主要问题，这里予以分别论述。

## 9.3 MIMO 系统接收端的优化问题

点对点多输入多输出系统的最佳线性收发滤波器设计是一个凸优化问题<sup>[6-8]</sup>。本节主要从线性收发滤波器优化设计的准则和对应问题的凸性予以阐述。

### 9.3.1 MIMO 系统发送端和接收端信号模型

考虑一个具有  $N_T$  个发射阵元和  $N_R$  个接收阵元的多输入多输出系统，接收信号与发送信号间的关系可以表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (9.13)$$

式中， $\mathbf{s} \in \mathbf{C}^{N_T}$  为发送信号矢量； $\mathbf{H} \in \mathbf{C}^{N_R \times N_T}$  为信道增益矩阵； $\mathbf{y} \in \mathbf{C}^{N_R}$  是接收信号矢量； $\mathbf{n} \in \mathbf{C}^{N_R}$  为零均值循环对称复高斯加噪声矢量。由于考虑到其他干扰因素，所以通常  $\mathbf{n}$  为

色噪声，其协方差矩阵为  $\mathbf{R}_n$ 。

假设发送信号历经“线性”预编码，即

$$\mathbf{s} = \mathbf{B}\mathbf{x} \quad (9.14)$$

式中， $\mathbf{B} \in \mathbf{C}^{N_T \times N_L}$  称为线性预编码矩阵； $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^{N_L}$  是长度为  $N_L$  的数据矢量（通常  $\mathbf{x}$  为源于调制符号星座图的伪随机矢量，其均值为零，且满足  $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = \mathbf{I}$ ，即所谓的单位能量条件以便将系统发送功率归于发送端滤波器进行优化配置）。为简化叙述过程，取  $N_L = \min\{N_T, N_R\}$ 。传输信号总平均功率为

$$P_0 = E\{\|\mathbf{s}\|^2\} = \text{tr}\{\mathbf{B}\mathbf{B}^H\} \quad (9.15)$$

类似地，假设接收端为线性解码器，即

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^H \mathbf{y} \quad (9.16)$$

式中， $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{N_L \times N_R}$  为接收矩阵。式 (9.16) 也被称为线性波束形成接收器。为能窥探针对式 (9.13) 的多输入多输出系统的线性收发机 (9.14) ~ (9.16)，下面考查解码数据矢量式 (9.16) 的第  $i$  个元素  $\hat{x}_i$  与预编码矩阵  $\mathbf{B}$  和解码矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $i$  个列矢量  $\mathbf{b}_i$  和  $\mathbf{a}_i$  的关系：

$$\hat{x}_i = \mathbf{a}_i^H (\mathbf{H}\mathbf{b}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{n}_i) \quad (9.17)$$

式中， $\mathbf{n}_i = \sum_{l \neq i} \mathbf{H}\mathbf{b}_l \mathbf{x}_l + \mathbf{n}$  是第  $i$  个子数据流等价加性噪声，其协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_{n_i} = \sum_{l \neq i} \mathbf{H}\mathbf{b}_l \mathbf{b}_l^H \mathbf{H} + \mathbf{R}_n$$

这样式 (9.17) 中的  $\hat{x}_i$  与  $\mathbf{x}$  的其他分量无关，但与预编码矩阵  $\mathbf{B}$  的各个列皆有关。这样便给予发送端最大自由度来设计发送端波束形成器。设计线性无码间干扰接收器也是一个系统优化问题。

### 9.3.2 与线性接收滤波器有关的性能指标

对于如式 (9.17) 所表示的第  $i$  个接收子数据，其性能度量有检测信号的均方误差 (MSE)、接收信号的信—干—噪比 (SINR) 和误比特率 (BER) 等。它们的定义为

$$\text{MSE}_i = \mathcal{E}\{|x_i - \hat{x}_i|\} = |\mathbf{a}_i^H \mathbf{H}\mathbf{b}_i - 1|^2 + \mathbf{a}_i^H \mathbf{R}_{n_i} \mathbf{a}_i \quad (9.18)$$

$$\text{SINR}_i \triangleq \frac{\text{理想分量}}{\text{非理想分量}} = \frac{|\mathbf{a}_i^H \mathbf{H}\mathbf{b}_i|^2}{\mathbf{a}_i^H \mathbf{R}_{n_i} \mathbf{a}_i} \quad (9.19)$$

$$\text{BER}_i \triangleq \frac{\text{差错比特}}{\text{传输比特}} \approx \tilde{g}_i (\text{SINR}_i) \quad (9.20)$$

式中， $\tilde{g}_i$  是与第  $i$  个接收子数据流有关的误比特率与接收信号的信—干—噪比间的函数关系。对于绝大多数调制方式，若接收信号表达式中干扰加噪声分量服从循环对称复高斯分布，则对应误比特率可以解析地表示为接收信号的信—干—噪比<sup>[9-11]</sup>。否则，这种表示只

是一种近似形式。虽然在干扰信号分量足够大时可以利用中心极限定理保证干扰加噪声信号收敛于一个高斯分布。例如，对于正方形 M-QAM 调制符号星座图，在高斯加性干扰假设下，对应误比特率可以表示为<sup>[9,11]</sup>

$$\text{BER}(\text{SINR}) \approx \frac{4}{\log_2 M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}}(\text{SINR})\right) \quad (9.21)$$

式中， $Q(\cdot)$  如第 3 章所定义为  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$ 。函数  $Q(\cdot)$  常用其基尔诺夫 (Chernoff)

上界近似<sup>[10]</sup>为紧致上界函数  $Q(x) \leq (1/2)e^{-x^2/2}$ 。图 9.1 所示是以 QAM 调制方式用式 (9.21) 计算所得误比特率 (BER) 曲线，明显地调制指数低的信号其误比特率 (BER) 低，这与单输入单输出系统是完全一致的。值得注意的是，式 (9.20) 中的误比特率 (BER) 公式隐含了经解码矩阵  $\mathbf{A}$  联合处理后，各点对点之间的链路是独立检测的，这将使检测算法复杂度大幅度降低。

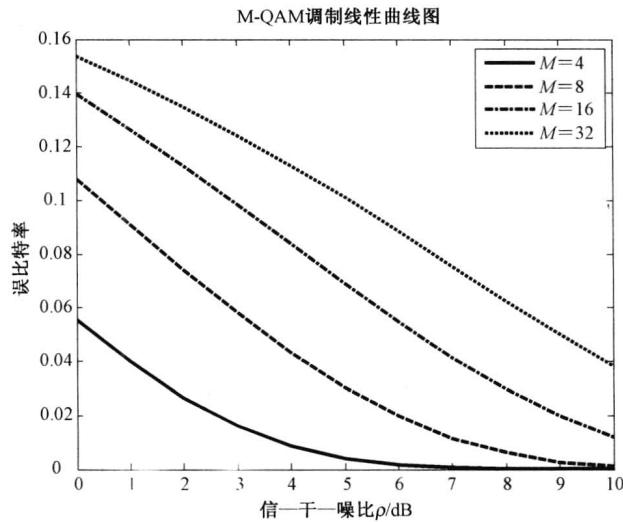


图 9.1 几种 QAM 调制方式下系统误比特率与信—干—噪比曲线

这正是线性解码矩阵  $\mathbf{A}$  能够具有的优越性。而系统设计的目标完全致力于最小化均方误差 (MSE)、最大化接收信号的信—干—噪比 (SINR) 和最小化系统误比特率 (BER) 等。

### 9.3.3 最优线性接收滤波器

若系统特性能以更小的均方误差 (MSE) 和更高的接收信号的信—干—噪比 (SINR) 以及更小的系统误比特率 (BER) 改善，则最优线性接收器的设计完全可以独立于系统特定的设计准则。为方便论述，定义系统均方误差 (MSE) 矩阵为

$$\mathbf{E} = E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^H\} = (\mathbf{A}^H \mathbf{H} \mathbf{B} - \mathbf{I})(\mathbf{B}^H \mathbf{H}^H \mathbf{A} - \mathbf{I}) + \mathbf{A}^H \mathbf{R}_n \mathbf{A} \quad (9.22)$$

这样第  $i$  个传输链路的均方误差 (MSE) 对应于矩阵  $\mathbf{E}$  的第  $i$  个对角元素, 即  $\text{MSE}_i = \mathbf{E}_{i,i}$ 。对于给定发送矩阵  $\mathbf{B}$  时接收矩阵  $\mathbf{A}$  的优化设计问题对应于关于矩阵  $\mathbf{A}$  最小化每一个传输链路的均方误差 (MSE), 即

$$\min_{\mathbf{A}} \text{MSE}_i = \min_{a_i} \text{MSE}_i, \quad \forall i$$

特别注意, 在关于第  $i$  个传输链路最小化其检测均方误差 (MSE) 时不会影响到其他 (第  $j$  个) 传输链路 ( $j \neq i$ ), 因为在线性接收器式 (9.17) 中解码矢量  $\mathbf{a}_i$  仅影响解码数据  $\hat{\mathbf{x}}_i$ , 这也正是线性解码器的特点。满足最小均方误差 (MSE) 的线性解码器式 (9.17) 也被称为维纳 (Wiener) 滤波器。最小均方误差 (MMSE) 算法在第 6 章已经给予深入的讨论, 而且也已经揭示了最小均方误差 (MMSE) 算法与迫零 (ZF) 算法间的内在联系。

基于上面对最小均方误差 (MMSE) 算法的讨论, 迫零 (ZF) 算法可以表示为对上面所得结果附加条件  $\mathbf{A}^H \mathbf{H} \mathbf{B} = \mathbf{I}$  用以迫使子数据流间的干扰为零, 将一个多输入多输出系统转化为多个相互独立的并行链路, 也就是多个相互独立的单输入单输出系统, 这就是迫零原理的精髓。最小均方误差 (MMSE) 算法和迫零 (ZF) 算法同时最大化接收信号的信—干—噪比 (SINR), 因而同时最小化系统误比特率 (BER)。最小均方误差 (MMSE) 和迫零 (ZF) 接收滤波器可以用一个公式“紧凑”地表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H} \mathbf{B} (\nu \mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{H} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H} \mathbf{B})^{-1} \quad (9.23)$$

式中, 参数  $\nu$  定义为

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{MMSE} \\ 0 & \text{ZF} \end{cases}$$

均方误差 (MSE) 滤波器 (9.22) 可以表示为

$$\mathbf{E} = (\nu \mathbf{I} + \mathbf{B}^H \mathbf{R}_n \mathbf{B})^{-1} \quad (9.24)$$

式中,  $\mathbf{R}_n = \mathbf{H}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H}$  是“白化”信道协方差矩阵。因此, 最小均方误差 (MMSE) 线性解码器也具有“迫零”效应。可以结合第 6 章的讨论结果, 深入理解最小均方误差 (MMSE) 与迫零 (ZF) 算法间的内在联系。

### 9.3.4 不同性能度量间的联系

在上面的论述中, 我们对同一收发链路有不同的性能指标度量。对应同一 (具有确定发送器和接收器) 系统, 这些不同性能指标原则上应该有一致的结论, 换句话说, 这些不同性能指标原则上应该是等价的。因此有必要研究具有确定发送和接收滤波器系统的均方误差 (MSE)、接收信号的信—干—噪比 (SINR) 和误比特率 (BER) 等性能指标的等价关系。

在同一解码滤波器 (9.23) 下, 系统第  $i$  个传输链路的均方误差 (MSE) 是均方误差矩阵 (9.24) 的第  $i$  个对角元素, 即

$$\text{MSE}_i = \left[ (\nu \mathbf{I} + \mathbf{B}^H \mathbf{R}_H \mathbf{B})^{-1} \right]_{i,i} \quad (9.25)$$

因此，在最小均方误差（MMSE）和迫零（ZF）接收解码器时，系统信—干—噪比（SINR）与均方误差（MSE）的关系为<sup>[6-8]</sup>

$$\text{SINR}_i = \frac{1}{\text{MSE}_i} - \nu \quad (9.26)$$

所以，系统误比特率（BER）可以写成均方误差（MSE）的函数，进而为系统信—干—噪比（SINR）的函数

$$\text{BER}_i = g_i(\text{MSE}_i) \triangleq \tilde{g}_i(\text{SINR}_i = \text{MSE}_i^{-1} - \nu) \quad (9.27)$$

式中，函数  $\tilde{g}_i$  如式（9.21）所定义。

图 9.2 所示是以式（9.27）计算所得最小均方误差（MMSE 对应图中实线）和迫零（ZF 对应图中虚线）接收解码器的误比特率（BER）的对比曲线。显然，最小均方误差（MMSE）接收解码器相对迫零（ZF）接收解码器有更好的性能。

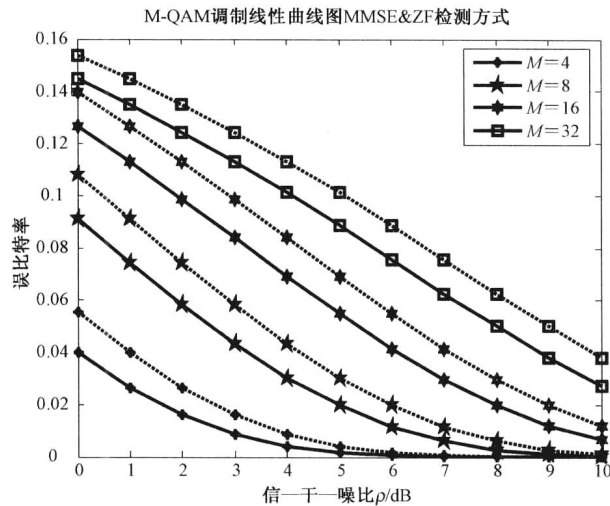


图 9.2 MMSE&ZF 检测器误比特率与信—干—噪比曲线

## 9.4 MIMO 系统发送端波束形成优化问题

上面两个小节从接收滤波器的优化设计角度对系统进行了剖析，下面再从发送滤波器的优化设计角度来阐释多输入多输出系统。发送滤波器的优化设计常称为发送端波束形成，其基本原理是在发送端已知信道信息前提下最优地配置的发送功率资源，这正是第 2 章所述的注水算法的目标优化本质。另外，通过上面的论述，很自然地可以基于系统均方误差（MSE）、系统接收信号的信—干—噪比（SINR）和系统误比特率（BER）对发送端滤

波器提出相应优化问题。这样论述将完全重复上面的讨论。因此，在此处从多目标优化问题、从其凸优化的表示和求解讨论发送端滤波器的设计问题。

### 9.4.1 MIMO 系统发送端波束形成的凸优化处理

参考文献[6]给出了一个包含不同设计准则的统一框架，其优化设计表示为（如定义 9.6 所述）Schur-凸或 Schur-凹函数族。将多输入多输出系统的优化设计问题刻画成多目标优化问题，而将多目标的优化描述成所谓的帕累托（Pareto）最优解集。帕累托最优解集是一个多目标优化问题的解，其解的特点是任何一个分量解的改进在不恶化其他分量解的前提下是不可能的<sup>[12]</sup>。

多输入多输出系统的线性接收和发送滤波器由矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  确定，因此多输入多输出系统的优化是针对矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  设计的。由于矩阵  $\mathbf{A}$  已由式 (9.23) 完全确定，所以下面的讨论关于矩阵  $\mathbf{B}$  展开。由式 (9.14) 和假设条件  $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = \mathbf{I}$ ，所以发送端的所有资源都包含在矩阵  $\mathbf{B}$  中，例如，系统发射功率为  $\text{tr}\{\mathbf{B}\mathbf{B}^H\}$ 。这样最直接的优化问题是在传输质量不变的前提下发射功率最小化。再考虑到发送端和接收端的线性性，各个子数据流是可以相互分离的，因此有如下最优化问题：

$$\min_{\mathbf{B}} \text{tr}\{\mathbf{B}\mathbf{B}^H\}, \text{ 服从 } \text{MSE}_i \leq \rho_i, 1 \leq i \leq L \quad (9.28)$$

我们称之为性能指标直接约束系统功率优化问题。其中， $\rho_i$  为第  $i$  个子数据流的最大估计均方误差。这样问题 (9.28) 实质为发送端用最优化功率配置方式以最小功率实现最佳系统性能。由式 (9.26) 和式 (9.27)， $\rho_i$  同时是系统信—干—噪比下限和误比特率上限的约束。假设系统总功率开销为  $\mathcal{P}_0$ ，则优化问题 (9.28) 也可以表示为给定约束条件  $\text{MSE}_i \leq \rho_i$  ( $1 \leq i \leq L$ ) 的优化问题  $\min_{\mathbf{B}} \text{tr}\{\mathbf{B}\mathbf{B}^H\} \leq \mathcal{P}_0$ 。

另外，我们可以假设更广义的约束条件，设  $f$  是一个具有全局优化特性的代价函数，将式 (9.28) 的约束条件推广得到

$$\min_{\mathbf{B}} \text{tr}\{\mathbf{B}\mathbf{B}^H\}, \text{ 服从 } f(\text{MSE}_i) \leq \alpha_0 \quad (9.29)$$

我们称之为广义性能指标约束系统功率优化问题。其中， $\alpha_0$  为要求代价函数  $f$  整体满足的性能指标。

### 9.4.2 性能指标直接约束的发送端滤波器优化设计

利用系统均方误差表达式 (9.24)，性能指标直接约束的系统发送功率优化问题 (9.28) 可以写作

$$\min_{\mathbf{B}} \text{tr}\{\mathbf{B}\mathbf{B}^H\}, \text{ 服从 } \text{diag}(\nu\mathbf{I} + \mathbf{B}^H \mathbf{R}_{\text{H}} \mathbf{B})^{-1} \leq \boldsymbol{\rho} \quad (9.30)$$

矢量  $\boldsymbol{\rho}$  由为  $\rho_i$  元素构成且以递减顺序排列，其角码次序可能有些许变更。

我们知道，值  $\text{tr}\{\mathbf{B}\mathbf{B}^H\}$  是矩阵  $\mathbf{B}\mathbf{B}^H$  特征值之和，因此优化问题 (9.30) 是带有对角约



束的矩阵  $\mathbf{B}\mathbf{B}^H$  特征值之和的最小化问题。这种优化问题是所谓的“超优 (majorization)”问题<sup>[13]</sup>。

**超优理论** 一个具有给定特征值  $\lambda$  的矩阵其对角元素小于值  $\mathbf{d}$  是可构造的，当且仅当  $\lambda$  是“弱超优”于  $\mathbf{d}$ ，记为  $\lambda \succ_w \mathbf{d}$  ( $\lambda$  和  $\mathbf{d}$  均以递增顺序排列或均以递减顺序排列)。

对于问题 (9.30)，定义矩阵  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\mathbf{Q}^H$ ，其中  $\mathbf{Q}^H$  是一个可以对角化矩阵  $\mathbf{B}^H\mathbf{R}_H\mathbf{B}$  的酉阵，则得等价优化问题：

$$\min_{\tilde{\mathbf{B}}} \text{tr}\{\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^H\}, \text{ 服从 } \lambda(\nu\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{B}}^H\mathbf{R}_H\tilde{\mathbf{B}})^{-1} \succ_w \boldsymbol{\rho} \quad (9.31)$$

式中， $\lambda(\cdot)$  表示对应矩阵的特征值矢量函数。对角矩阵  $\tilde{\mathbf{B}}^H\mathbf{R}_H\tilde{\mathbf{B}}$  以递增顺序排列而矢量  $\boldsymbol{\rho}$  的元素以递减顺序排列。

容易验证，当矩阵  $\tilde{\mathbf{B}}$  取形式解  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{U}_H\boldsymbol{\Sigma}_B$  时上述对矩阵  $\tilde{\mathbf{B}}$  的要求条件满足，其中  $\mathbf{U}_H \in \mathbf{C}^{N_T \times L}$ ，其列矢量为矩阵  $\mathbf{R}_H$  对应于其  $L$  个以递增顺序排列的最大特征值  $\{\lambda_{H,i}\}$  的特征矢量，矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}_B = \text{diag}\{\sqrt{p_i}\} \in \mathbf{R}^{L \times L}$  是一个具有对应信道特征方向功率配置  $\{p_i\}$  的对角矩阵 (满足附加约束条件  $p_i \geq 0$ )。利用具有上述特性的矩阵  $\tilde{\mathbf{B}}$ ，超优问题 (9.31) 可改写作

$$\min_p \sum_{i=1}^L p_i, \text{ 服从 } \sum_{l=i}^L \frac{1}{\nu + p_l \lambda_{H,l}} \leq \sum_{l=i}^L \rho_l, \quad p_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq L \quad (9.32)$$

这是一个简单的凸优化问题。事实上，超优问题 (9.32) 还应该附加约束  $p_i \lambda_{H,i} \leq p_{i+1} \lambda_{H,i+1}$  ( $1 \leq i \leq L$ )，然而当存在某个  $i$ ， $p_i \lambda_{H,i} > p_{i+1} \lambda_{H,i+1}$ ，则将  $p_i \lambda_{H,i}$  与  $p_{i+1} \lambda_{H,i+1}$  交换并不影响超优问题 (9.32) 的约束，但注意这时对应点不是超优问题 (9.32) 的解，因为对信道增益特征值  $\lambda_{H,i}$  的递增顺序排列可使目标函数值进一步减小。将上面的讨论结果总结为如下定理：

**定理 9.1** 非凸优化问题 (9.31) 中矢量  $\boldsymbol{\rho}$  的元素以递减顺序排列等价于凸优化问题 (9.32)，其中  $\lambda_{H,i}$  是矩阵  $\mathbf{R}_H$  的  $L$  个以递增顺序排列的最大特征值，从问题 (9.31) 到问题 (9.32) 的映射关系为

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}_H \text{diag}\{\sqrt{p_i}\} \mathbf{Q}$$

式中，矩阵  $\mathbf{U}_H$  为对角化信道增益矩阵； $\{p_i\}$  是在有效信道特征方向上的功率配置，旋转矩阵  $\mathbf{Q}$  使得

$$\text{diag}(\nu\mathbf{I} + \mathbf{B}^H\mathbf{R}_H\mathbf{B})^{-1} = \boldsymbol{\rho}$$

凸优化问题 (9.32) 可以利用注水算法求解<sup>[7,8]</sup>。发送和接收的整体过程可以表示为

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^H(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{n})$$

利用定理 9.1 所述的最优传输结构，有

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^H(\nu\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}_B^H\mathbf{D}_H\boldsymbol{\Sigma}_B)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_B^H\sqrt{\mathbf{D}_H}(\sqrt{\mathbf{D}_H}\boldsymbol{\Sigma}_B\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{w})$$

写成分量形式

$$\hat{x}_i^Q = \alpha_i (\sqrt{p_i \lambda_{H,i}} x_i^Q + \mathbf{w}_i), 1 \leq i \leq L$$

式中,  $\mathbf{w}$  等价归一化加性白噪声分量 (即满足  $E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^H\} = \mathbf{I}$ ); 矩阵  $\mathbf{D}_H = \mathbf{U}_H^H \mathbf{R}_H \mathbf{U}_H$ 。记  $\mathbf{x}^Q = \mathbf{Q}\mathbf{x}$  和常系数:

$$\alpha_i = \sqrt{p_i \lambda_{H,i}} / (v + p_i \lambda_{H,i})$$

### 9.4.3 广义性能指标约束的系统发送端滤波器优化设计

利用线性接收滤波器表达式 (9.23), 系统发送端滤波器优化设计问题 (9.29) 可简写为

$$\min_{\mathbf{B}} \text{tr}\{\mathbf{B}\mathbf{B}^H\}, \text{ 服从 } f(\text{diag}(v\mathbf{I} + \mathbf{B}^H \mathbf{R}_H \mathbf{B})^{-1}) \leq \alpha_0 \quad (9.33)$$

将问题 (9.33) 改写为

$$\min_{\mathbf{B}, \boldsymbol{\rho}} \text{tr}\{\mathbf{B}\mathbf{B}^H\}, \text{ 服从 } \text{diag}(v\mathbf{I} + \mathbf{B}^H \mathbf{R}_H \mathbf{B})^{-1} \leq \boldsymbol{\rho}, \quad f(\boldsymbol{\rho}) \leq \alpha_0 \quad (9.34)$$

从式 (9.33) 到式 (9.34) 是由于假设函数  $f$  关于其每一个自由变量是全局递增的。利用定理 9.1 所述的最优传输结构, 有

$$\min_{\mathcal{P}_0, \boldsymbol{\rho}} \sum_{i=1}^L p_i, \text{ 服从 } \sum_{i=1}^L \frac{1}{v + p_i \lambda_{H,i}} \leq \sum_{i=1}^L \rho_{[i]}, \quad p_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq L, \quad f(\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_L) \leq \alpha_0 \quad (9.35)$$

式中,  $\mathcal{P}_0$  是总功率。借用式 (9.32) 后面的解释此处的序化约束  $p_i \lambda_{H,i} \leq p_{i+1} \lambda_{H,i+1}$  同样是非必需的。 $\rho_{[i]}$  表示对  $\rho_i$  的递减顺序的重排。

$$\min \sum_{i=1}^L \rho_{[i]} = \min \left\{ \rho_{l_1} + \dots + \rho_{l_{L-i+1}} \mid \rho_{l_i} > 0, 1 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_{L-i+1} \leq L \right\} \quad (9.36)$$

这是一个凹函数。为了在优化问题 (9.35) 中规避约束条件 (9.36), 可假设  $f$  当其自由变量以递减顺序排列时取得最小值, 则优化问题 (9.35) 可写作

$$\min_{\mathcal{P}_0, \boldsymbol{\rho}} \sum_{i=1}^L p_i,$$

$$\text{服从 } \sum_{i=1}^L \frac{1}{v + p_i \lambda_{H,i}} \leq \sum_{i=1}^L \rho_{[i]}, \quad 1 \leq i \leq L, \quad p_i \geq 0, \quad \rho_i \geq \rho_{i+1}, \quad f(\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_L) \leq \alpha_0 \quad (9.37)$$

如果附加代价函数  $f$  是凸的, 则约束  $\rho_i \geq \rho_{i+1}$  可去掉 (因为最优解不可能有  $\rho_i < \rho_{i+1}$ , 否则令  $\tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}_{i+1} = (\rho_i + \rho_{i+1})/2$  代入问题 (9.37) 将有更小的目标函数值<sup>[2]</sup>)。优化问题 (9.35) 可进一步写作如下的凸优化形式:

$$\min_{\mathcal{P}_0, \boldsymbol{\rho}} \sum_{i=1}^L p_i,$$

$$\text{服从 } \sum_{i=1}^L \frac{1}{v + p_i \lambda_{H,i}} \leq \sum_{i=1}^L \rho_{[i]}, \quad 1 \leq i \leq L, \quad p_i \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_L) \leq \alpha_0 \quad (9.38)$$

我们将上面关于简化问题的讨论结果总结为下面的定理。

**定理 9.2** 具有递增代价函数  $f$  的原非凸优化问题 (9.33) 等价于优化问题 (9.35)，其中  $\lambda_{H,i}$  是信道增益系数协方差矩阵  $\mathbf{R}_H$  的  $L$  个以递增顺序排列的大特征值。另外，若代价函数  $f$  是凸的且当自变量以递减顺序排列时函数  $f$  取得最小值，非凸优化问题 (9.33) 等价于凸优化问题 (9.38)。凸优化问题 (9.38) 到优化问题 (9.33) 的映射（系统发送端线性滤波器）为

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}_H \text{diag}\{\sqrt{p_i}\} \mathbf{Q}$$

其中  $\mathbf{U}_H$  能够对角化信道增益系数协方差矩阵  $\mathbf{R}_H$ ， $\{p_i\}$  是在信道特征模上的功率配置， $\mathbf{Q}$  为旋转置换矩阵使得  $\text{diag}(\nu \mathbf{I} + \mathbf{B}^H \mathbf{R}_H \mathbf{B})^{-1} = \boldsymbol{\rho}$ 。

**注意：**定理 9.2 的结果可进一步表示为 Schur-凹和 Schur-凸函数的形式。首先将均方误差的约束条件 (9.34) 改写（不等式约束在最优处为等式约束）为

$$\boldsymbol{\rho} = \text{diag}(\mathbf{Q}^H (\nu \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{B}}^H \mathbf{R}_H \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \mathbf{Q}) \quad (9.39)$$

假设函数  $f$  是 Schur-凹的，由 Schur-凹的定义有

$$f(\text{diag}(\mathbf{X})) \geq f(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X}))$$

因此，当式 (9.39) 中  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  时  $f(\boldsymbol{\rho})$  取得最小值（因为  $(\nu \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{B}}^H \mathbf{R}_H \tilde{\mathbf{B}})^{-1}$  已经是对角矩阵且对角元素以递减顺序排列）。如果  $f$  是 Schur-凸的，则

$$f(\text{diag}(\mathbf{X})) \geq f(\mathbf{1} \cdot \text{tr}(\mathbf{X}) / L)$$

此处  $\mathbf{1}$  为全 1 矢量。这说明，当矩阵  $\mathbf{Q}$  使得式 (9.39) 中  $\boldsymbol{\rho}$  的各元素相等时，也就是当矩阵  $\mathbf{Q}^H (\nu \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{B}}^H \mathbf{R}_H \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \mathbf{Q}$  具有相同对角元素时，函数  $f_0(\boldsymbol{\rho})$  取得最小值。

**定理 9.3** 优化问题 (9.33) 可进一步用下面两个特殊函数类来刻画：

(1) 若  $f$  是 Schur-凹的，则最优解为

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}_H \text{diag}\{\sqrt{p_i}\}$$

(2) 若  $f$  是 Schur-凸的，则最优解为

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}_H \text{diag}\{\sqrt{p_i}\} \mathbf{Q}$$

式中，矩阵  $\mathbf{Q}$  是一酉阵，使矩阵  $(\mathbf{I} + \mathbf{B}^H \mathbf{R}_H \mathbf{B})^{-1}$  有恒等对角元素。

#### 9.4.4 最小误比特率发送端滤波器优化设计

对于通信系统评价的一切指标最终还是要落实到其服务质量上，而平均误比特率指标是与系统服务质量直接联系的一个很好的性能度量，被认为是系统设计的一个很好的准则。其定义为

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L g_i(\text{MSE}_i) \leq \text{BER}_0$$

其中  $g_i$  如式 (9.21) 所定义, 此函数是凸的且关于均方误差 (MSE) 变量是递增的。作为一般规律而言, 误比特率 (BER) 关于均方误差 (MSE) 是凸的。例如, 对于 BPSK 和 QPSK 调制符号星座图, 误比特率 (BER) 是凸函数<sup>[6,8]</sup>。对于式 (9.23) 所表示的线性接收滤波器, 发送端线性波束形成滤波器的优化问题为

$$\min_{\mathbf{B}} \text{tr}\{\mathbf{B}\mathbf{B}^H\}, \text{ 服从 } \frac{1}{L} \sum_i g_i [(\nu\mathbf{I} + \mathbf{B}^H \mathbf{R}_H \mathbf{B})^{-1}]_{i,i} \leq \text{BER}_0$$

在此应注意误比特率 (BER) 与所给调制符号星座图点和比特对应有一定关联, 如格雷码。另外, 对于各个子数据流, 可以分别配置不同调制符号星座图, 约束条件中的  $g_i$  有不同表达式, 这也影响问题的求解复杂度。一个特别情形是所有  $L$  个子数据流具有相同调制符号星座图, 平均误比特率 (BER) 代价函数是 Schur-凸的, 因为平均误比特率 (BER) 是若干个相同的 Schur-凸函数之和, 问题简化为

$$\min_{p_0} \sum_{i=1}^L p_i, \text{ 服从 } \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{1}{\nu + p_l \lambda_{H,l}} \leq \rho_0, \quad p_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq L$$

式中,  $\rho_0 = g^{-1}(\text{BER}_0)$ 。(基于 KKT 条件) 问题的 (注水算法求) 解为

$$p_l = (\mu \lambda_{H,l}^{-1/2} - \nu \lambda_{H,l}^{-1})^+, \quad 1 \leq l \leq L$$

其中参数  $\mu$  的选择满足条件

$$\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{1}{\nu + p_l \lambda_{H,l}} = \rho_0$$

## 9.5 本章要点总结

系统优化最核心的问题是将其表述或转化为一个凸优化。因此在本章开始介绍了一些有关凸的基本概念, 如凸集合及仿射集合、凸函数、仿射函数; 优化问题的一般表述式(9.4); 凸优化的分类——线性优化问题、二次型优化问题、二次约束二次优化、二次锥优化、半定优化等。这些是我们可能涉及的所有凸优化问题, 结合式 (9.4) 可以写出这些凸优化问题的规范表述。

将一个一般优化问题转化为一个凸优化, 有许多方法, 如悬浮、透视、共轭等。本章主要叙述其中最著名和广泛应用的拉格朗日乘子对偶理论, 以及保证此对偶问题的解与原始优化问题的解一致的 KKT 条件, 即所谓的强对偶性成立。

本章的议题是优化理论与多输出多输入 (MIMO) 系统设计。我们采用的是分层处理、抓主要矛盾的论述方式, 先解决 MIMO 系统接收端的优化问题, 得到线性解码器输出:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{a}_i^H (\mathbf{H}\mathbf{b}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{n}_i)$$

此解码器的性能利用如均方误差、系统输出信—干—噪比、系统误比特率等指标度量。这样最优线性接收滤波器的设计问题就可以表述为系统解码器输出的最小均方误差 (MMSE) 或最高的接收信号的信—干—噪比 (SINR) 和最小系统误比特率 (BER) 等

优化问题。

系统接收端优化问题的解有最小均方误差 (MMSE) 和迫零 (ZF) 接收滤波器, 它们有一个统一的表达式:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H} \mathbf{B} (\nu \mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{H} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H} \mathbf{B})^{-1}$$

式中, 参数  $\nu$  当为 MMSE 解码器时等于 1, 当为 ZF 解码器时等于 0。

MIMO 系统发送端的优化问题, 其本质是发送端功率约束的波束形成技术, 即求出式 (9.40) 中线性波束形成矩阵  $\mathbf{B}$  满足系统信号检测的最小均方误差或输出信号最大信一干一噪比且 Frobenius 范数最小的优化问题。我们得到了一系列等价优化问题的表示。此问题的求解采用拉格朗日乘子对偶理论, 即注水算法。

## 练习题

1. 证明指数函数  $f(x) = e^{\alpha x}$  对于任意  $\alpha \in \mathbf{R}$  是  $\mathbf{R}$  上凸函数。
2. 证明函数  $f(x) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  是  $\mathbf{R}$  上凸函数。
3. 函数  $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ , 设  $f_i(x)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 是凸函数, 则  $f(x)$  是凸函数。

4. 证明  $f(x)$  是凸函数, 对于任意非负常数  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $f^\alpha(x)$  是凸函数。

5. 设给定  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , 定义其共轭伴随函数  $f^*: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \text{dom} f} (\mathbf{y}^T \mathbf{x} - f(\mathbf{x}))$$

证明  $f^*$  是凸的。

6. 设  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}_{++}^K$  ( $\mathbf{S}_{++}^K$  为正定  $K \times K$  维厄尔米特矩阵集合) 是凸函数, 证明其共轭伴随函数  $f^*(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{y}$  是凸函数。

7. 证明下面函数满足对数一凹性质:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{Q}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})}$$

$$f(\mathbf{x}) = \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right) e^{-\lambda^T \mathbf{x}}$$

8. 证明优化问题 (9.4) 等价于如下优化问题 (这是原始优化问题 (9.4) 的悬浮变换):

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{服从} \quad & f_0(\mathbf{x}) - t \leq 0 \\ & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

9. 求解下面的线性优化问题:  $\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ , 服从  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ 。

10. (最佳线性无偏估计) 假设有观测数据  $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ , 其中  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  为被传输数据,  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  为列满秩的信道变换矩阵,  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^m$  为干扰矢量。进一步, 假设  $\mathbf{v}$  满足  $E\{\mathbf{v}\} = 0$  和  $E\{\mathbf{v} \mathbf{v}^T\} = \mathbf{I}_m$  (零均值和各分量不相关)。设线性估计器为  $\mathbf{B}$ , 即  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B} \mathbf{y}$  为  $\mathbf{x}$  的

估计值;  $\hat{\mathbf{x}}$  是  $\mathbf{x}$  的无偏估计若有  $E\{\hat{\mathbf{x}}\} = \mathbf{x}$ ; 最佳有的含义是估计误差的协方差矩阵“最小”; 即有如下优化问题:

$$\min_{\mathbf{B} \in \mathcal{S}_+^K} \mathbf{B}\mathbf{B}^T, \text{ 服从 } \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

说明上面优化问题是凸的且求解。

11. 设  $\mathcal{S}^K$  为  $K \times K$  维厄尔米特矩阵集合,  $\mathbf{A} \in \mathcal{S}^K$  为半正定, 表示为  $\mathbf{A} \succeq \mathbf{0}$ , 记为  $\mathcal{S}_+^K$ 。 $\mathcal{S}^K$  上的标量积定义为:  $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{S}^K, \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \sum_{i,j=1}^K A_{i,j}B_{i,j}$ , 其中  $A_{i,j}$  表示该矩阵  $i$  行  $j$  列位置的元素。则

$$\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) \geq 0, \forall \mathbf{A} \in \mathcal{S}_+^K \Leftrightarrow \mathbf{B} \in \mathcal{S}_+^K$$

## 参 考 文 献

- [1] Rockafellar R T. Lagrange multipliers and optimality. SIAM Rev., 1993, 35 (2) : 183–238.
- [2] Boyd S, Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004.
- [3] Vandenberghe L, Boyd S. Semidefinite programming. SIAM Rev., 1996, 38(1) : 49–95.
- [4] BenTal A, Nemirovski A. Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [5] Bertsekas D P. Nonlinear Programming. 2nd ed. Belmont, MA: Athena Scientific, 1999.
- [6] Palomar D P, Cioffi J M, Lagunas M A. Joint Tx-Rx beamforming design for multicarrier MIMO channels: A unified framework for convex optimization. IEEE Trans. Signal Process, 2003, 51 (9) : 2381–2401.
- [7] Palomar D P, Lagunas M A, Cioffi J M. Optimum linear joint transmit-receive processing for MIMO channels with QoS constraints. IEEE Trans. Signal Process, 2004, 52 (5) : 1179–1197.
- [8] Palomar D P. A unified framework for communications through MIMO channels. Ph.D. dissertation, Technical University of Catalonia (UPC), Barcelona, Spain, 2003.
- [9] Benedetto S, Biglieri E. Principles of Digital Transmission: with Wireless Applications. New York: Kluwer Academic, 1999.
- [10] Verdú S. Multiuser Detection. New York: Cambridge University Press, 1998.
- [11] Cho K, Yoon D. On the general BER expression of one- and two-dimensional amplitude modulations. IEEE Trans. Commun, 2002, 50 (7) : 1074–1080.
- [12] Miettinen K. Multi-objective optimization. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [13] Marshall A W, Olkin I. Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. New York: Academic Press, 1979.
- [14] Palomar D P, Bengtsson M, Ottersten B. Minimum BER linear transceivers for MIMO channels via primal decomposition. IEEE Trans. Signal Process, 2005, 53 (8) : 2866–2882.